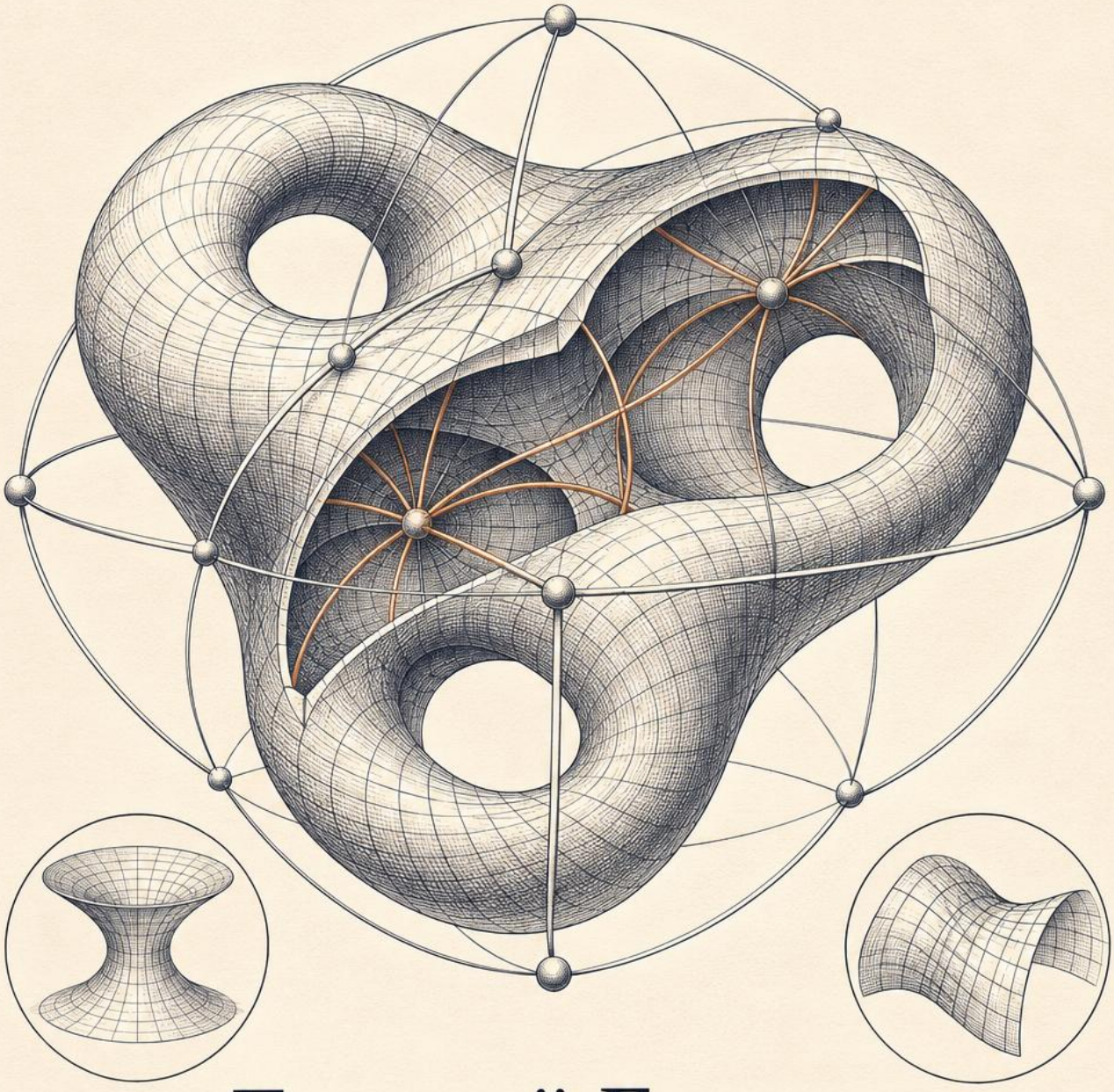
ПРОСТРАНСТВО ИЗНУТРИ

Гипотезы о пространстве и приборы для их проверки



Евгений Бренев
Мира Вейран

Евгений Бренев
Мира Вейран

Пространство изнутри

Гипотезы о пространстве и приборы для их проверки

2026

Содержание

Предисловие 4
Как читать книгу 5
Глава 1 Пространство без внешнего наблюдателя 7
Глава 2 Как измеряется размерность 16
Глава 3 Когда размерность зависит от масштаба 29
Глава 4 Скрытые и синтетические направления 36
Глава 5 Геометрия из квантовых отношений 44
Глава 6 Можно ли восстановить пространство по отклику 52
Глава 7 Гипотеза общей разреженной связности 61
Глава 8 Вычислительный опыт и проверка его устойчивости 69
Глава 9 От сетевого аналога к причинной физической модели 88
Глава 10 Спектроскопия скрытой геометрии 95
Глава 11 Часы и гравиметры как совместный зонд пространства 106
Глава 12 Что способен услышать интерферометр 120
Глава 13 Три прибора и путь от сигнала к выводу 131
Глава 14 Как отличить открытие от убедительной ошибки 141
Глава 15 Что установлено и как продолжить проверку 149
Приложение А Математические соглашения 154
Приложение Б Повторение вычислительных опытов 157
Приложение В Карта проверяемых утверждений 159
Приложение Г Словарь основных понятий 160
Приложение Д Практикум от напряжения к восстановлению связи 163
Литература 174
Указатель иллюстраций 178

Предисловие

От расстояния к устройству пространства

Пространство знакомо через действие: предмет можно переместить, расстояние - измерить, сигнал - отправить и принять. Но одинаковый результат отдельного опыта ещё не определяет устройство мира. Две системы могут иметь одинаковые частоты колебаний и разные пути передачи возмущения. Изменение показаний может возникнуть из-за новой связи, дрейфа прибора или неверно выбранной модели. Книга начинается с вопроса о том, какие наблюдения позволяют различить эти возможности.

Главная исследовательская линия посвящена восстановлению связности по отклику. В известную сеть вводится скрытая связь, затем её положение восстанавливается по нескольким доступным портам. Следующий шаг делает задачу реалистичнее: обычные связи тоже известны лишь с конечной точностью. Тогда необходимо выяснить, какая часть необычного сигнала ещё объясняется калибровкой и какое дополнительное измерение способно изменить вывод.

Книга проводит этот вопрос через законченные примеры. Маленькие сети дают явные матрицы и показывают источник неоднозначности. Большой численный опыт проверяет восстановление. Ограниченная модель дрейфа задаёт границы допустимого объяснения. Несколько зондов и выбранные измерительные контрасты проверяют, какую новую информацию действительно удалось получить. Практикум на резистивно-ёмкостной (RC) сети связывает эту математику с напряжениями, временем записи и ошибками считывания.

Другие главы рассматривают компактное направление, совместные часовые и гравиметрические сигналы и интерферометрический отклик. В каждой ветви выбран определённый оператор или поле, выведена наблюдаемая величина и обозначен конкурентный механизм. Эти модели объединяет метод исследования. Они не выводятся из единого фундаментального действия и имеют разные физические предпосылки.

Книга адресована читателю, которому интересно устройство пространства и который готов проверять собственные предположения. Формулы сопровождают ход мысли, а численные примеры позволяют вернуться от обозначения к наблюдению. Для расчётного маршрута необходимы линейная алгебра, основы вероятностей и знакомство с дифференциальными уравнениями. Понятия спектральной плотности, матрицы отклика и общей причины вводятся через конкретные задачи.

Основные результаты собственных опытов получены на заданных математических системах и синтетических данных. Экспериментальные сведения о природе приводятся по первичным публикациям. Разделение этих уровней позволяет оценивать содержание каждого вывода: где действует доказанное тождество, где проверен алгоритм, а где сформулирован физический прогноз, ожидающий измерения.

Как читать книгу

Два маршрута

При первом чтении полезно следить за одним вопросом: что именно добавляет очередное измерение? В главе 1 это сравнение геометрических операций, в главе 2 - переход от среднего спектра к локальному отклику, в главах 6-8 - различение структуры и дрейфа, в главе 11 - совместная проверка двумя типами приборов. После такого прохода технические выводы получают ясную цель.

Маршрут	Основная последовательность	Что требуется
Концептуальный	Главы 1-2; вводные и итоговые разделы 3-5; примеры 6-8; физические постановки 10-13; выводы 15	Функции, пропорции, единицы; готовность проследить небольшой матричный пример
Расчётный	Все выводы 2-12; статистический протокол 14; RC-практикум и вычислительное приложение	Матрицы, собственные значения, производные, вероятности и спектральное представление сигналов

Главу 3 можно сначала прочитать как обзор разных механизмов. Голографические формулы главы 5 требуют своего теоретического контекста и не являются входным условием для сетевого опыта. При возникновении трудности с матрицами стоит вернуться к трём узлам главы 2: там каждая строка оператора и каждый столбец отклика привязаны к действию над системой.

В тексте сохранены подробные условия применимости там, где от них зависит вывод. Для повторного чтения предусмотрены словарь, таблица обозначений и карта утверждений. В вычислительном приложении указаны параметры и ограничения расчётов; команды запуска собраны в сопроводительной инструкции. Техническая процедура RC-опыта собрана отдельно, чтобы основной рассказ не превращался в перечень настроек.

Три направления исследования

Направление	Наблюдаемые данные	Предмет проверки
Связность	Матрица отклика между доступными входами и выходами	Дополнительная связь, допустимый дрейф и множество неразличимых структур
Компактное направление	Статическая сила и динамический отклик выбранного скалярного зонда	Одна лестница мод с определённой связью источника и детектора
Согласованные возмущения	Спектры часовых разностей, ускорений и интерферометрической фазы	Совместное предсказание конкретного поля и отличие от аппаратной или кинематической причины

Сетевой аналог позволяет проверить алгоритм при известной истине. Компактная модель задаёт конкретную альтернативу обычной геометрии. Стохастические и интерферометрические модели связывают пространственные предположения с несколькими каналами регистрации. Успех одной ветви не переносит её физическую интерпретацию на остальные. Общим остаётся порядок работы: задать модель, вывести наблюдение, сравнить альтернативы и определить границу вывода.

Как различать уровни результата

Статус	Что он означает в этой книге
Известный результат	Метод или физическое положение с указанием исходной публикации и условий применения
Вывод из модели	Формула следует из явно записанного оператора, ядра или геометрии
Численная проверка	Программа выполнила заданный опыт; исходные данные, параметры и команды доступны
Измерительный проект	Предсказан сигнал и рассчитаны требования; физическая установка ещё должна проверить его
Наблюдение природы	Результат опубликованного эксперимента, относящийся к определённому классу моделей

Ранг матрицы отклика, число направлений пространства и число параметров модели отвечают на разные вопросы. В дальнейшем название каждой величины сопровождается её операционным смыслом. Особенно существенны случаи, когда данных достаточно, чтобы отвергнуть одну модель, но недостаточно, чтобы единственным образом восстановить другую.

Указатель иллюстраций в конце книги помогает найти нужную схему. Концептуальный рисунок не заменяет чертёж, калибровку или экспериментальные данные.

Глава 1
Пространство без внешнего наблюдателя

Наблюдатель внутри пространства

Представим исследователя, которому доступны часы, источники света, отражатели и несколько движущихся тел. У него нет фотографии мира со стороны и нет возможности подняться над пространством, чтобы рассмотреть его форму. Всё, что он знает, складывается из встреч тел, показаний приборов и обмена сигналами. Именно в таком положении находится физика. Даже космическая обсерватория остаётся частью исследуемого мира. Поэтому вопрос о пространстве начинается с отношений между наблюдаемыми событиями. Какие перемещения независимы друг от друга? Как сравнивать расстояния? Каким образом отличить искривление пространства от изменения самого измерительного устройства? Ответы должны быть доступны наблюдателю, который никогда не покидает свою вселенную.

Для начала достаточно спросить, какие отношения доступны проверке. Можно сравнивать длины, времена прохождения сигнала, свободное движение и результаты замкнутых обходов. Согласие этих процедур поддерживает выбранную геометрию. Их расхождение показывает, где требуется проверить прибор, среду или само правило описания пространства.

На рисунке 1 наблюдатель включён в ту же сеть измерительных операций, по которой восстанавливается геометрия.

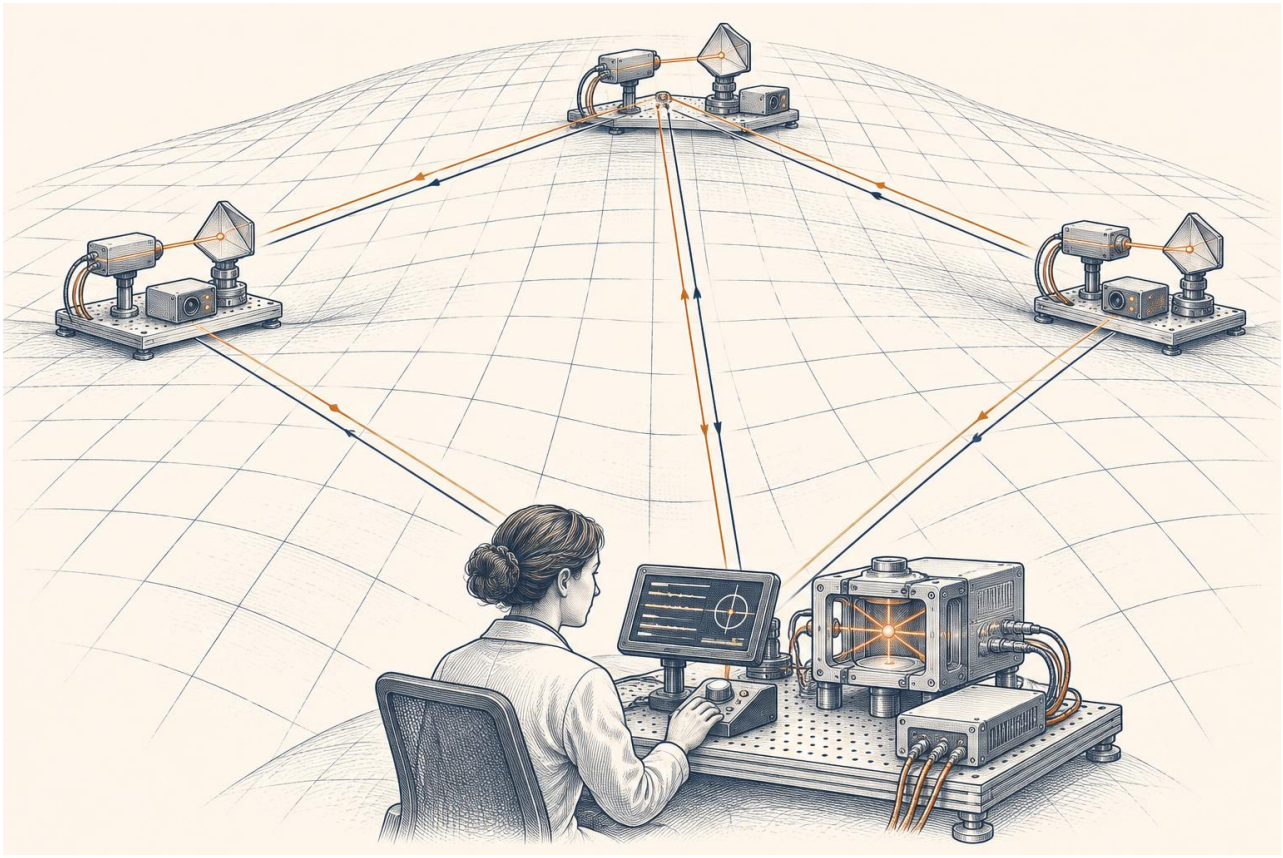


Рисунок 1. Наблюдатель внутри измерительной сети. Часы, излучатели и отражатели образуют систему доступных сравнений: передачу сигналов, измерение расстояний и замкнутые обходы. Перспективная поверхность служит условным способом показать отношения между узлами; она не предполагает внешнего наблюдателя за Вселенной. Это концептуальная иллюстрация измерительных операций, а не изображение конкретного проведённого опыта.

Слово «измерение» дополнительно затрудняет разговор, поскольку обозначает и действие прибора, и независимое направление. Далее действие прибора будет называться измерением величины, а число направлений - размерностью. Важна и третья возможность: переменная математической модели. Температура, концентрация вещества и электрический потенциал могут быть независимыми переменными, но не становятся от этого новыми пространственными направлениями. Исследователь способен построить график в пространстве сотни признаков, оставаясь в обычной лаборатории. Прежде чем обсуждать пятое или десятое измерение, необходимо выяснить, к какому именно объекту относится число: к положению тела, состоянию системы, данным наблюдения или фундаментальной геометрии.

Координаты и независимые направления

Число записанных координат само по себе ничего не доказывает. Положение точки на поверхности сферы можно указать тремя декартовыми координатами, однако они связаны

условием постоянного радиуса. Если две координаты немного изменить в допустимой области, третья определяется уравнением поверхности с выбором соответствующего участка. Локально остаются две независимые степени свободы. И наоборот, две угловые координаты не покрывают сферу одной совершенно регулярной картой: у полюсов привычная запись теряет удобство. Неисправность координатной сетки не означает физическую неисправность поверхности. Этот простой пример позволяет сразу отделить геометрию от способа её записи.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad d_{\mathrm{local}} = 3 - 1 = 2 \qquad (1.1)$$

Равенство в правой части справедливо для данного примера потому, что одно гладкое независимое ограничение уменьшает локальное число свободных координат на единицу. Его нельзя механически применять к любому набору уравнений: ограничения могут зависеть друг от друга, а в особых точках их ранг способен меняться. Практический смысл независимости проще увидеть по движениям. Если все малые допустимые перемещения выражаются через два независимых направления, третья координатная запись остаётся избыточной. Для физической дополнительной размерности необходимо показать новый класс независимых перемещений или соответствующий дополнительный набор распространяющихся мод. Добавить букву к уравнению для этого недостаточно.

Другая распространённая путаница возникает в механике многих тел. Три свободные частицы в трёхмерном пространстве требуют девяти координат положения. При добавлении импульсов описание фазового состояния содержит уже восемнадцать чисел. Это не означает, что частицы переместились в физическое пространство с восемнадцатью направлениями. Высокая размерность принадлежит пространству возможных состояний всей системы. Подобное различие сохраняется в квантовой теории, где пространство состояний имеет ещё более богатое устройство. В дальнейшем любое утверждение о высокой размерности будет сопровождаться указанием того, какие объекты являются его точками и какие изменения соответствуют перемещению между этими точками.

Как расстояние получает физический смысл

Координаты становятся геометрией лишь после появления правила сравнения близких положений. На гладком пространстве такое правило задаётся метрикой. Она превращает малые изменения координат в физическую длину и позволяет учитывать, что одинаковое числовое изменение разных координат вовсе не обязано означать одинаковое перемещение. В декартовой системе единицы по осям привычно выбраны одинаковыми, поэтому устройство метрики почти незаметно. В других координатах оно выходит на первый план. Общая запись ниже относится к положительно определённой пространственной метрике; повторяющиеся индексы означают суммирование по независимым координатам. Длина получается после интегрирования вдоль выбранной кривой.

$$d\ell^2 = g_{ij}(x)\, dx^i dx^j, \qquad L[\gamma] = \int_\gamma \sqrt{g_{ij}\, dx^i dx^j} \qquad (1.2)$$

Для плоскости перейдём от декартовых координат к радиусу и углу. Небольшое радиальное перемещение имеет длину, равную изменению радиуса. Небольшое угловое

перемещение при постоянном радиусе проходит по дуге, поэтому его длина пропорциональна и углу, и расстоянию до центра. Подстановка координатных преобразований в обычную теорему Пифагора даёт приведённую формулу. Коэффициент перед квадратом изменения угла зависит от положения, хотя плоскость остаётся плоской. Следовательно, зависимость компонентов метрики от координат сама по себе ещё не свидетельствует о кривизне. Нужны величины, смысл которых сохраняется при переходе к другой координатной сетке.

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \qquad d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 \qquad (1.3)$$

Физическая метрика требует более содержательного обоснования, чем аккуратная запись расстояний. Линейка может расширяться при нагреве, а время прохождения света зависит от среды. Поэтому геометрическое описание проверяется согласованием разных приборов и учётом их устройства. В общей теории относительности метрическое поле одновременно участвует в описании интервалов и гравитационного взаимодействия; свободное движение и показания идеальных часов связываются одной структурой. Именно эта связь превращает геометрию в физическую теорию, а не просто в язык чертежа. Новое описание пространства должно предложить сопоставимо ясное правило связи между математическими объектами и реальными наблюдениями. [1]

Различие между координатами, направлениями и длиной удобно проследить на двух геометрических примерах (рис. 2).

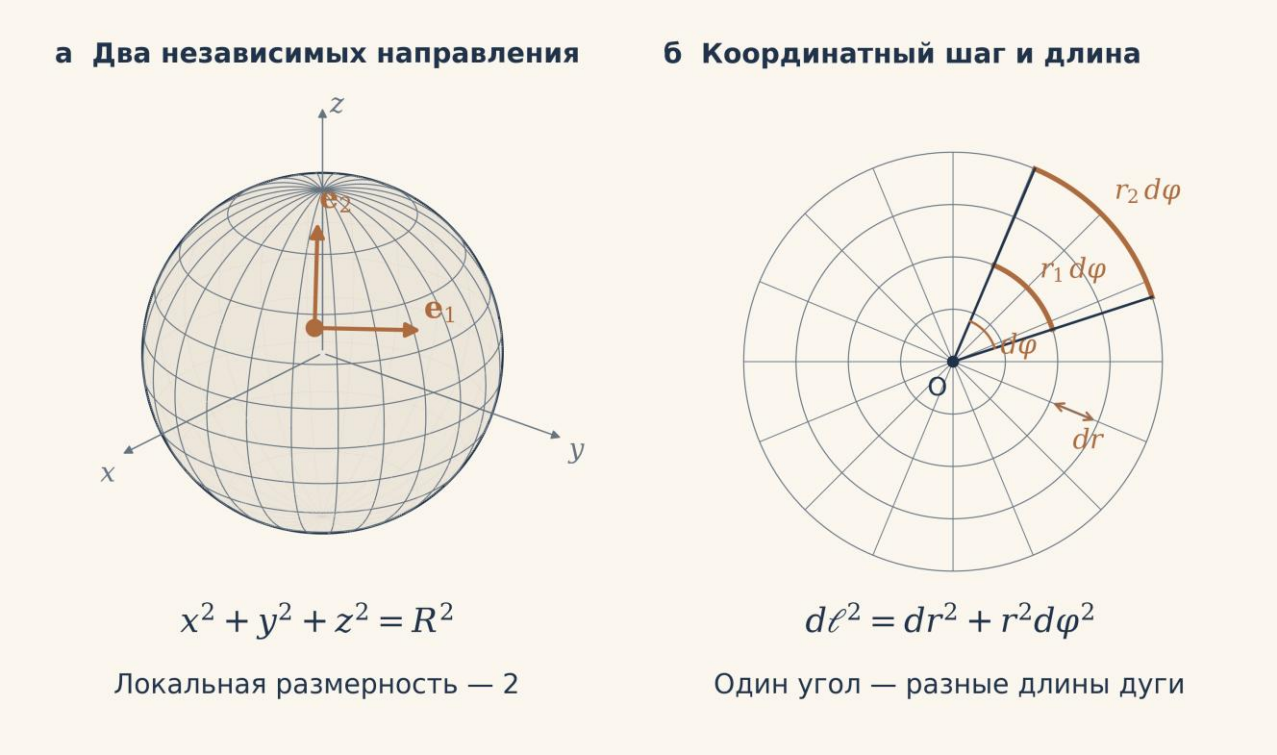


Рисунок 2. Число координат в записи не определяет внутреннюю размерность. Положение на сфере описывают тремя числами, но условие принадлежности поверхности оставляет два независимых касательных направления. Справа одинаковое изменение угла соответствует разным длинам дуги на разных радиусах. Полярная метрика переводит координатные приращения в физическую длину; особенность координат в начале не означает дефекта плоскости.

Кривизна обнаруживается изнутри

Жителю поверхности необязательно видеть её изгиб в окружающем пространстве. Он может построить окружность, отмеряя одинаковое кратчайшее расстояние от выбранного центра, и затем измерить её длину. На плоскости отношение длины к радиусу постоянно. На сфере радиуса R окружность геодезического радиуса r имеет другую длину. Здесь r измеряется вдоль поверхности от центра окружности, а не по прямой через объём шара. При достаточно малом r отличие невелико, поэтому локальная площадка выглядит почти плоской. С увеличением охваченной области отклонение накапливается и становится доступным внутреннему наблюдателю без какой-либо внешней точки зрения.

$$C(r) = 2\pi R \sin(r/R) = 2\pi r\left[1 - \frac{r^2}{6R^2} + O\left(\frac{r^4}{R^4}\right)\right] \qquad (1.4)$$

Разложение показывает, что первое относительное отличие от плоского результата пропорционально квадрату размера опыта. Это полезная подсказка для будущего прибора: менять масштаб измерительной фигуры может быть важнее, чем бесконечно повышать точность одного расстояния. При этом надо контролировать систематические изменения самого метода при увеличении размера. Если в опыте используются сигналы, увеличение пути может усилить влияние среды и имитировать геометрический эффект. Математическая формула задаёт ожидаемое масштабирование, но физическая интерпретация появляется только после сравнения альтернативных причин. Двумерность сферы во всём этом рассуждении сохраняется: изменяется её геометрия, а не число независимых малых перемещений.

Ещё один внутренний способ сравнения использует перенос направления вдоль замкнутого пути. На плоскости идеальный параллельный перенос возвращает стрелку с прежней ориентацией. На искривлённой поверхности результат может отличаться; для малого контура отклонение связано с кривизной охваченной области. В реальном пространстве аналогичный замысел требует указать, чем задаётся направление и какие внешние воздействия действуют на прибор. Вращение гироскопа, деформация опоры и геометрический перенос должны различаться в модели наблюдения. Смысл примера заключается в другом: кривизна проявляется в сравнении путей и замыкании операций. Измерение одного отрезка обычно сообщает значительно меньше, чем согласованная сеть измерений.

Для численного ориентира возьмём сферу радиуса 10 м и геодезическую окружность радиуса 1 м. Плоская формула даёт длину 6,283185 м, сферическая - 6,272719 м. Разность составляет 10,47 мм. Она мала по отношению к длине окружности, но вполне определённа. При уменьшении размера контура вдвое относительный эффект в первом приближении уменьшится в четыре раза.

$$K_{\mathrm{est}} = \frac{6}{r^2}\left(1 - \frac{C(r)}{2\pi r}\right), \qquad r/R \ll 1 \qquad (1.5)$$

Эта оценка гауссовой кривизны получается непосредственно из предыдущего разложения. В выбранном примере она равна 0,009995 м⁻² при точном значении $1/R^2 = 0{,}01$ м⁻². Разница

между ними - ошибка усечения ряда. Измерительная ошибка длины была бы другим вкладом и должна учитываться отдельно. Так формула превращается в опыт: заданы фигура, величина, масштаб ожидаемого отклонения и точность приближения.

Окружность и замкнутый перенос дают два независимых образа внутренней проверки кривизны (рис. 3).

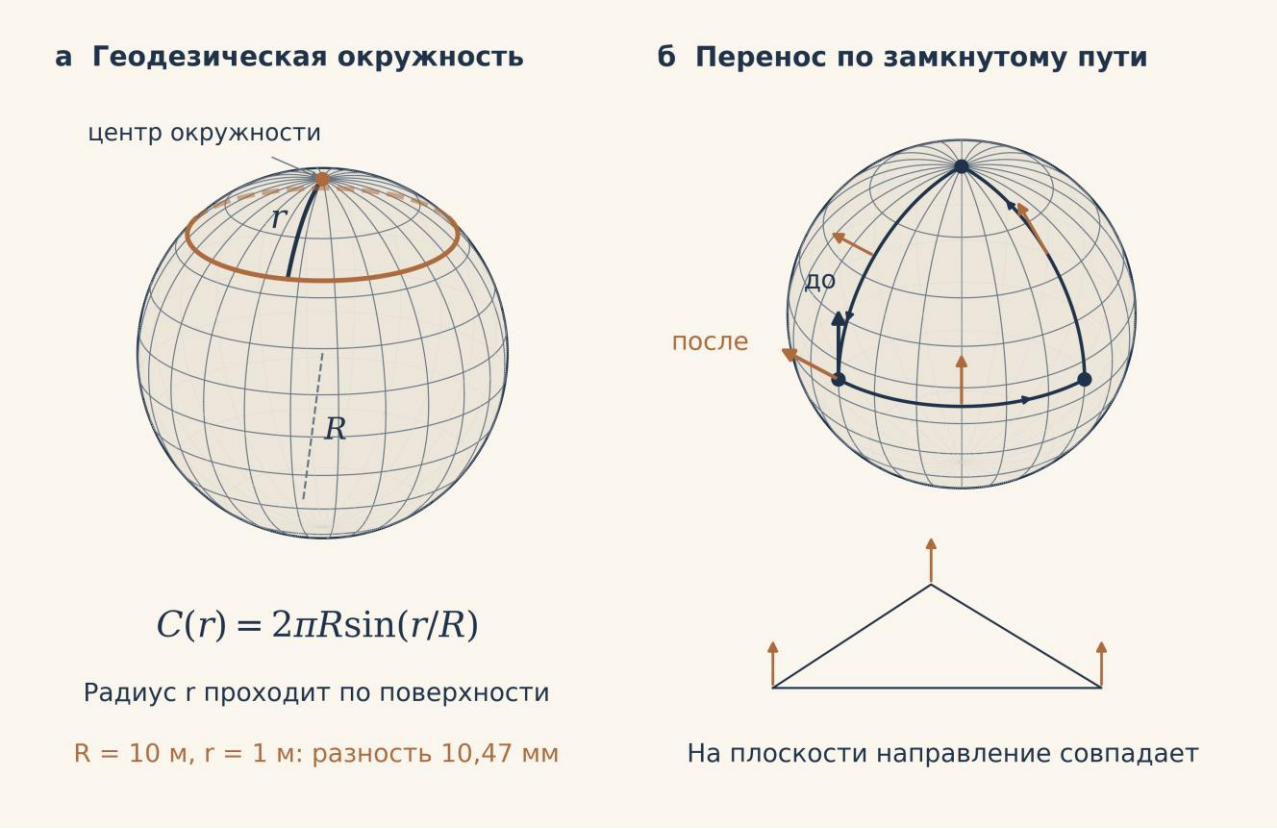


Рисунок 3. Два способа обнаружить кривизну, оставаясь на поверхности. Слева радиус r измеряется по геодезической, тогда как R относится к сфере целиком; изображение окружности увеличено для ясности и не выдерживает отношение радиусов численного примера. Справа стрелка параллельно переносится по трём дугам больших окружностей. На сфере её конечное направление отличается от начального, на плоскости замыкание контура сохраняет направление.

В пространстве-времени появится ещё одна тонкость. Ускоренные наблюдатели могут обнаружить различие хода часов даже в плоской геометрии. Поэтому градиент показаний часов и кривизна потребуют разных проверок. Полный пример ускоренной системы и приливного контроля будет разобран в главе 11.

Топология и предел локального опыта

Пространства могут иметь одинаковую локальную геометрию и различаться глобальным устройством. Лист можно свернуть в цилиндр, не растягивая его; небольшие фигуры на его поверхности сохранят плоскую геометрию. Однако путь вокруг цилиндра нельзя стянуть в точку, оставаясь на поверхности. Так проявляется различие топологии. Для этой цели не требуется изгиб как самостоятельная физическая причина: плоское пространство с

периодической координатой можно определить непосредственно через правило отождествления точек. Рисунок цилиндра лишь помогает воображению. Поэтому отсутствие заметной кривизны не исключает необычной глобальной связности и не определяет, конечно пространство или бесконечно.

Различие топологий требует наблюдений, охватывающих соответствующий масштаб. Если длина замкнутого направления значительно превышает доступную область, локальный эксперимент может не отличить его от незамкнутого. Это не недостаток исследователя, который обязательно исправляется более смелой гипотезой, а ограничение информации. Две математические модели способны одинаково описывать все имеющиеся данные. Тогда результат следует формулировать через область различимости: какие размеры или виды замыкания исключены и при каких предпосылках. Утверждение «границы не обнаружены» не равнозначно утверждению «пространство бесконечно». Аналогично невозможность увидеть край не доказывает существования внешнего пространства за предполагаемым краем.

Топология, метрика и размерность поэтому должны обсуждаться раздельно. Топология описывает соседство и способы глобального соединения, метрика задаёт длины, углы и интервалы, размерность характеризует число независимых локальных направлений или определённый закон масштабирования. Эти структуры взаимодействуют, но не подменяют друг друга. В исследовательском проекте полезно прямо записывать, какая из них меняется в гипотезе. Замкнутая координата, новая короткая связь между удалёнными участками и иной закон распространения волн ведут к различным математическим задачам. Если объединить их одним словом «пространство», можно получить красивое описание, которое не позволяет выбрать ни расчёт, ни прибор для проверки.

Сопоставление полосы и цилиндра отделяет глобальное замыкание от внутренней кривизны (рис. 4).

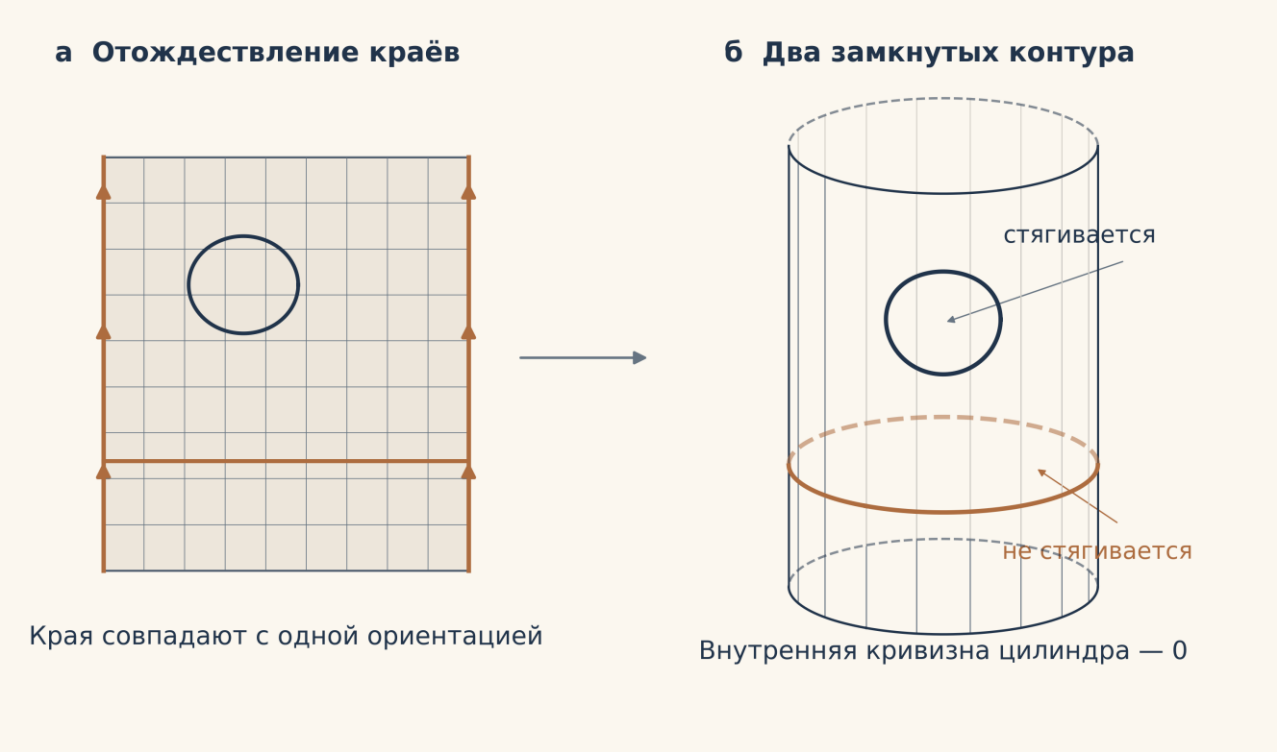


Рисунок 4. Противоположные края плоской полосы отождествляются с одинаковой ориентацией и образуют цилиндр. Небольшой замкнутый контур на его поверхности можно непрерывно стянуть в точку; контур, охватывающий замкнутое направление, стянуть нельзя. При этом внутренняя гауссова кривизна цилиндра равна нулю. Видимый изгиб служит способом изображения поверхности и не заменяет измерения её внутренней геометрии.

Почему время не является ещё одной пространственной осью

В релятивистском описании время и пространство входят в единую структуру событий, однако сохраняют различие в знаках интервала. Выберем соглашение, при котором временная часть имеет отрицательный знак. Для локального инерциального описания в плоском пространстве-времени интервал записывается через скорость света и приращения координат. Собственное время часов определяется вдоль их времеподобной траектории. Числовое объединение четырёх координат не превращает временное направление в обычную дорогу, по которой можно произвольно повернуть и вернуться. Сигнатура метрики организует световые конусы и допустимые причинные отношения между событиями; она составляет физическую часть модели, а не графическое оформление формулы.

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} \quad \text{для времеподобной траектории} \qquad (1.6)$$

Предложение ввести дополнительное время поэтому требует самостоятельной проверки. Необходимо задать начальные данные, правило эволюции и условия, при которых решение

определяется однозначно и устойчиво. Простое добавление ещё одного отрицательного члена к интервалу не гарантирует этих свойств. Такие модели можно математически исследовать, но их физическая состоятельность не следует из способности записать метрику. Тот же принцип относится к пространствам переменной размерности: сначала следует выяснить, что именно меняется, как переход влияет на состояния полей и каким образом сравниваются наблюдения по обе стороны перехода. Без этих уточнений формула остаётся обозначением задачи, которую ещё предстоит решить.

Световой конус наглядно связывает знак интервала с допустимой траекторией часов (рис. 5).

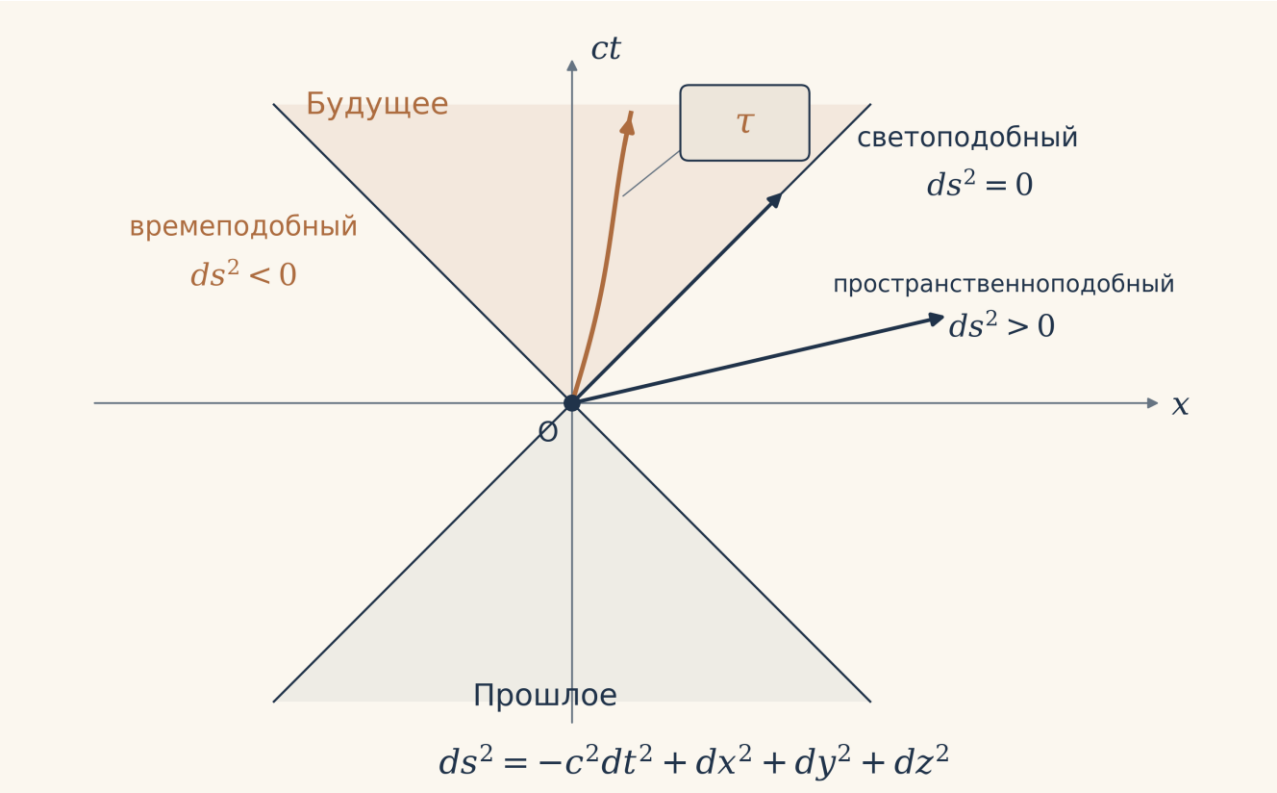


Рисунок 5. Проекция пространства-времени на одну пространственную координату и ct. Световые направления образуют границу будущего и прошлого; времеподобная мировая линия проходит внутри конуса и допускает показания собственных часов. Пространственноподобное направление лежит за пределами конуса. Знаки интервалов соответствуют принятой в тексте сигнатуре (−,+,+,+). Схема показывает классификацию интервалов, а не измеренную траекторию прибора.

Пространственное описание теперь связано с проверяемыми отношениями: расстояниями, спектрами, временем передачи и замыканием операций. Необычный результат должен указывать, какое из этих отношений изменилось. Следующая глава вводит разные способы оценки размерности и показывает, почему один объект может получать разные численные показатели в зависимости от выбранного измерения.

Глава 2
Как измеряется размерность

Объём как ответ на увеличение масштаба

Самый наглядный способ оценить размерность начинается с растущей области. Вдоль прямой длина отрезка увеличивается пропорционально его радиусу, на плоскости площадь диска растёт как квадрат радиуса, а в обычном трёхмерном пространстве объём шара - как куб. Общий смысл один: насколько быстро прибывают доступные положения, когда разрешённое расстояние увеличивается. Для эксперимента требуется определить расстояние, центр области и способ измерения её объёма. Если вместо объёма подсчитываются частицы или датчики, дополнительно понадобится модель плотности их распределения. Иначе неоднородное заселение пространства легко принять за необычную размерность самого пространства.

$$d_V(\ell) = \frac{d\ln[V(\ell)/V_0]}{d\ln(\ell/\ell_0)}, \qquad V(\ell) = A\ell^D \Rightarrow d_V = D \qquad (2.1)$$

Опорные величины в логарифмах нужны, чтобы их аргументы были безразмерными; после дифференцирования постоянные исчезают. Обозначение dV здесь означает операционную объёмную размерность на выбранном масштабе. Оно не является автоматическим синонимом строгой хаусдорфовой размерности. Последняя определяется через покрытия множества сколь угодно малыми областями и соответствующий предел. На достаточно регулярном пространстве с подходящей мерой оба подхода могут согласоваться. Однако реальный прибор работает на конечном диапазоне, а производная характеризует именно этот диапазон. Поэтому число 2,7, полученное по нескольким масштабам, сначала следует прочитать как измеренный показатель роста и лишь затем выяснять его геометрический статус.

Определение объёмной размерности начинается с простых законов роста меры (рис. 6).

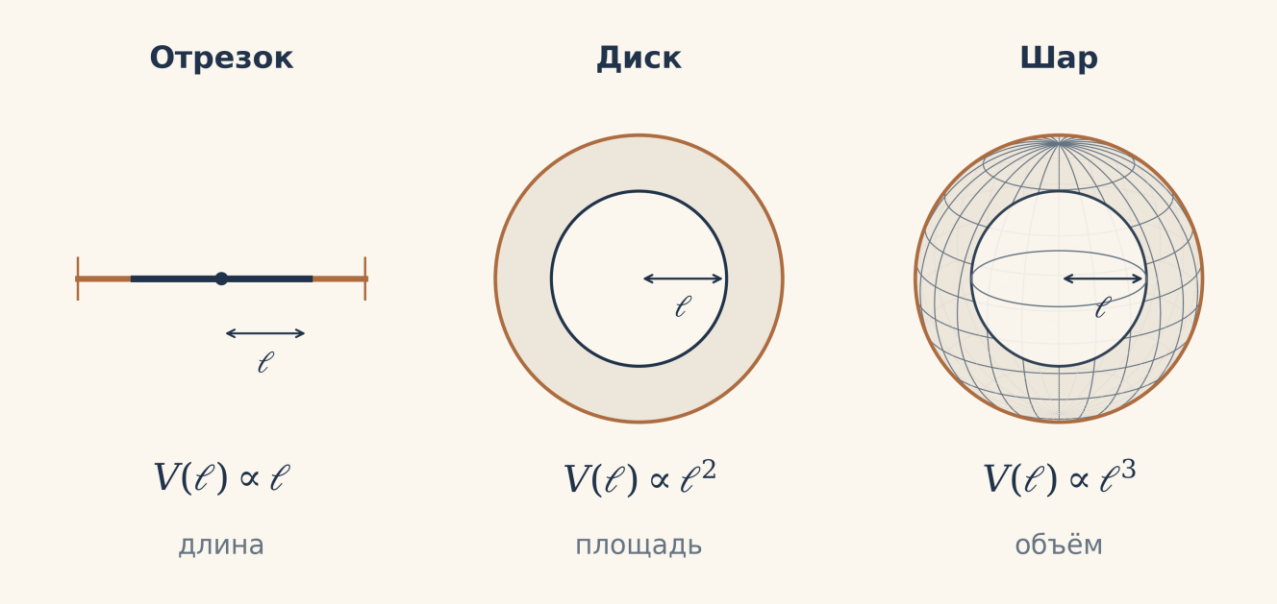


Рисунок 6. Эталонные евклидовы области при увеличении характерного радиуса: отрезок, диск и шар. Их меры растут соответственно как первая, вторая и третья степени масштаба. Меньшая область выделена тёмным контуром, большая - медным. Эти математические примеры поясняют определение объёмного показателя; они не являются наблюдением размерности реального пространства или результатом конкретного эксперимента.

Даже гладкая сфера позволяет получить показатель, который зависит от радиуса области. Площадь геодезического диска вычисляется по формуле ниже. При малом радиусе она почти равна площади плоского круга, а при охвате всей сферы перестаёт расти. Если применить логарифмическую производную без проверки диапазона, показатель начнёт уменьшаться. Поверхность при этом не превращается в линию: уменьшается возможность расширять диск на конечном объекте. Пример показывает, почему отклонение от целого числа недостаточно для открытия дробной геометрии. Необходимо отдельно оценить вклад кривизны, конечного размера и правил выбора области.

$$A(r) = 2\pi R^2[1 - \cos(r/R)], \qquad 0 < r < \pi R \qquad (2.2)$$

$$d_V(r) = \frac{r}{R}\cot\left(\frac{r}{2R}\right) \qquad (2.3)$$

Дифференцирование площади даёт последнее равенство. При r/R → 0 показатель стремится к двум, а при охвате всей сферы - к нулю. На рисунке 7 обе зависимости показаны вместе: площадь насыщается, поэтому её логарифмический наклон уменьшается. Число локальных направлений поверхности остаётся равным двум во всём примере.

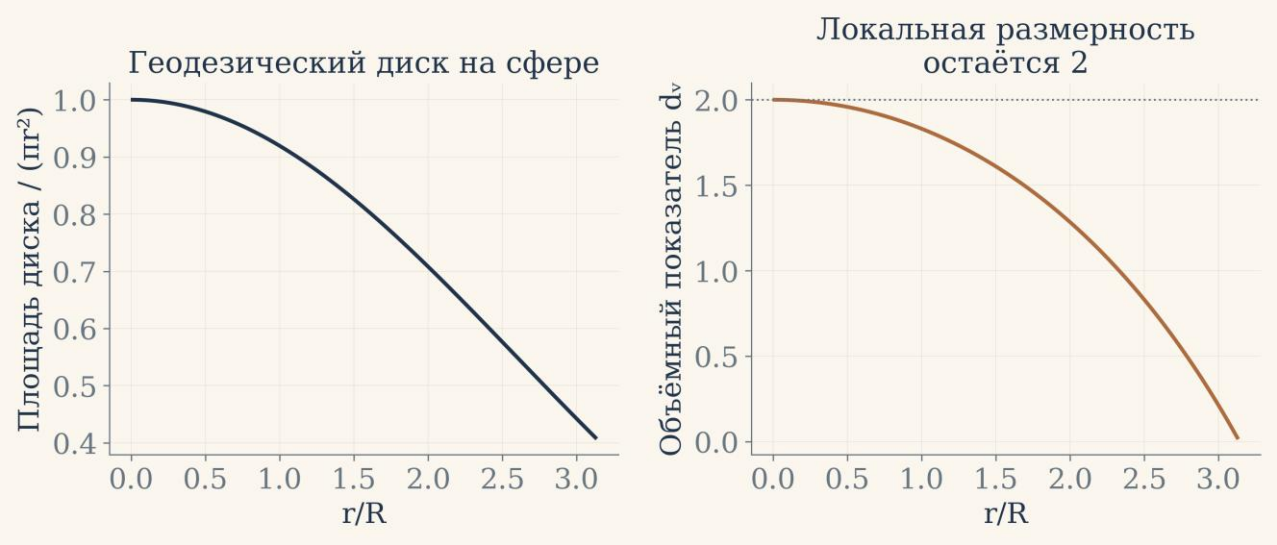


Рисунок 7. Геодезические диски на гладкой сфере. Слева площадь отнесена к площади плоского круга того же геодезического радиуса, справа вычислен её логарифмический наклон. Изменение показателя вызвано кривизной и конечным размером. Это точный геометрический пример, а не регистрация изменения размерности физического пространства.

Возврат как способ исследовать доступность пространства

Второй метод исследует распространение начального возмущения. Возьмём обычную диффузию на бесконечном плоском пространстве и сначала включим коэффициент диффузии в параметр σ. Тогда σ имеет размерность площади, а уравнение описывается лапласианом, взятым по пространственным координатам. Начальное распределение сосредоточено в одной точке. Решение имеет гауссов вид, и его ширина растёт с квадратным корнем из σ. Важно, что σ пока служит параметром математического процесса. Чтобы назвать его лабораторным временем, нужно указать конкретный механизм распространения и вернуть соответствующий коэффициент диффузии. В квантовой геометрии такая физическая интерпретация часто вообще отсутствует.

$$\partial_\sigma K = \nabla^2 K, \qquad K(x, x_0; \sigma) = \frac{\exp\left[-|x - x_0|^2/(4\sigma)\right]}{(4\pi\sigma)^{D/2}} \qquad (2.4)$$

На исходной точке экспонента равна единице, поэтому остаётся простая степень параметра диффузии. В непрерывном пространстве речь идёт о плотности вероятности возврата, поскольку вероятность попасть точно в отдельную математическую точку обычно равна нулю. Прибор вместо точки использует небольшой приёмный объём, а расчёт должен учитывать его размер. Спектральная размерность извлекается из скорости убывания этой плотности. Подстановка гауссова решения сразу возвращает обычную размерность D. Именно эта проверка делает определение содержательным: оно воспроизводит знакомый результат там, где геометрия и закон распространения заранее известны, а затем может быть перенесено на более сложные операторы.

$$P(\sigma) = K(x_0, x_0; \sigma), \qquad d_s(\sigma) = -2\frac{d\ln[P(\sigma)/P_0]}{d\ln(\sigma/\sigma_0)} \qquad (2.5)$$

В неоднородном пространстве возврат может зависеть от начальной точки. Тогда надо явно выбрать локальное измерение или усреднение по объёму. Для компактной области средний тепловой след определяется суммой вкладов всех собственных мод оператора распространения. Если оператор не является генератором вероятностного процесса, название «вероятность возврата» становится лишь аналогией: спектральную размерность всё ещё можно определять по положительному следу, но отдельное ядро может не иметь вероятностного смысла. Различие особенно существенно при высших пространственных производных. Достоверная интерпретация начинается с указания оператора и его свойств, а не с одного численного значения показателя.

Скорость блуждания и связь между определениями

Вероятность возврата сообщает, насколько быстро возмущение покидает исходную область, но сама по себе не показывает, как далеко оно распространяется. Для этого измеряется средний квадрат расстояния от начала. При независимых симметричных шагах смешанные произведения исчезают после усреднения, а средние квадраты отдельных шагов складываются. Поэтому результат пропорционален числу шагов. В непрерывном гауссовом примере интегрирование даёт средний квадрат расстояния, равный произведению 2D и параметра σ. Это нормальная диффузия. Если средний квадрат растёт иначе, необходимо определить показатель движения отдельно, а затем сравнить его с показателем возврата.

$$\langle r^2(\sigma)\rangle = 2D\sigma, \qquad d_w = 2\left[\frac{d\ln\langle r^2\rangle}{d\ln\sigma}\right]^{-1} \qquad (2.6)$$

Показатель dw называют размерностью блуждания. При обычной диффузии он равен двум. Если распространяющееся облако задерживается в ловушках, его характерный радиус может увеличиваться медленнее, и показатель возрастает. Но подобное поведение не требует изменения числа геометрических направлений: достаточно изменить динамику. Баллистическое движение, напротив, имеет другой закон роста, и переносить на него диффузионную интерпретацию следует с осторожностью. Кроме того, средний квадрат может быть плохо определён при тяжёлых хвостах распределения. В таком случае приходится выбирать другую устойчивую меру ширины и заново устанавливать связь между этой мерой и геометрическим выводом.

Рисунок 8 сопоставляет возврат к источнику и дальность распространения.

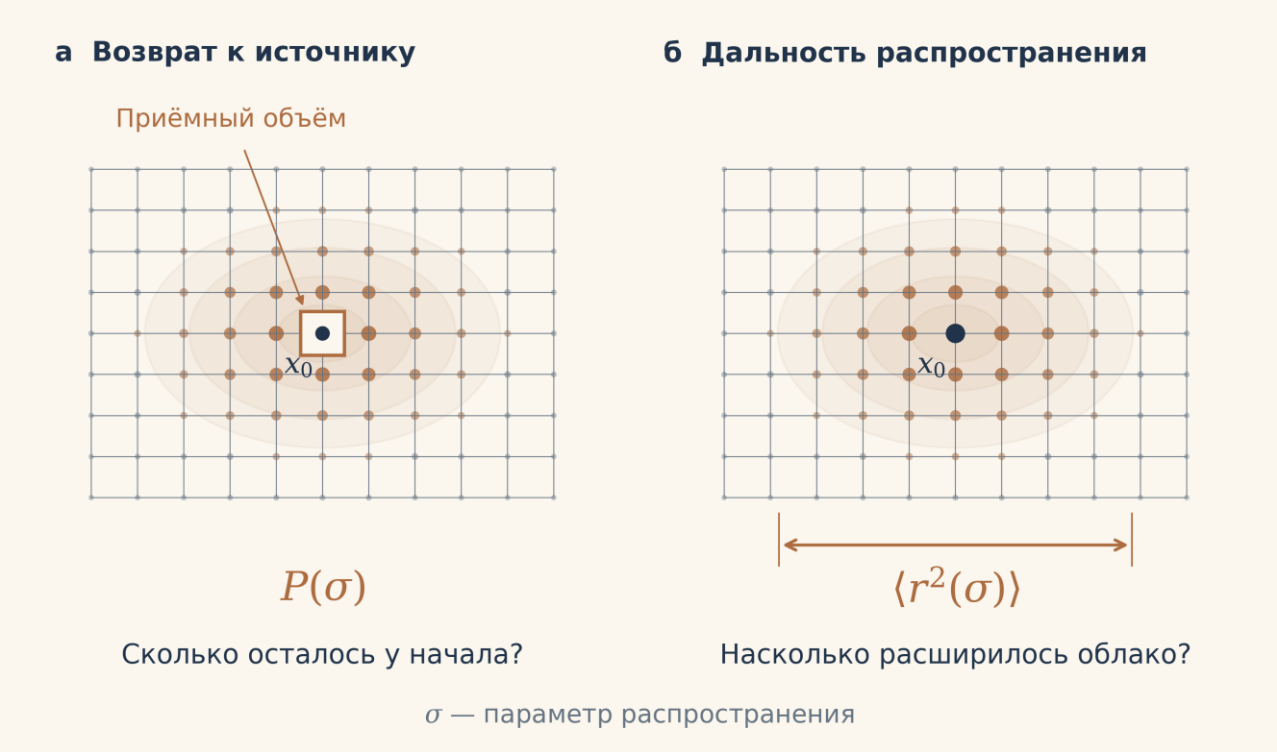


Рисунок 8. Одно распространяющееся возмущение допускает разные протоколы чтения. Слева небольшой приёмный объём возле источника выделяет возврат; справа пространственное распределение характеризует ширину облака. Сетка и интенсивность изображены качественно, без экспериментальных отсчётов и численной шкалы. Параметр σ относится к модели распространения; его перевод в лабораторное время требует заданного коэффициента переноса и калибровки.

Связь трёх показателей можно вывести при дополнительных предпосылках. Пусть характерный радиус растёт как степень σ, объём доступной области - как степень радиуса, а распределение достаточно однородно, чтобы возврат был обратно пропорционален этому объёму. Последовательная подстановка даёт приведённое соотношение. Оно полезно как проверка согласованности, но не является тождеством для любой среды. Неоднородность, несколько масштабов, ловушки и различный выбор меры нарушают исходные предпосылки. Поэтому ненулевой остаток в правой формуле сначала означает несостоятельность выбранного совместного описания. Переход к утверждению о новой физике требует исключить более обычные причины расхождения.

$$r \sim \sigma^{1/d_w}, \quad V(r) \sim r^{d_V}, \quad P \sim V^{-1} \Rightarrow d_s = \frac{2d_V}{d_w}, \qquad \Delta = d_s d_w - 2d_V \qquad (2.7)$$

Спектр колебаний как другая запись той же информации

Измерение возврата не обязательно проводить посредством реального случайного блуждания. Если известны собственные значения положительного оператора L, тепловой след можно построить непосредственно. Каждая мода вносит экспоненциальный вклад, а

параметр σ определяет, какие масштабы спектра заметны. Большие собственные значения быстро подавляются при увеличении σ. Для лапласиана их размерность соответствует обратному квадрату длины. Нормировка на объём делает результат сопоставимым для областей разного размера. В лаборатории собственные значения могут восстанавливаться по резонансным частотам, но только после установления дисперсионного закона: частота и собственное значение пространственного оператора не являются одним и тем же объектом.

$$L\psi_n = \lambda_n \psi_n, \qquad P(\sigma) = \frac{1}{V}\sum_n e^{-\sigma\,\lambda_n} \qquad (2.8)$$

Для гладкой области и обычного лапласиана число мод ниже большого порога связано с объёмом и размерностью. Это содержание закона Вейля; форма границы влияет на последующие поправки, а главный член задаёт степенной рост. В приведённой записи ωD означает объём единичного D-мерного шара, а Λ - порог собственных значений. Формула даёт важный переход от геометрии к спектроскопии: размерность отражается в том, насколько быстро добавляются новые моды при расширении частотного диапазона. Но применимость главного члена требует достаточного диапазона, подходящих граничных условий и отделения дополнительных внутренних степеней свободы измеряемого поля. [2]

$$N(\Lambda) \sim \frac{V\,\omega_D}{(2\pi)^D}\,\Lambda^{D/2} \qquad (2.9)$$

Здесь возникает тонкость, важная для будущего экспериментального проекта. Спектральная плотность и тепловой след, вычисленный из того же набора мод, не являются двумя полностью независимыми подтверждениями. Это два представления одной информации. Их согласие полезно для проверки вычислений, но не устраняет общую ошибку в определении оператора. Независимость усиливается, если спектроскопия сопоставляется с прямым распространением импульса или с геометрическим измерением объёма. Если же обе процедуры используют одну калибровку частоты и одну предположенную дисперсию, их ошибки могут совпасть. Убедительный результат зависит от структуры зависимостей между данными, а не от количества построенных графиков.

Три узла от схемы до измерения

Прежде чем переходить к большой сети, полезно полностью разобрать маленькую. Пусть три одинаковых накопителя обозначены числами 0, 1 и 2. Первый соединён со вторым, второй с третьим. Интенсивность переноса по каждому ребру равна $r_0 = 1$ с$^{-1}$. Если значения в соседних узлах одинаковы, переноса между ними нет; если различаются, поток пропорционален разности.

$$\dot{x}_0 = -r_0(x_0 - x_1), \quad \dot{x}_1 = -r_0(2x_1 - x_0 - x_2), \quad \dot{x}_2 = -r_0(x_2 - x_1) \qquad (2.10)$$

Эти три уравнения удобно записать одной строкой $\dot{x} = -Lx$. Матрица L содержит на диагонали сумму интенсивностей связей данного узла, а вне диагонали - интенсивность связи со знаком минус. У каждой строки сумма равна нулю: равномерное состояние не меняется. Матрица здесь просто хранит уже записанные правила переноса.

$$L_A = r_0 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.11)$$

Если в начальный момент единица внесена только в узел j, состояние через время t даёт столбец j матрицы K(t) = exp(−Lt). Элемент K_{ij} отвечает на конкретный вопрос: какая доля начального возмущения достигла узла i? Усреднение трёх диагональных элементов даёт средний возврат P(t). Это уже иной протокол, требующий доступа ко всем трём начальным состояниям и соответствующим выходам.

Вторая удобная форма данных - экспоненциально взвешенная сумма временного отклика. Положительный параметр s имеет единицы обратного времени. Сильнее подавляя поздние отсчёты, можно менять чувствительность к быстрым и медленным процессам.

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, K(t)\, dt = (sI + L)^{-1}, \qquad s > 0 \qquad (2.12)$$

$$G_A(r_0) = \frac{1}{8r_0} \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

Результат проверяется обычным умножением: $(r_0 I + L_a)G_a(r_0) = I$. Средний столбец соответствует возбуждению узла 1. Взвешенный отклик в самом узле равен 0,5 с, в каждом крайнем - 0,25 с. Обратная матрица теперь имеет измерительный смысл, а каждый её элемент связан с определённой парой входа и выхода.

Полезно на этом месте остановиться и восстановить одну строку L из схемы, а затем прочитать один столбец G как результат опыта. Для дальнейших глав важнее это соответствие, чем навык обращения больших матриц вручную.

Одна подготовка центрального узла позволяет буквально прочитать средний столбец матрицы отклика (рис. 9).

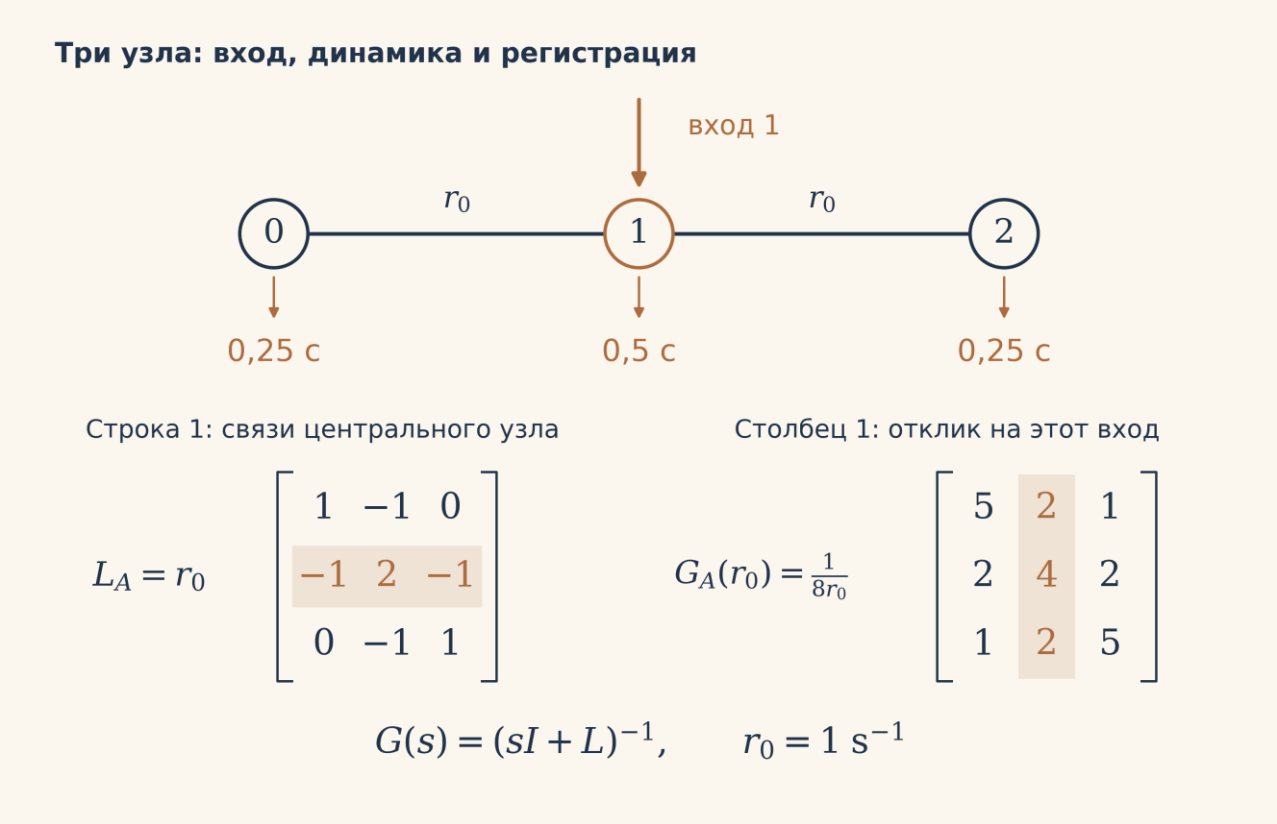


Рисунок 9. Цепь с одинаковыми интенсивностями $r_0 = 1\ с^{-1}$ связывает физическую подготовку с матрицами модели. Средняя строка L_a кодирует обе связи узла 1; средний столбец $G_a(r_0)$ задаёт экспоненциально взвешенные отклики при возбуждении этого узла. Получаются 0,25 с, 0,5 с и 0,25 с. Медный цвет выделяет выбранный канал и его запись в матрице, а не дополнительную связь сети.

Одинаковая размерность у разных сетей

Изменим устройство той же тройки. Связи 0-1 и 1-2 ослабим до $r_0/3$, а между узлами 0 и 2 добавим связь $4r_0/3$. Получится треугольник B. В цепи A прямой переход 0-2 отсутствовал. Число рёбер и их веса различаются, поэтому это два разных устройства с заранее закреплёнными номерами узлов.

$$L_B = \frac{r_0}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{spec} L_A = \operatorname{spec} L_B = \{0, r_0, 3r_0\} \tag{2.14}$$

Собственные значения обеих матриц совпадают. Следовательно, совпадают тепловой след и любая размерность, вычисленная только из него. Это равенство действует при всех положительных t, поэтому расширение полосы или повышение точности измерения одного лишь следа не устраняет неоднозначность.

$$P_A(t) = P_B(t) = \frac{1 + e^{-r_0 t} + e^{-3r_0 t}}{3} \tag{2.15}$$

$$d_s(t) = \frac{2r_0 t\left[e^{-r_0 t} + 3e^{-3r_0 t}\right]}{1 + e^{-r_0 t} + e^{-3r_0 t}} \qquad (2.16)$$

Общий спектр ничего не говорит о том, как соответствующие собственные векторы распределены по закреплённым узлам. Именно здесь сохраняется различающая информация. Если возбудить центральный узел 1 и измерить его собственный отклик, две сети дают разные функции:

$$K_{11}^{A}(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-3r_0 t}, \qquad K_{11}^{B}(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}e^{-r_0 t} \qquad (2.17)$$

Наблюдаемая величина	Цепь A	Треугольник B
Средний возврат P при t = 1 с	0,472556	0,472556
Спектральный показатель d_s при t = 1 с	0,729707	0,729707
Локальный возврат K_{11} при t = 1 с	0,366525	0,578586
Лапласовский отклик G_{11} при s = 1 $с^{-1}$	0,500000 с	0,666667 с

Рисунок 10 показывает одинаковый спектральный показатель и различающий локальный опыт. Пусть независимо установленная абсолютная ошибка измерения $K_{11}(1\text{ с})$ не превышает 0,02. Для A допустим интервал примерно 0,347-0,387, для B - 0,559-0,599. Они не пересекаются. В данном классе из двух заданных моделей одного такого дополнительного наблюдения достаточно. При ошибке порядка половины различия, около 0,106, интервалы начинают соприкасаться.

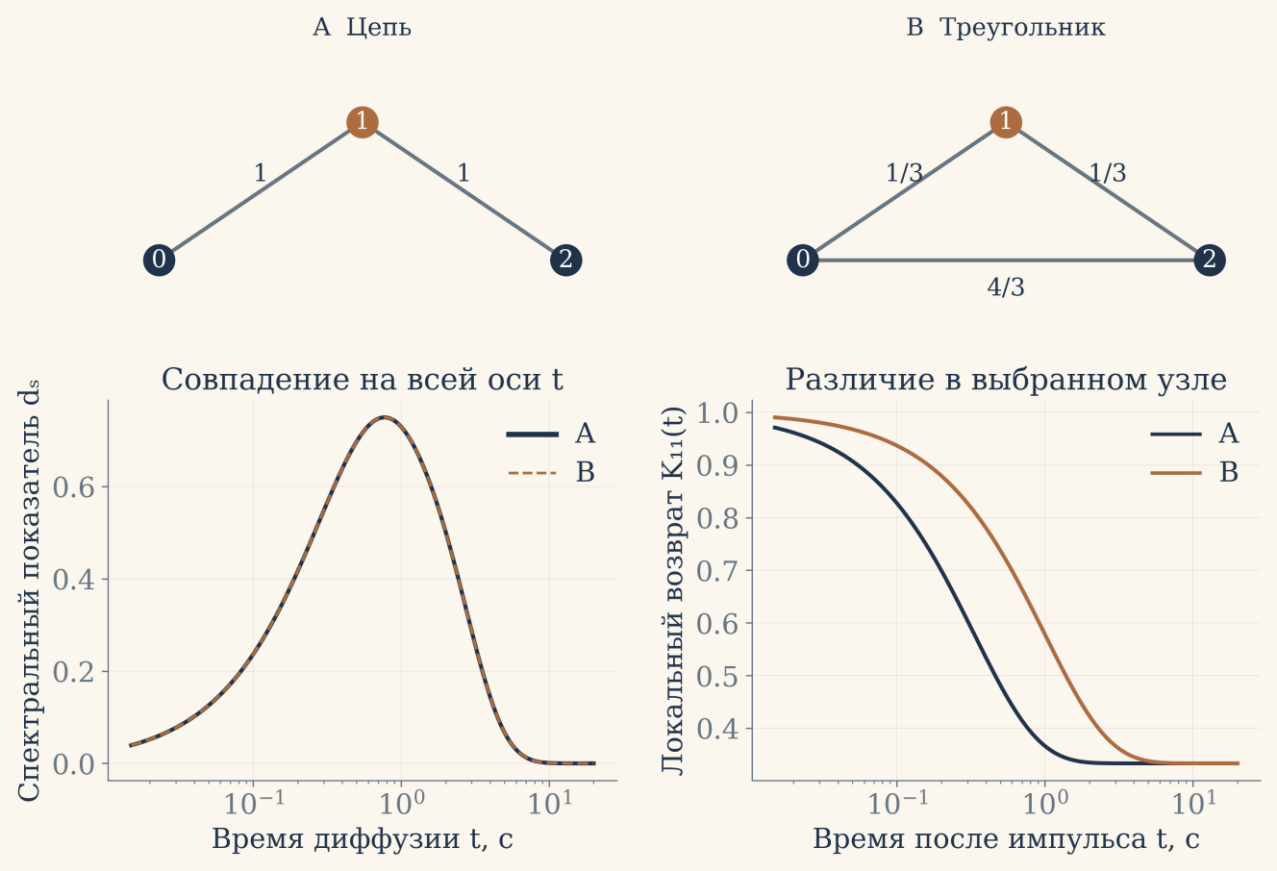


Рисунок 10. Две разные сети с одинаковыми собственными значениями 0, 1 и 3 c^{-1}. Показатель d_s совпадает на всей временной оси; нижняя левая панель показывает совпадение кривых на конечном диапазоне 0,015-20 с. Локальный импульсный отклик в узле 1 различается. Веса на схемах выражены в единицах $r_0 = 1\ c^{-1}$. Все линии вычислены по заданным матрицам.

Этот результат имеет точную границу. Он различает два названных устройства при известных узлах, интенсивностях и ограничении ошибки. Произвольная неизвестная сеть остаётся значительно более трудной обратной задачей. Однако уже здесь видно, какую информацию теряет усреднение и почему дополнительная проверка должна обращаться к данным, которых в первом показателе действительно нет. Скрипт foundations.py воспроизводит матрицы, таблицу и рисунок.

Как конечная установка создаёт ложное изменение размерности

Рассмотрим конечную связанную сеть из N узлов с симметричным комбинаторным графовым лапласианом. При очень малом параметре σ экспоненты почти равны единице, и нормированный след приближается к единице. Его логарифмический наклон стремится к нулю. При очень большом σ остаётся только нулевая мода, соответствующая равномерному распределению; след приближается к обратному числу узлов, а наклон снова стремится к нулю. Между этими пределами может существовать участок, на котором проявляется геометрия сети. Поэтому две области малой спектральной размерности возникают даже в совершенно обычной конечной дискретизации пространства. Они не являются свидетельством фундаментального исчезновения измерений.

$$P_N(\sigma) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\sigma\lambda_n}, \quad \lambda_0 = 0; \qquad P_N(0) = 1, \quad P_N(\infty) = \frac{1}{N} \qquad (2.18)$$

Нижняя граница полезного диапазона задаётся дискретностью или разрешением прибора, верхняя - размером системы, границами и временем достижения равновесия. Эти границы необходимо изменять независимо от предполагаемого физического масштаба. Например, увеличение числа узлов при сохранении шага должно отодвигать эффект общего размера, тогда как уменьшение шага при сохранении физического объёма меняет влияние дискретизации. Если интересующий переход перемещается вместе с техническим параметром, его физическая интерпретация ослабевает. Именно поэтому серия установок или численных сеток разных размеров часто информативнее, чем одна установка с более гладкой кривой. Устойчивость результата должна проверяться по смыслу масштаба, а не только по внешнему сходству графиков.

Логарифмическая производная также усиливает шум. Соседние значения размерности, полученные из одной сглаженной кривой, обычно коррелированы и не представляют независимые наблюдения. Излишнее сглаживание способно создать плато, а недостаточное - множество ложных переходов. Надёжнее одновременно подгонять исходные величины в нескольких разумных моделях, оценивать устойчивость к ширине окна и сохранять сведения о ковариациях ошибок. Для дискретного блуждания добавляются эффекты чётности: некоторые сети допускают возврат только через чётное число шагов. Непрерывный параметр распространения помогает убрать такую техническую структуру, но не заменяет анализа других систематических влияний.

Полезный диапазон масштаба лежит между двумя ограничениями конечного стенда (рис. 11).

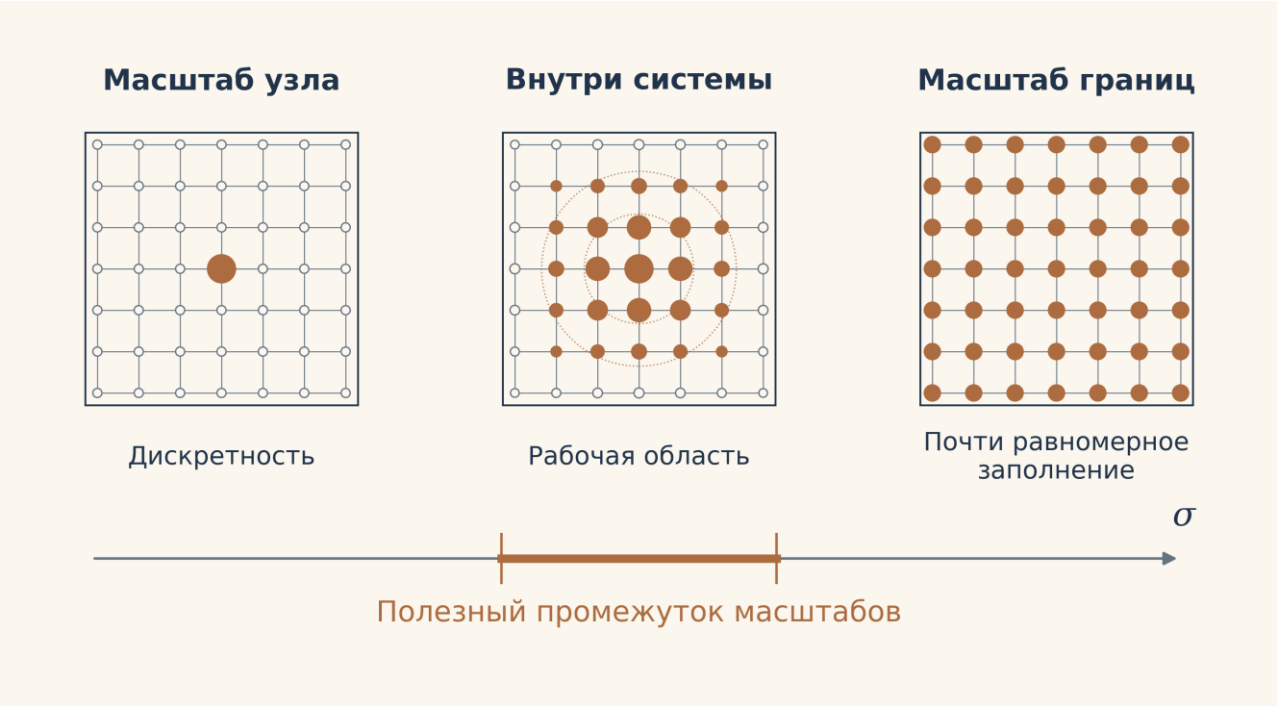


Рисунок 11. Три качественных режима одной конечной сети: влияние отдельного узла, распространение внутри системы и почти равномерное заполнение после достижения границ. Ни размерность, ни границы полезного окна численно здесь не оценены. Выделенная область между крайними режимами напоминает, что поиск масштабирования требует одновременно учитывать дискретность установки, её конечный размер и точность восстановления исходного сигнала.

Паспорт измерения вместо одного красивого числа

Полный результат оценки размерности должен содержать больше, чем центральное значение и погрешность. Необходимо указать объект, выбранную меру объёма, оператор распространения, используемые расстояния и диапазон масштабов. Затем перечисляются предпосылки, связывающие непосредственно измеренные величины с геометрическим выводом. Например, спектр резонатора становится сведением о пространстве только при известном законе распространения внутри него. При наличии среды результат в первую очередь характеризует совместную систему «геометрия и среда». Это не обесценивает измерение. Напротив, точное описание объекта позволяет сравнить его с другой установкой и увидеть, действительно ли обнаруженный показатель относится к общему свойству пространства.

Для совместного анализа объёмной и спектральной размерностей особенно важно согласовать масштаб. Параметр диффузии не равен радиусу области; их связь выводится из измеренного закона распространения. Если заранее предположить нормальную диффузию в системе с аномальной динамикой, сравнение показателей будет смещено уже на этапе построения горизонтальной оси. Необходимо также проверять анизотропию. Один и тот же средний показатель может скрывать быстрый перенос в одном направлении и медленный в

другом. Поэтому до усреднения полезно исследовать отклик по направлениям и выяснить, не складывается ли наблюдаемый эффект из нескольких обычных, но неодинаковых каналов.

Таким образом, размерность становится результатом определённого вопроса к системе. Объёмный метод спрашивает, сколько доступного пространства появляется при увеличении радиуса; спектральный - как устроены моды выбранного оператора; метод блуждания - как быстро распространяется возмущение. В привычном режиме ответы согласуются и позволяют говорить одним числом. На границе применимости этого режима они могут разойтись. Именно расхождение представляет интерес для исследования, если сохраняется после технических проверок. Но оно ещё не указывает единственную новую теорию. Следующий шаг состоит в изучении существующих механизмов, которые уже приводят к такому поведению, чтобы отделить неизвестный эффект от известного математического сценария.

Глава 3
Когда размерность зависит от масштаба

Переход от числа к функции

Эту главу можно читать двумя способами. Основной маршрут проходит через вопрос первого раздела и сравнительный вывод последнего. Промежуточные разделы объясняют, как масштабная зависимость возникает в разных теориях; они требуют более специальной подготовки и служат картой предпосылок для расчётного чтения.

Если размерность определяется законом масштабирования, естественно спросить, сохраняется ли этот закон при изменении разрешения. Ответ не обязан быть положительным. Длинная узкая область может выглядеть одномерной для процесса, который не различает её поперечную структуру, и многомерной для более коротких волн. Даже такой обычный пример показывает, что переход между показателями сам по себе ещё не требует квантовой гравитации. Более радикальная возможность состоит в том, что характерное масштабирование меняется у самой фундаментальной геометрии или её динамики. Именно эту возможность обсуждают под названием течения размерности. Термин обозначает зависимость от масштаба исследования, а не обязательное изменение мира с календарным временем.

Для первичного анализа удобно записать плавную интерполяцию между двумя предельными значениями. В следующей формуле dIR обозначает показатель на больших длинах, dUV - на малых, ℓ* задаёт характерный переход, а положительный параметр p определяет его резкость. Такая запись является параметризацией возможных данных. Она не содержит механизма, который заставляет природу выбирать именно эту функцию. Из неё можно рассчитать кривую, оценить параметры и сравнить точность подгонки, но нельзя вывести квантовую теорию пространства. Различие между формулой для описания наблюдения и законом, полученным из физических предпосылок, необходимо сохранять на всём протяжении исследовательской работы.

$$d(\ell) = d_{\mathrm{IR}} + \frac{d_{\mathrm{UV}} - d_{\mathrm{IR}}}{1 + (\ell/\ell_*)^p}, \qquad p > 0 \qquad (3.1)$$

Полезность интерполяции проявляется в постановке проверяемых вопросов. Существует ли переходный масштаб в доступном диапазоне? Совпадает ли он у разных наблюдаемых? Требуют ли данные монотонного перехода, нескольких ступеней или осцилляций? Следует заранее определить конкурирующие объяснения, поскольку достаточно гибкая функция способна описать шум и технические особенности установки. Если параметр ℓ* постоянно перемещается при изменении окна анализа, доказательств устойчивого масштаба мало. Если же независимые процедуры дают совместимые значения, появляется основание для более глубокой модели. Следующие примеры показывают, что похожие графики размерности могут

возникать из существенно разных предпосылок, и потому одного внешнего сходства недостаточно.

Геометрии, собранные из простых элементов

В подходе причинных динамических триангуляций геометрия исследуется через ансамбль дискретных построений из симплексов с заданными правилами причинной организации. В работе Амбьёрна, Юркевича и Лолл спектральная размерность такого квантового ансамбля была вычислена по диффузионной процедуре. На больших исследованных масштабах она оказалась совместима с четырьмя, а на коротких - приблизительно с двумя. Это важный результат внутри конкретного определения квантовой гравитации. Численное «измерение» здесь означает измерение свойства сгенерированных геометрий, а не регистрацию сигнала физическим детектором в окружающем пространстве. Подмена этих двух смыслов создавала бы неоправданное впечатление уже состоявшегося открытия. [3]

Ценность такого вычисления можно понять без обещания немедленного эксперимента. Оно показывает, что правила суммирования геометрий способны порождать крупномасштабное поведение, отличающееся от поведения отдельных строительных элементов. Но затем возникает вопрос непрерывного предела. Если размер элемента уменьшается, а число элементов увеличивается, сохраняется ли интересующая структура после корректного изменения параметров? Без этой проверки результат может характеризовать выбранную дискретизацию. Аналогия с фотографией здесь уместна: увеличение числа пикселей должно прояснять изображение, а не менять объект произвольным образом. В квантовой геометрии задача сложнее, потому что вместе с детализацией меняются веса целых конфигураций.

Другая трудность связана с физическим масштабом оси графика. Число шагов диффузии внутри модели нельзя без дополнительного расчёта заменить метрами или энергией прибора. Необходимо сопоставить внутренние параметры с наблюдаемыми величинами, определить характерную длину и проверить зависимость от конкретного зонда. Даже когда математический предел хорошо контролируется, связь с экспериментом остаётся отдельной работой. Поэтому корректный вывод из численного течения размерности имеет условную форму: если исследуемая конструкция описывает микроскопическую геометрию мира и если выбранный зонд связан с реальным наблюдаемым, то можно искать соответствующее масштабирование. Обе части условия требуют собственных доказательств.

Причинный порядок вместо готовой координатной сетки

Причинные множества начинают с другого минимального набора элементов. Задаются дискретные события и отношение предшествования, указывающее, какие события могут находиться в причинном прошлом других. Отношение должно быть согласовано с транзитивностью, а между двумя связанными событиями допускается лишь конечное число промежуточных элементов. В исходной работе Бомбелли, Ли, Мейера и Соркина эта структура предложена как основа микроскопического пространства-времени. Геометрические

свойства тогда требуется восстанавливать из порядка и числа элементов, а не вводить готовыми координатами. Такая перестановка исходных понятий интересна именно тем, что делает размерность результатом анализа связей, а не обязательным входным параметром. [4]

Один из оценивателей использует число событий и число причинно связанных пар внутри причинного ромба - области между двумя событиями. Для пуассоновского распределения в плоском пространстве-времени отношение ансамблевых средних связано с размерностью через гамма-функцию. В формуле C1 обозначает число событий, C2 - число упорядоченных причинных пар, а скобки означают усреднение по ансамблю. Уравнение можно обратить и получить оценку размерности. Для одной малой выборки подстановка наблюдённых чисел вместо средних требует анализа смещения. Это существенно: нелинейное преобразование среднего и среднее преобразованной величины вообще не обязаны совпадать. [5]

$$\frac{\langle C_2 \rangle}{\langle C_1 \rangle^2} = \frac{\Gamma(d+1)\Gamma(d/2)}{4\Gamma(3d/2)} \qquad (3.2)$$

Абаджян и Карлип исследовали малые подмножества причинных множеств, приближающих пространства Минковского разных размерностей. Они обнаружили уменьшение оценённой размерности, причём предел зависел от обработки изолированных событий и множеств без связей. При одном правиле получалось поведение около двух, при другом - около нуля. Этот результат не следует скрывать ради единой красивой истории. Он показывает, что исследуемая величина включает как структуру множества, так и решение о том, какие данные считать геометрически значимыми. Для будущего прибора из этого вытекает практическое требование: правила отбора событий и исключения пустых наблюдений должны задаваться до поиска необычного значения размерности. [5]

На рисунке 12 сопоставлены симплициальная геометрия и причинный порядок.

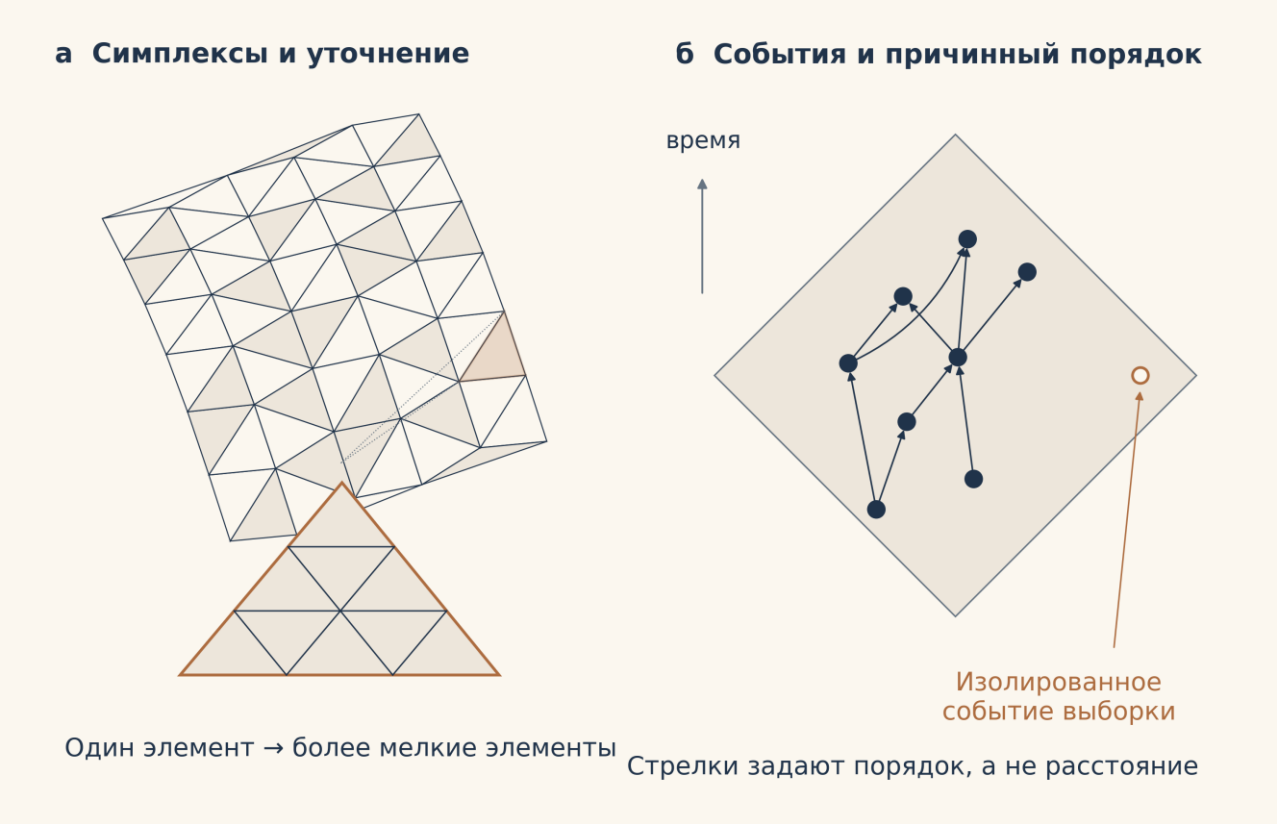


Рисунок 12. Два разных способа задать исходную структуру. Слева геометрическая поверхность собрана из треугольных элементов, один из которых показан после уточнения. Справа события упорядочены причинными отношениями; стрелками отмечены непосредственные связи, а транзитивные следуют из цепочек. Пустое медное событие пространственноподобно всем остальным событиям этой выборки. Это учебные конструкции, а не конфигурации квантового ансамбля или измеренные данные.

Уменьшение спектральной размерности без удаления координат

Особенно показателен механизм анизотропного масштабирования. В работе Петра Хоравы пространственные координаты и время масштабируются с разными степенями. Показатель z характеризует это различие, а D остаётся числом пространственных координат. Полученная пространственно-временная спектральная размерность равна единице плюс отношение D к z. При трёх пространственных координатах и z, равном трём, результат составляет два. Здесь не исчезают две оси координатной системы. Меняется поведение оператора, через который определяется спектральный показатель. Поэтому фраза «пространство становится двумерным» требует уточнения даже тогда, когда математическое вычисление выполнено совершенно корректно и его результат устойчив. [6]

$$\mathbf{x} \mapsto b\mathbf{x}, \quad t \mapsto b^z t, \qquad d_s = 1 + \frac{D}{z} \qquad (3.3)$$

Степенной результат удобно проверить пересчётом переменных в спектральном интеграле. В евклидизированной записи временное волновое число Ω равно частоте, делённой на c; k обозначает пространственное волновое число, а k* согласует единицы. При замене Ω на

переменную, делённую на корень из σ, временной интеграл даёт показатель минус одна вторая. Пространственная замена даёт показатель минус D, делённый на 2z. Сложение показателей и логарифмическая производная возвращают формулу выше. Расчёт устанавливает зависимость спектрального следа от масштабирования оператора и сам по себе ещё не определяет причинное распространение реального сигнала.

$$P(\sigma) \propto \int d\Omega\, d^D k\, e^{-\sigma\left[\Omega^2 + k^{2z}/k_*^{2z-2}\right]} \propto \sigma^{-(1+D/z)/2} \qquad (3.4)$$

Этот пример задаёт необходимую дисциплину интерпретации. Если прибор обнаружит необычную плотность мод, сначала придётся спросить, не изменился ли закон дисперсии поля. Если оператор содержит высшие пространственные производные, его формальное тепловое ядро может не описывать обычную положительную вероятность диффузии, хотя спектральный след остаётся определённым. Если вводится выделенное временное расслоение, необходимо проверить восстановление наблюдаемой релятивистской симметрии в нужном режиме. Ни один из этих вопросов не запрещает исследование. Они определяют, какие дополнительные вычисления отделяют математическую модель от теории, способной согласованно объяснять часы, сигналы и движение материи.

Изменение спектрального показателя можно показать, сохранив все пространственные направления (рис. 13).

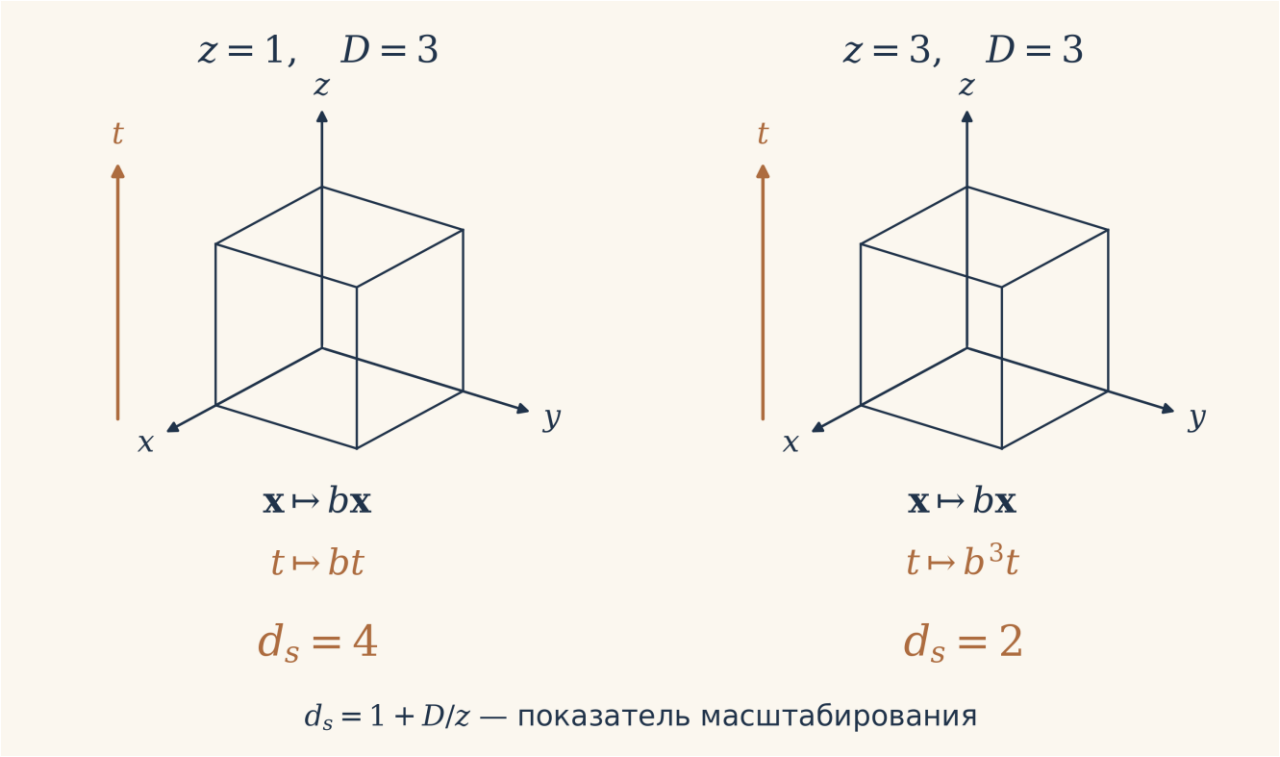


Рисунок 13. В обеих схемах сохраняются три пространственные координаты. Различается правило масштабирования времени: при z = 1 оно согласовано с пространственным, а при z = 3 имеет другую степень. В рассматриваемой теоретической модели формула $d_s = 1 + D/z$ даёт соответственно 4 и 2. Второй результат не означает удаления пространственных осей и не изображает установленное свойство природы.

Масштабная зависимость взаимодействий

Программа асимптотической безопасности рассматривает возможность того, что гравитационное взаимодействие при больших энергиях приближается к нетривиальному фиксированному режиму перенормировочной группы. В работе Лаушер и Ройтера показано, как при соответствующих предпосылках спектральная размерность может переходить от четырёх к двум. Это иной путь к похожему показателю: исходным предметом исследования служит масштабная зависимость эффективной динамики. Следует сохранять условный статус вывода. Наличие согласованного результата в рамках программы не доказывает, что природа реализует именно этот высокоэнергетический режим. Тем более оно не определяет автоматически способ измерить его проявления доступным лабораторным прибором. [7]

Простейшая запись показывает роль аномального масштабирования. В четырёх измерениях и единицах, где скорость света и приведённая постоянная Планка равны единице, безразмерную гравитационную связь можно составить из эффективной постоянной Ньютона и квадрата масштаба импульса. Её изменение содержит обычный размерностный вклад и дополнительный вклад η. Если связь достигает ненулевой фиксированной точки, их сумма должна обращаться в нуль. Это алгебраическое условие объясняет, почему поведение оператора на больших импульсах может существенно отличаться от наивного классического продолжения. Однако существование нужной точки и физическая допустимость всей траектории не выводятся из этой строки автоматически.

$$g(k) = k^2 G(k), \qquad k\frac{dg}{dk} = [2 + \eta(k)]g(k), \qquad g_* \neq 0 \;\Rightarrow\; \eta_* = -2 \qquad (3.5)$$

Проверка подобных построений требует отделять точное следствие предпосылок от точности самих предпосылок. В вычислениях часто ограничивают пространство возможных членов эффективного действия, и затем проверяют, насколько результат устойчив при расширении описания. Даже устойчивость нескольких приближений ещё не заменяет полного доказательства или наблюдения, но может обосновать продолжение программы. Для читателя важен сам способ оценки: уточнять, какая часть вывода зависит от усечения, какая - от выбора наблюдаемой, а какая следует из общей структуры. Такое чтение полезнее спора о том, является подход окончательной теорией или ошибкой: между этими крайностями находится большая часть действительной исследовательской работы.

Что нужно перенести из теории в наблюдение

Рассмотренные подходы получают масштабную зависимость из разных механизмов: ансамбля геометрий, причинного порядка, закона дисперсии или эффективного взаимодействия. Совпадение одного предельного числа ещё не выбирает механизм. В главе 2 две конкретные сети имели одинаковую спектральную размерность при всех масштабах, хотя их локальный отклик различался.

Для выбранного класса моделей работа поэтому начинается с набора наблюдаемых, а не с одного показателя. Сначала рассчитывается величина, которую все кандидаты объясняют одинаково. Затем ищется воздействие, при котором их предсказания расходятся: меняется

точка возбуждения, направление, тип зонда или доступный временной диапазон. Вводный трёхузловой опыт завершает эту процедуру для двух конечных сетей. Он не устанавливает экспериментального различия между всеми квантово-гравитационными подходами этой главы.

При переходе к физическому пространству каждое дополнительное измерение должно быть связано с моделью зонда. Например, формальный диффузионный параметр не превращается в оптическую частоту простой заменой обозначения. В главах 10-12 такие переходы будут выписаны для конкретных ограниченных моделей. Сначала понадобится компактное направление - пример, в котором изменение доступного набора мод можно проследить аналитически.

Глава 4
Скрытые и синтетические направления

Направление, которое замыкается

Дополнительное направление необязательно должно тянуться без конца. Оно может замыкаться, как координата вдоль окружности. Если окружность мала по сравнению с разрешением наблюдателя, различия положения вдоль неё становятся трудноразличимыми. Это не означает, что математическая координата исчезает. Меняется набор возбуждений, доступных выбранной энергии и способу наблюдения. Простейший пример задаётся произведением обычного пространства и окружности радиуса R. Точки с координатами у и у плюс длина окружности считаются одной точкой. Такое правило определяет компактное направление без обязательного изображения трубки, вложенной в ещё более высокое внешнее пространство.

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}^D \times S^1_R, \qquad y \equiv y + 2\pi R \qquad (4.1)$$

Идея объединять взаимодействия посредством дополнительной координаты имеет давнюю историю. В работе Оскара Клейна 1926 года исследовалась связь пятимерной релятивистской конструкции с квантовым описанием, включая периодическую зависимость поля от дополнительной переменной. Исторический факт важен для оценки новизны: само предположение о скрытом замкнутом направлении уже не является новой гипотезой. Современный исследовательский вклад должен состоять в другом - в согласованной динамике, конкретном механизме взаимодействия с наблюдаемыми полями, новых различающих следствиях или более чувствительном способе проверки. Повторение геометрической картины полезно для обучения, но не заменяет этих дополнительных шагов. [8]

Представление о компактности также помогает отличить локальное от глобального. В достаточно малой окрестности точки окружность похожа на линию, а произведение имеет на одно независимое пространственное направление больше. На масштабах, охватывающих окружность целиком, дальнейшее увеличение области не открывает новые положения вдоль неё. Отсюда возникает изменение объёмного показателя без сингулярности и без превращения точек в объекты другого рода. Однако конкретная наблюдаемая зависит от того, могут ли исследуемые поля двигаться вдоль дополнительной координаты. Поле, ограниченное подпространством, способно вообще не чувствовать её напрямую. Поэтому геометрия и правила движения полей должны задаваться вместе.

Компактное направление становится неразличимым при грубом разрешении, сохраняясь в модели (рис. 14).

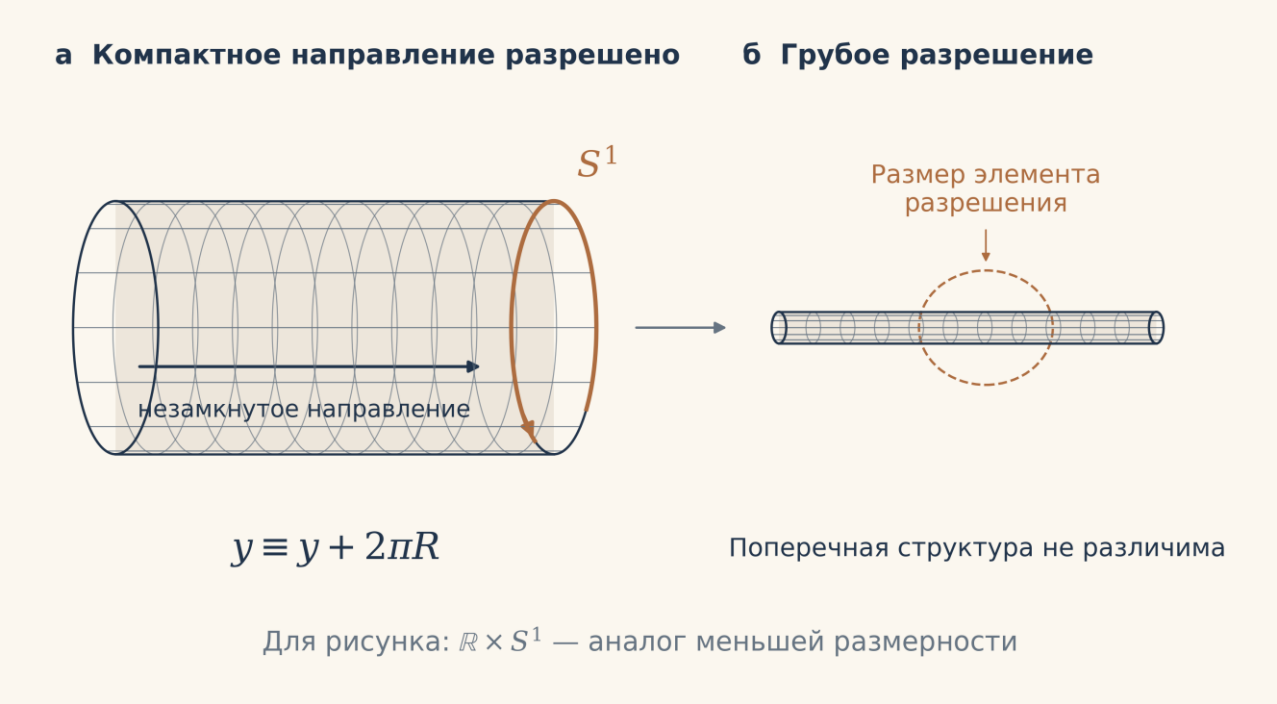


Рисунок 14. Произведение незамкнутого направления и окружности изображено в виде цилиндра как аналог меньшей размерности. При достаточном разрешении видно движение вдоль компактного направления; грубый элемент наблюдения не различает его поперечную структуру. Окружность при этом физически не исчезает. Внешний объём, использованный для рисунка, служит средством визуализации и не добавляет новой гипотезы к пространству $\mathbb{R}^D \times S^1$.

Периодичность превращается в лестницу мод

Пусть скалярное поле свободно распространяется по компактному направлению и принимает одинаковые значения после полного обхода. Тогда зависимость от y можно разложить в ряд периодических гармоник. Целое число n обозначает, сколько периодов укладывается вдоль окружности, а каждая функция φn описывает соответствующую моду в оставшихся координатах. Для вещественного поля коэффициенты положительных и отрицательных номеров связаны комплексным сопряжением. Уже на этом этапе дополнительная геометрия получает потенциально измеримое следствие: вместо произвольного непрерывного импульса по новому направлению возникает дискретный набор. Это следствие граничного условия, а не самостоятельный новый закон природы.

$$\Phi(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n(x) e^{i n y / R}, \qquad p_y = \frac{n\hbar}{R} \qquad (4.2)$$

В простейшем плоском случае дополнительный импульс входит в релятивистскую энергию так же, как остальные пространственные компоненты. Для наблюдателя, который описывает только незамкнутые направления, его вклад выглядит как увеличение массы соответствующей моды. В формуле ниже m0 - масса исходного поля, а p - импульс в

доступных незамкнутых направлениях. Чем меньше радиус, тем больше энергетический интервал до первого дополнительного возбуждения. Поэтому отсутствие новых мод в ограниченном диапазоне энергии может согласовываться с существованием достаточно малого компактного направления. Но количественный вывод потребует знать, как источник возбуждает эти моды и как детектор их регистрирует.

$$E_n^2 = c^2|\mathbf{p}|^2 + m_0^2c^4 + \frac{n^2\hbar^2c^2}{R^2}, \qquad m_n^2 = m_0^2 + \frac{n^2\hbar^2}{c^2R^2} \tag{4.3}$$

Лестница масс получена при конкретных предположениях: направление имеет форму окружности постоянного радиуса, поле свободно, фоновая геометрия плоская, а граничное условие строго периодично. При других условиях спектр меняется. Дополнительные взаимодействия могут сдвигать уровни, нарушать вырождение или уменьшать доступность отдельных мод. Поэтому найденная последовательность резонансов не должна автоматически называться следом дополнительного пространства. Внутренние состояния обычной системы тоже образуют дискретный спектр. Для геометрической интерпретации потребуется согласовать уровни, их связи, законы распространения и зависимость от внешних условий. Чем больше независимых следствий выводится из одного радиуса и одной динамики, тем содержательнее становится гипотеза.

Периодичность компактной координаты удобно представить семейством круговых гармоник (рис. 15).

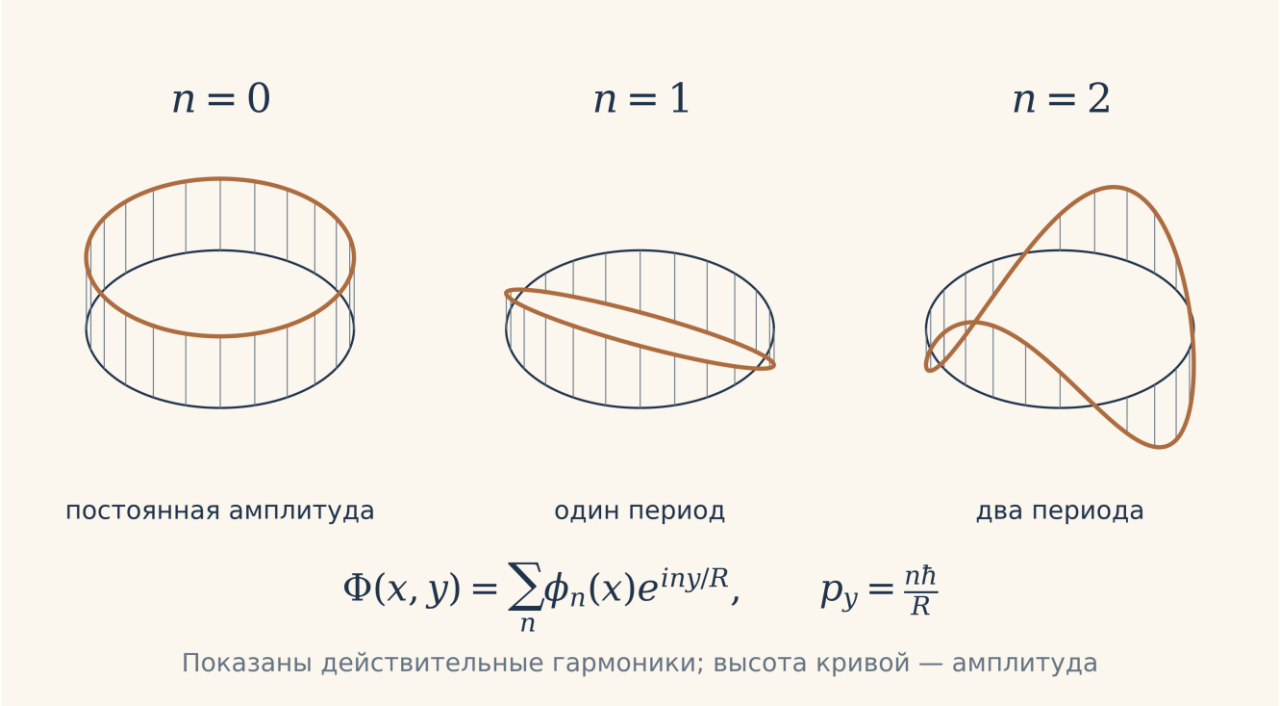


Рисунок 15. Действительные гармоники с индексами n = 0, 1 и 2 показаны над одной и той же компактной окружностью. Высота медной кривой передаёт амплитуду моды, а не ещё одну пространственную координату. Периодичность допускает целочисленные номера и соответствующие дискретные значения дополнительного импульса. Это базисные математические примеры, а не спектр изготовленного детектора или набор независимых новых направлений.

Тепловой след компактного направления

Теперь можно вычислить, как компактность проявляется в спектральной размерности. Для обычного лапласиана собственные значения вдоль окружности равны квадратам её дискретных волновых чисел. Незамкнутые направления дают гауссов множитель, знакомый по предыдущей главе. Нормированный тепловой след получается произведением этого множителя и суммы по целым номерам компактных мод. Деление на длину окружности обеспечивает нормировку на полный пространственный объём. Параметр σ по-прежнему имеет размерность площади. Здесь рассматривается именно пространственная геометрия; временное направление не включено, поэтому полученные числа нельзя напрямую сравнивать с пространственно-временной размерностью без соответствующего уточнения.

$$P(\sigma) = \frac{(4\pi\sigma)^{-D/2}}{2\pi R} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\sigma n^2/R^2} \qquad (4.4)$$

Если σ значительно превышает квадрат радиуса, все ненулевые номера экспоненциально подавлены. В сумме остаётся единица, и показатель убывания следа определяется только D незамкнутыми направлениями. Если σ значительно меньше квадрата радиуса, в сумме участвует много мод, и её можно приближённо заменить гауссовым интегралом по n. Интеграл даёт дополнительный множитель, обратно пропорциональный корню из σ. Следовательно, короткомасштабная пространственная спектральная размерность увеличивается на единицу. Этот вывод не требует предположения о квантовой гравитации: он полностью следует из обычного лапласиана и выбранной компактной геометрии. Поэтому пример особенно полезен как эталон для проверки методов.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\sigma n^2/R^2} \simeq \sqrt{\pi}\,\frac{R}{\sqrt{\sigma}} \quad (\sigma \ll R^2), \qquad d_s \to \begin{cases} D+1, & \sigma \ll R^2, \\ D, & \sigma \gg R^2. \end{cases} \qquad (4.5)$$

Без предельного приближения логарифмическая производная даёт следующую точную формулу для этого модельного случая. В ней отношение сумм является средним квадратом номера моды с тепловыми весами. Оно показывает, как постепенно подключаются дополнительные возбуждения. Для трёх незамкнутых направлений пространственный показатель меняется между тремя и четырьмя; если отдельно добавить обычное евклидизированное время, соответствующие пространственно-временные значения будут на единицу больше. Направление изменения противоположно короткомасштабному уменьшению, обсуждавшемуся ранее. Это не противоречие, поскольку сравниваются разные механизмы. Наоборот, знак и форма перехода могут помочь различить модели, если связь масштаба с наблюдением установлена корректно.

$$d_s(\sigma) = D + \frac{2\sigma}{R^2}\,\frac{\sum_n n^2\, e^{-\sigma n^2/R^2}}{\sum_n e^{-\sigma n^2/R^2}} \qquad (4.6)$$

На рисунке 16 показан переход для трёх незамкнутых пространственных направлений и одной окружности. При коротком диффузионном масштабе разрешается лестница компактных мод, при длинном остаётся нулевая мода. В этом графике параметр нормирован

на квадрат радиуса; физическое время конкретного прибора потребует отдельного коэффициента переноса.

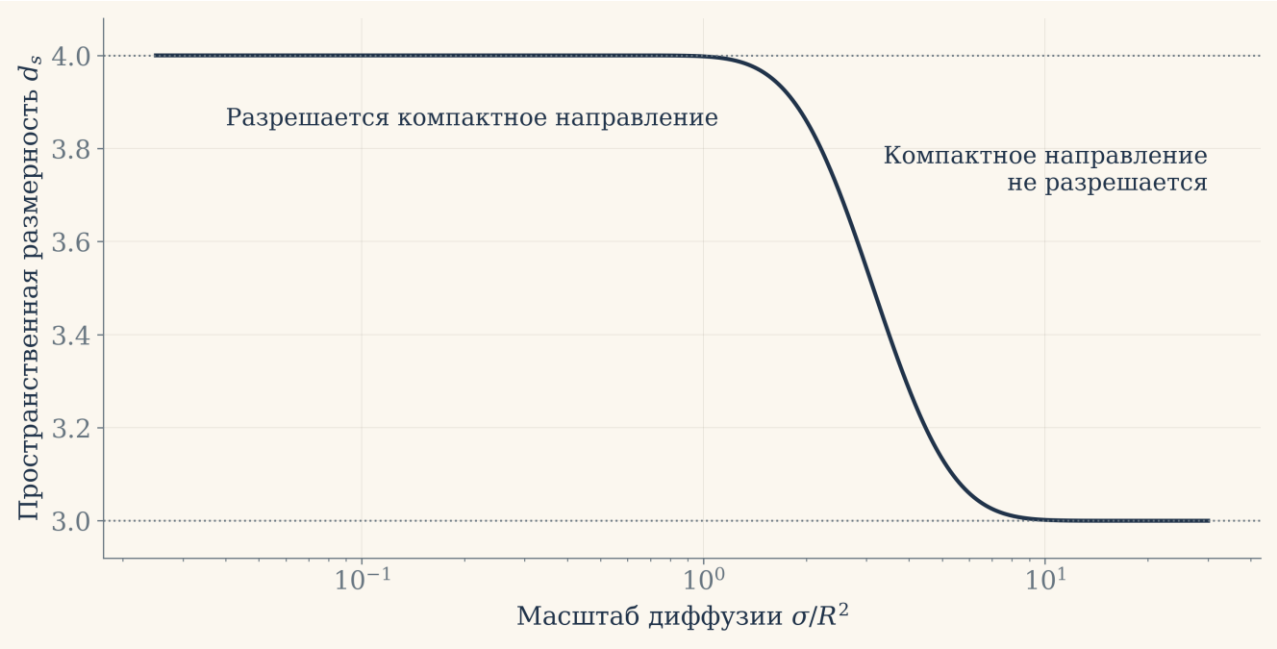


Рисунок 16. Пространственная спектральная размерность для модели $R^3 \times S^1$. Кривая рассчитана по тепловому следу и показывает разрешение компактного направления на малых масштабах. Это аналитическая модель. Масштаб параметра диффузии задан радиусом окружности и не является непосредственно шкалой частоты оптического прибора.

Что действительно мог бы увидеть прибор

Реальный прибор не выводит на экран число пространственных направлений непосредственно. Он регистрирует интенсивности, частоты, фазы, импульсы или времена прихода. Задача теории - предсказать распределение этих данных при наличии компактной координаты и сравнить его с распределением в обычном описании. В спектроскопическом варианте можно искать дополнительные семейства мод. В варианте распространения - изменение групповых скоростей и порогов возбуждения. Но эти эффекты должны следовать из одного выбранного взаимодействия поля с геометрией. Нельзя взять спектр из одной модели, усиление сигнала из другой, а чувствительность детектора назначить независимо: такая комбинация не задаёт проверяемого физического сценария.

Особенно полезны сопоставления разных каналов. Если предполагается универсальное дополнительное направление, необходимо объяснить, какие поля его чувствуют и почему их параметры связаны или различаются. Обнаружение отклонения только в одном материале скорее характеризует свойства этого материала, пока не построено более широкое обоснование. С другой стороны, гипотеза вполне может допускать избирательное взаимодействие; тогда универсальность не должна подставляться в выводы неявно. Сравнение нескольких полей не является магическим способом доказательства. Оно уменьшает множество совместимых моделей только тогда, когда заранее рассчитаны их

различные предсказания, включая обычные взаимодействия, которые тоже могут давать похожие сигналы.

Радиус компактного направления также нельзя считать произвольной ручкой настройки реального мира. Если он является динамической величиной, нужна модель его устойчивости и реакции на воздействие. Если фиксирован внешним условием математической задачи, это условие должно быть явно указано. Обсуждение возможности изменить размерность техническим устройством требует значительно большего, чем существование параметра R в формуле. Необходимо вычислить источник воздействия, энергетический баланс, устойчивость состояния и наблюдаемый результат. Пока такого механизма нет, корректно говорить о проверке гипотезы или моделировании её следствий. Это сохраняет предмет исследования и не превращает доступный математический пример в обещание несуществующего прибора.

Как строится синтетическое направление

Синтетическая размерность возникает, когда внутренние состояния или моды связываются так, будто они являются соседними положениями на дополнительной оси. Индексом такой оси могут служить уровни атома, частотные моды резонатора или другие контролируемые состояния. Если переходы преимущественно соединяют соседние номера, динамика напоминает движение по цепи. Простейший гамильтониан ниже содержит амплитуды перехода Jm и собственные частотные сдвиги δm. Операторы создания и уничтожения описывают выбранные моды. Комплексное сопряжение в парном члене обеспечивает эрмитовость, а множитель приведённой постоянной Планка переводит частотные параметры в единицы энергии. Физическая конструкция должна реализовать именно эти связи, а не только их рисунок.

$$H = \hbar \sum_{m} \left(J_m a_{m+1}^{\dagger} a_m + J_m^{*} a_m^{\dagger} a_{m+1} \right) + \hbar \sum_{m} \delta_m \, a_m^{\dagger} a_m \qquad (4.7)$$

В эксперименте Лозе и соавторов с ультрахолодными атомами двумерная топологическая накачка позволила исследовать отклик, связанный с четырёхмерным квантовым эффектом Холла. Авторы измерили топологическую характеристику, соответствующую второму числу Черна. Результат показывает, что математически высокоразмерная динамика может получать контролируемое лабораторное воплощение. Он не означает обнаружения четвёртого свободного пространственного направления вокруг установки. Синтетические координаты входят через параметры и внутреннюю структуру системы. Именно поэтому эксперимент полезен: исследователь получает возможность проверять предсказания высокоразмерной модели, не располагая физическим пространством той же размерности. [9]

Практическая цена такого представления состоит в ограниченности реализации. Синтетическая ось имеет конечное число состояний, переходы могут быть неодинаковыми, а некоторые взаимодействия остаются дальнодействующими относительно искусственно заданного соседства. Кроме того, шум и потери способны по-разному влиять на разные моды. Поэтому необходимо выяснять, какие свойства целевой модели действительно воспроизведены, а какие отсутствуют. Успешная имитация спектра не гарантирует имитации

всех взаимодействий и причинных отношений. Такая точность полезна и для фундаментального поиска: она приучает отделять измеряемый объект от математической конструкции, с которой он сопоставляется, и устанавливать границы этого сопоставления количественно.

Физическое устройство и синтетическую ось полезно показать раздельно, сохранив связь между ними (рис. 17).

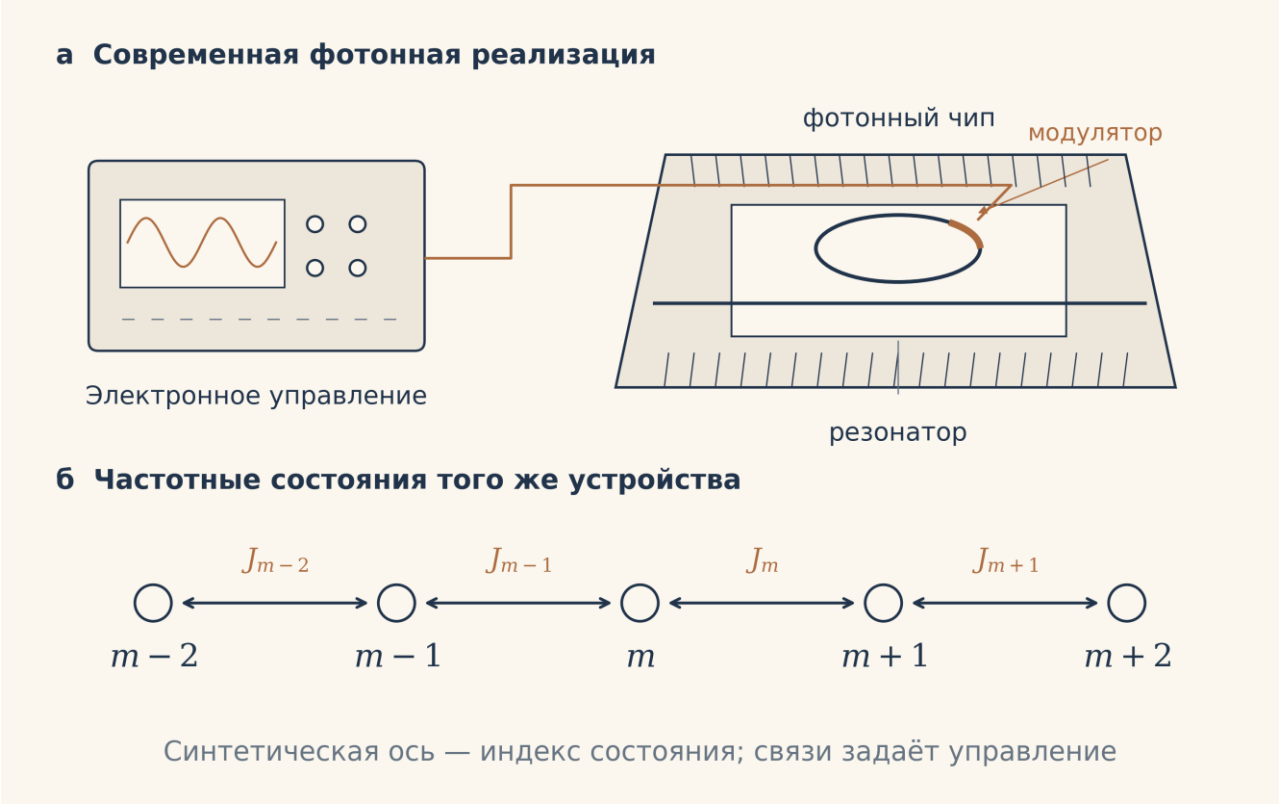


Рисунок 17. Иллюстративная современная реализация синтетического направления: фотонный резонатор на чипе, модулятор и электронное управление. Нижняя цепочка изображает частотные состояния того же устройства; соседние состояния связаны управляемыми переходами с коэффициентами J. Их последовательный номер играет роль синтетической координаты. Рисунок не задаёт готовую конструкцию и не приписывается конкретной публикации; пространственная длина цепочки является графическим условием.

Лаборатория для проверки способов различения

Лабораторная модель позволяет предъявить методу устройство с известной структурой. Трёхузловые сети главы 2 уже дали такой контроль: полные спектры совпали, а локальное возбуждение позволило различить конструкции. Синтетическое направление расширяет эту возможность. Можно изменять число доступных состояний, замыкать цепь переходов или вводить контролируемые потери и проверять, какой признак сохраняется.

Для компактной модели следующий вопрос иной: какой физический источник возбуждает лестницу мод и какой детектор к ней чувствителен? В главе 10 будет выбран один скалярный зонд, для которого статический потенциал и динамическая передача выводятся из одного

оператора. Это даёт конкретное предсказание и позволяет сопоставить его с обычным дополнительным полем. Такая проверка зависит от закона связи источника с модами.

Синтетический стенд проверяет способ восстановления при контролируемой структуре. Компактное направление задаёт возможное устройство физической геометрии. Между задачами есть общая математика, но каждая требует собственного измерительного словаря. Следующая глава рассмотрит ещё один источник геометрического описания - отношения между квантовыми степенями свободы.

Глава 5
Геометрия из квантовых отношений

Что означает возникновение геометрии

Слова «пространство возникает» звучат так, будто до некоторого момента существовала пустота, а затем внутри неё появилось пространство. Для физической теории это обычно слишком буквальная картина. Возникновение может означать другой уровень описания: исходные переменные не имеют непосредственного геометрического смысла, но их коллективное поведение допускает язык расстояний, соседства и полей. Температура служит привычным примером такого перехода между уровнями, хотя сама по себе аналогия ничего не доказывает о пространстве. Задача состоит в выводе правил нового описания и определении области их применимости. Геометрия, возникающая таким образом, не обязана быть иллюзией; она может оставаться точным эффективным свойством наблюдаемого мира.

Простейшая модель помогает отделить возможный механизм от выразительного образа. Пусть задана сеть взаимодействующих элементов, и заранее известны только силы связей. Можно попытаться определить расстояние через стоимость передачи возбуждения или через длину кратчайшей последовательности переходов. Если полученная структура в некотором режиме похожа на гладкое многообразие, появляется эффективная геометрия. Однако гладкость, размерность и локальность не следуют из наличия любой сети. Полностью связанная система и регулярная решётка ведут себя различно. Чтобы утверждать возникновение пространства, требуется показать, почему конкретная динамика выбирает структуры с нужными свойствами и почему эти свойства устойчивы к небольшим изменениям исходного состояния.

Следующий вопрос касается универсальности. Разные возбуждения одной системы могут распространяться с разными скоростями и чувствовать разные эффективные параметры. Это хорошо определённая ситуация, но она не даёт единственной геометрии автоматически. Для геометрического описания общего мира особенно важно понять, почему независимые наблюдатели и различные пробные поля согласуют результаты. Если каждому полю назначается собственное расстояние без связи с остальными, теория рискует потерять объяснительную силу. Поэтому возникающая геометрия должна сопровождаться правилом сравнения зондов, преобразования координат и восстановления обычного режима. Эти требования направляют поиск сильнее, чем само утверждение о первичности информации или связей.

Два датчика с общей причиной

Перед квантовыми формулами полезен опыт с двумя обычными регистраторами. Источник каждую секунду независимо выбирает равновероятный бит Q и записывает одно и то же

значение в память A и B. Между регистраторами после записи нет канала передачи. В половине испытаний получается пара 00, в половине - 11.

A	B	Вероятность
0	0	1/2
0	1	0
1	0	0
1	1	1/2

Зная A, наблюдатель точно узнаёт B. Энтропия каждого бита равна ln 2, совместная энтропия тоже ln 2: пара содержит только один случайный выбор. Классическая взаимная информация поэтому равна ln 2. Во всех этих формулах используется натуральный логарифм; единица информации - нат.

$$H(X) = -\sum_x p_x \ln p_x, \qquad I(A:B) = H(A) + H(B) - H(A,B) = \ln 2 \tag{5.1}$$

Теперь экспериментатор после записи принудительно устанавливает A = 1. В памяти B по-прежнему остаётся исходный Q, поэтому вероятность B = 1 равна 1/2. Отбор испытаний, где A уже был равен единице, дал бы другую вероятность. Различие между наблюдением и вмешательством можно выразить явно:

$$\Pr(B = 1 \mid A = 1) = 1, \qquad \Pr(B = 1 \mid \mathrm{do}(A = 1)) = \frac{1}{2} \tag{5.2}$$

Высокая взаимная информация в этом примере точно указывает на общую причину. Для определения способности передавать новое воздействие требуется второй опыт. Квантовая теория добавляет особые виды корреляций и правила измерения, но различие двух вопросов сохраняется. Следующие разделы используют его при обсуждении голографии и линейного отклика.

Различие наблюдения и вмешательства можно увидеть на двух современных электронных регистраторах (рис. 18).

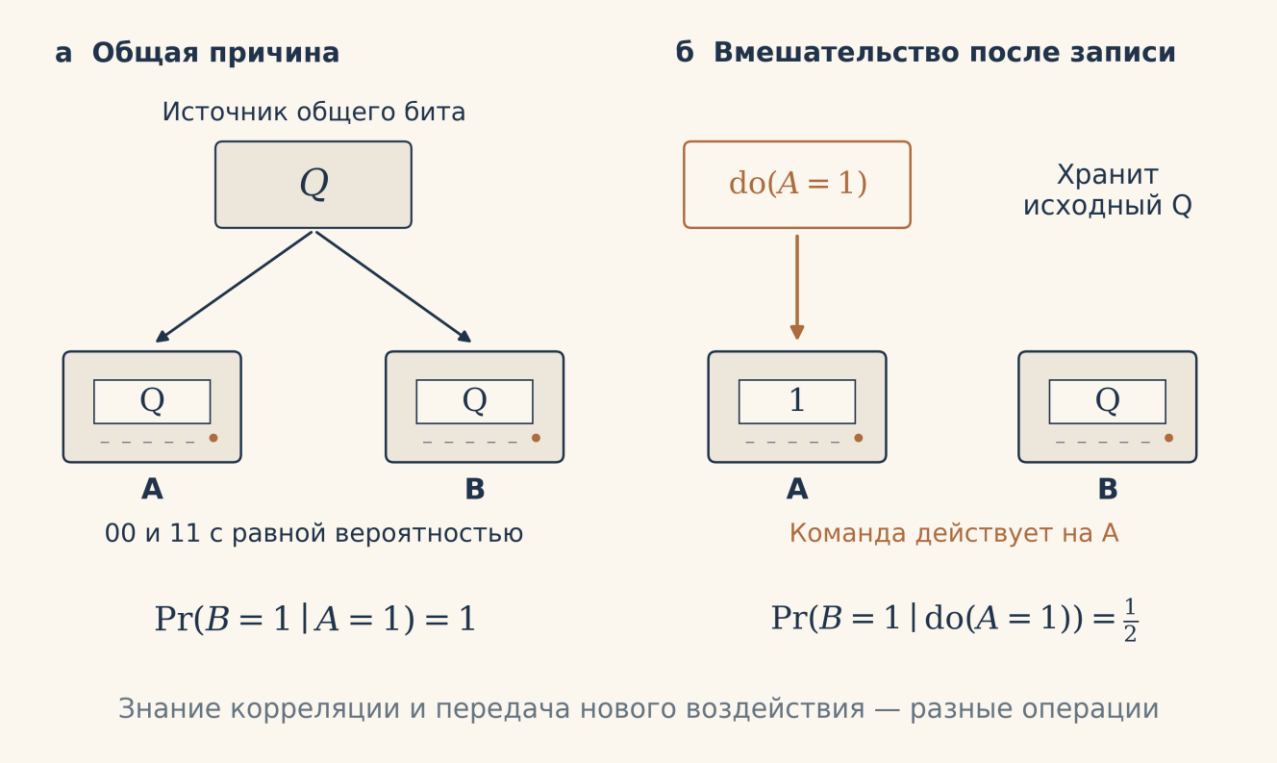


Рисунок 18. Классический общий источник записывает один равновероятный бит Q в две памяти, поэтому наблюдение A полностью определяет B. Во втором протоколе внешняя команда после записи устанавливает A = 1, а память B хранит прежнее Q. Вероятность единицы в B остаётся равной половине. Канал передачи между регистраторами отсутствует: высокая корреляция в этом примере сообщает об общей причине, но не о способности передать новое воздействие.

Что устанавливает голографическая двойственность

Одним из наиболее конкретных примеров связи негравитационного и геометрического описаний стала предложенная Малдасеной двойственность между определёнными конформными теориями поля и теориями на пространствах анти де Ситтера с дополнительными компактными факторами. В известном варианте рассматриваются четырёхмерная суперсимметричная калибровочная теория и теория струн на соответствующем пятимерном пространстве анти де Ситтера, умноженном на пятимерную сферу. Удобное классическое гравитационное описание возникает в определённом пределе параметров. Это содержательный математический контекст, где разные числа геометрических координат входят в эквивалентные описания. Он не устанавливает, что любая квантовая система или непосредственно наблюдаемая космология имеют такое же голографическое представление. [10]

Рю и Такаянаги предложили в этом контексте связь энтропии запутанности области граничной теории с площадью минимальной поверхности в объёме. Поверхность должна быть закреплена на границе выбранной области и удовлетворять условию гомологии. Для

классического статического гравитационного режима формула ниже записана в единицах, где скорость света, постоянная Планка и постоянная Больцмана равны единице. Gbulk означает гравитационную постоянную объёмной теории. Формула придаёт геометрический смысл определённой квантовой информационной величине и позволяет поставить обратную задачу: какую часть геометрии можно восстановить, зная энтропии многих областей? [11]

$$S(A) = \frac{\mathrm{Area}(\gamma_A)}{4G_{\mathrm{bulk}}} \qquad (c = \hbar = k_B = 1) \qquad (5.3)$$

Ограничения записи существенны для её применения. Минимальная поверхность относится к статической постановке; в более общей временной задаче требуется соответствующее ковариантное описание. Квантовые поправки также не исчезают просто потому, что основная формула имеет геометрический вид. Кроме того, энтропия задаётся для конкретной области определённой граничной теории, а не для произвольного набора лабораторных датчиков. Поэтому нельзя измерить любую корреляцию, подставить её вместо S и объявить полученное число площадью реального пространства. Сначала необходимо обосновать словарь между физической системой и условиями формулы. Без этого красивое равенство утрачивает именно ту точность, благодаря которой оно интересно.

Условия закрепления и гомологии становятся явными на геометрической схеме статической постановки (рис. 19).

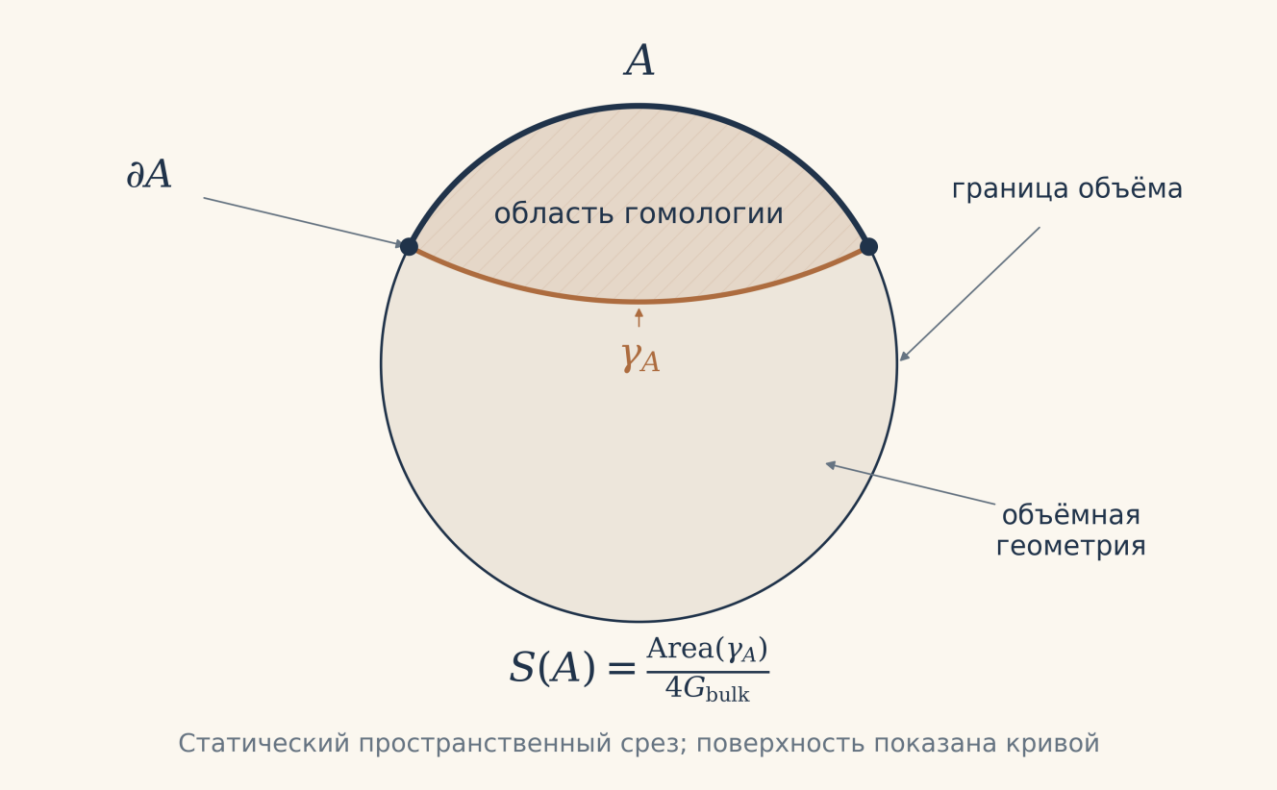


Рисунок 19. Статическая голографическая постановка показана на пространственном срезе меньшей размерности. Выбранной граничной области A соответствует закреплённая на ∂A минимальная поверхность γ_a, изображённая здесь геодезической кривой диска. Заштрихованная область ограничена A и γ_a и показывает условие гомологии. Геометрия схемы не является картой наблюдаемой Вселенной; формула относится к оговорённому классическому статическому режиму двойственности.

Запутанность и пространственная связность

Ван Раамсдонк исследовал идею, согласно которой классическая связность объёмной геометрии связана с запутанностью степеней свободы её квантового описания. В рассматриваемой голографической картине уменьшение определённых связей запутанности соответствует геометрическому разделению областей. Это мотивирует поиск пространства как коллективного свойства квантовых отношений. Но вывод относится к специальному теоретическому контексту. Он не означает, что любая пара запутанных фотонов образует доступный проход, и не задаёт технологию произвольного управления расстояниями. Для переноса идеи в другой объект необходимо заново определить степени свободы, динамику и геометрический словарь. [12]

Для количественного исследования отношений удобно использовать взаимную информацию. Энтропия отдельной подсистемы определяется её матрицей плотности, полученной после исключения остальных степеней свободы. Взаимная информация двух подсистем показывает, насколько их совместное состояние отличается по информационной структуре от независимого. Она учитывает и квантовые, и классические корреляции, поэтому не является универсальной мерой только запутанности. Два детектора, получающие сигнал от общего источника, могут иметь большую взаимную информацию без прямого взаимодействия между собой. Уже это наблюдение показывает, почему сильную корреляцию нельзя автоматически приравнять к малому физическому расстоянию или к возможности быстро передать воздействие.

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \ln \rho), \qquad I(A:B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \qquad (5.4)$$

Чтобы превратить корреляции в предполагаемые расстояния, иногда хочется применить монотонное преобразование: сильной связи назначить малую длину, слабой - большую. Но у расстояния есть дополнительные требования. Оно должно быть определено для нужных пар, согласовано с выбором единиц и удовлетворять соответствующим метрическим условиям, включая неравенство треугольника в обычной пространственной задаче. Произвольное преобразование взаимной информации этого не гарантирует. Кроме того, попарные значения не определяют полностью многочастичное квантовое состояние. Поэтому реконструированная карта должна рассматриваться как проверяемая модель данных, а не как геометрия, автоматически присутствующая в любой таблице корреляций.

Различие между общей информацией и причинным откликом

Для проверки способности передать воздействие нужен другой эксперимент: на одну часть системы подаётся контролируемое возмущение, после чего измеряется изменение другой. В режиме линейного отклика такая связь выражается через коммутатор наблюдаемых. Выберем возмущение гамильтониана со знаком минус, пропорциональное внешнему сигналу f и оператору B. Тогда восприимчивость χ для наблюдаемой A имеет указанный ниже знак, а ступенчатая функция θ обнуляет её до возмущения. Предполагается стационарное исходное состояние, чтобы отклик зависел от разности времён. Такой подход относится к теории

линейного отклика, развитой Кубо; он связывает действие экспериментатора с измеряемой реакцией системы. [13]

$$H'(t) = -f(t)B, \qquad \chi_{AB}(t) = \frac{i}{\hbar}\theta(t)\langle[A(t), B(0)]\rangle \qquad (5.5)$$

$$\delta\langle A(t)\rangle = \int \chi_{AB}(t - t')f(t')\,dt' \qquad (5.6)$$

Для квантовых спиновых систем с ограниченными локальными взаимодействиями конечного радиуса действия оценки Либа и Робинсона ограничивают скорость распространения влияния. Норма коммутатора подавляется вне эффективного конуса. Положительные параметры C и μ определяются моделью и выбранными наблюдаемыми, r обозначает расстояние между их областями, а v задаёт границу скорости. Это не универсальная скорость света: речь идёт о распространении в данной системе. За пределами конуса обычно остаются экспоненциально малые хвосты, а не строгое обнуление. При иных взаимодействиях вид ограничения может измениться. Тем самым локальность можно проверять через динамику операторов, отдельно от уже существующих корреляций состояния. [14]

$$\| [A(t), B] \| \leq C \ \| A \| \| B \| \ e^{-\mu[r - v|t|]} \qquad (5.7)$$

Отсутствие сверхсветового сообщения посредством одной запутанности можно увидеть и непосредственно. Если над подсистемой A выполняется локальное унитарное преобразование, приведённая матрица плотности B не меняется: частичный след устраняет преобразование на исключаемой подсистеме. Поэтому все локальные вероятности наблюдателя B остаются прежними. Аналогичный вывод сохраняется для локальной операции с сохранением следа, когда её результат не отбирается условно. При условном отборе состояние B может описываться иначе, но для использования этого различия необходимо узнать исход отбора по обычному каналу связи. Сильная общая информация и управляемая передача нового сообщения остаются различными физическими возможностями.

$$\rho_{B'} = \mathrm{Tr}_A\left[(U_A \otimes I_B)\rho_{AB}\left(U_A^{\dagger} \otimes I_B\right)\right] = \rho_B \qquad (5.8)$$

Восстановление геометрии является обратной задачей

Даже при наличии точного геометрического словаря восстановление пространства из наблюдений может быть неоднозначным. Прямая задача задаёт геометрию и рассчитывает энтропии, спектры или корреляции. Обратная задача начинает с этих величин и ищет геометрию, которая могла их породить. Часть изменений метрики может не влиять на выбранный набор данных или давать влияние ниже разрешения. Кроме того, координатные преобразования способны менять запись метрики без изменения физики. Поэтому необходимо различать физическую неоднозначность и свободу описания. Алгоритм, который всегда выдаёт единственную красивую поверхность, ещё не доказывает единственность восстановленного пространства.

В работе Чэ 2026 года получены формулы восстановления определённого класса стационарных однородных асимптотически AdS_3-метрик из ковариантной голографической

энтропии. Особенно показательно, что одновременные данные сохраняют неоднозначность знака сдвиговой части метрики, тогда как зависимость от разности времён помогает её устранить. Это конкретный пример того, как дополнительная наблюдаемая разрешает геометрическую неоднозначность. Результат не является универсальным восстановлением произвольного пространства из любых квантовых данных: существенны выбранный класс метрик и голографическая постановка. Для программы приборов ценен сам принцип - искать, какую информацию теряет исходный протокол и какое новое измерение возвращает её. [15]

Полезный стандарт проверки обратной задачи включает восстановление по части данных и прогноз остальных. Если метрика подогнана по одним энтропиям, следует проверить независимые интервалы, временные зависимости или другие доступные наблюдаемые, предусмотренные моделью. Нужно также оценить, как ошибки входных данных усиливаются в восстановленных величинах. Формальная обратимость не гарантирует устойчивости: небольшое изменение измеренной функции может приводить к большому изменению решения. Поэтому будущий геометрический томограф обязан сообщать область неопределённости и неразличимые альтернативы. Отказ от чрезмерной определённости делает прибор полезнее, поскольку показывает, где необходимы дополнительные измерения, а где информация уже достаточна.

Рабочая программа сравнения двух геометрических описаний

На этом основании можно сформулировать ограниченную исследовательскую гипотезу: геометрия, реконструированная из корреляций состояния, и геометрия, реконструированная из передачи возмущений, могут систематически расходиться даже у одной контролируемой системы. Само возможное расхождение не предлагается как неизвестный закон квантовой механики. Исследовательская задача состоит в точном описании условий согласия, построении устойчивых оценивателей и поиске наблюдаемых, которые различают причины несогласия. Начальная площадка - программируемая квантовая система или подходящий аналоговый стенд с известной динамикой. Там можно менять состояние при фиксированном устройстве связей и проверять, какая часть восстановленной картины действительно зависит от состояния.

Протокол должен сохранять отдельно исходную взаимную информацию, измеренный временной отклик и предпосылки их геометрического преобразования. Порог регистрации сигнала нельзя скрывать в определении расстояния: при уменьшении порога слабый ранний хвост может создать видимость более короткого пути. Аналогично общая причина корреляций может сформировать ложную близость двух узлов. Контрольные изменения состояния, амплитуды возмущения и уровня шума помогают отличать эти эффекты. Содержательным результатом станет не любое различие двух карт, а предсказуемая структура различий, воспроизводимая при заранее заданных условиях и объясняемая одной согласованной моделью.

Две ветви измерения следует свести к сопоставлению реконструкций с явными неопределённостями (рис. 20).

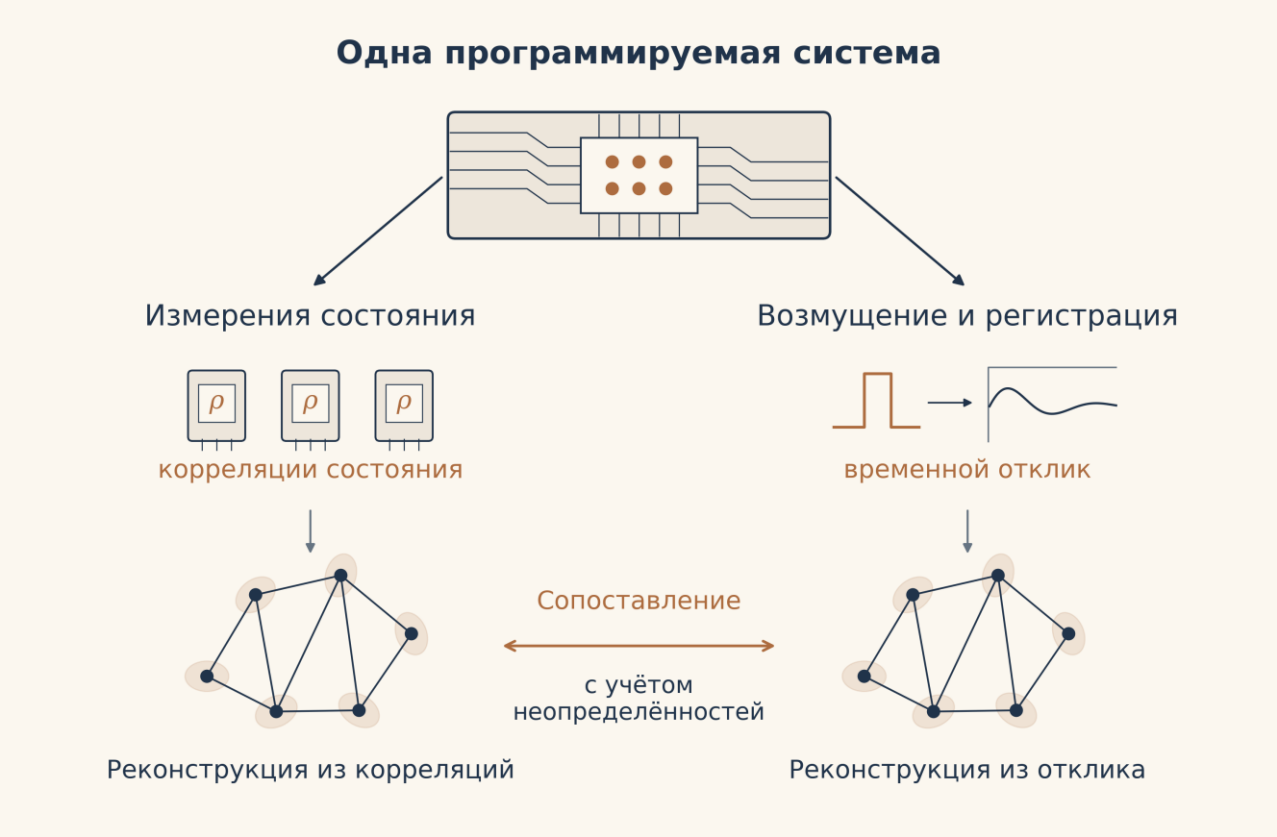


Рисунок 20. Предлагаемый протокол сравнивает две реконструкции одной контролируемой системы. Первая ветвь использует измерения состояния и корреляции, вторая - локальное возмущение и временной отклик. Обе карты изображены условно, с областями неопределённости, без численных результатов. Их совпадение или расхождение заранее не предполагается: сравнение требует согласованных предпосылок, сохранения исходных данных и контроля порога регистрации.

В первых пяти главах сформирован язык будущего прибора. Уже есть два законченных контрольных примера: масштабный показатель на сфере меняется при постоянной локальной размерности, а одинаковые спектры конечных сетей допускают разные локальные отклики. Далее задача станет обратной: устройство скрыто, доступны только выбранные входы и выходы, а параметры известны с конечной точностью. С этого места проверяться будет не выразительность геометрической картины, а информация, которую действительно позволяют извлечь данные.

Глава 6
Можно ли восстановить пространство по отклику

Мир внутри закрытого корпуса

Через стенку закрытого корпуса выведены несколько разъёмов. На один подаётся импульс, с остальных снимаются сигналы. Внутри могут находиться резисторы, накопители энергии или длинные линии. Наблюдателю требуется узнать устройство по тому, что доступно снаружи. Это удобная уменьшенная версия вопроса о пространстве: каким образом отношения между показаниями позволяют судить об отношениях внутри исследуемого мира?

Прямая задача начинается с устройства и заканчивается сигналом. Обратная начинается с сигнала и пытается определить устройство. Эти направления неравноправны. Несколько разных устройств могут давать одинаковый ответ, подобно тому как разные маршруты могут приводить пассажира к станции в одно время. Даже бесконечная точность измерения времени не сообщит, какой маршрут был выбран, если остальные наблюдаемые величины совпадают. Это структурная неоднозначность. Она отличается от обычной погрешности, которую иногда можно уменьшить более долгим накоплением данных.

Предметный смысл обратной задачи показан на рисунке 21: доступны входы и выходы закрытой системы.

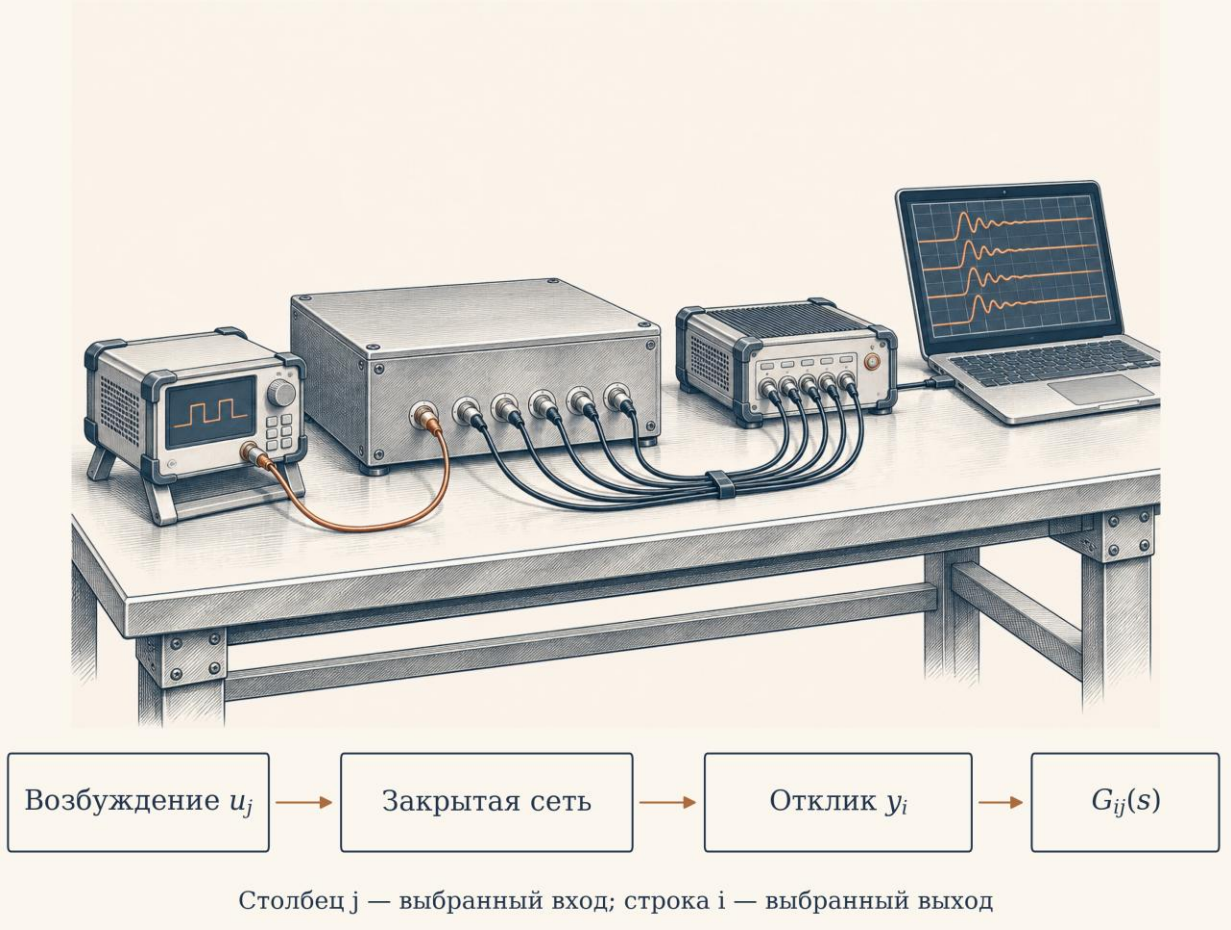


Рисунок 21. Закрытая сеть и доступный экспериментатору интерфейс. Генератор задаёт воздействие на выбранном порту, многоканальный регистратор измеряет отклики, а последовательная смена входов позволяет составить матрицу $G_{ij}(s)$. Строка относится к выходу, столбец - ко входу. Внутренняя структура корпуса остаётся неизвестной. Приборы и осциллограммы показаны условно; рисунок не содержит экспериментальных данных и не задаёт конкретную схему электроники.

Поэтому вопрос о восстановлении пространства нужно ставить вместе с перечнем допустимых объяснений. Если заранее известно, что внутри расположена определённая решётка и изменилось только одно соединение, задача может оказаться разрешимой. Если разрешить произвольные дополнительные узлы, неизвестные связи с измерителями и внутренние источники, те же данные допускают гораздо больше вариантов. Ограничение класса моделей является частью утверждения о результате. Его нельзя незаметно убрать из заключения после того, как вычисление нашло красивый ответ.

Здесь возникает полезное различие между обнаружением изменения и объяснением его природы. Первый вопрос звучит так: совместимы ли данные с прежней калиброванной системой? Второй требует выбрать между изменённой связью, новой внутренней степенью свободы, дрейфом элемента и иной причиной. Третий, ещё более сильный, спрашивает, имеет ли обнаруженная структура отношение к фундаментальному пространству. Каждая

следующая ступень требует новых предпосылок и новых измерений. Прибор, уверенно решающий первую задачу, не получает автоматически право отвечать на третью.

Почему одного спектра недостаточно

В главе 2 две сети из трёх узлов имели одинаковые собственные значения 0, 1 и 3, а значит, одинаковый тепловой след на каждом масштабе. Локальный отклик в среднем узле различался. Этот небольшой пример остаётся ориентиром для дальнейшего рассуждения: совпадение сжатой характеристики не означает совпадения всех доступных наблюдений.

Спектр собственных колебаний кажется естественным отпечатком геометрии. Размер полости, форма границы и связи между её частями влияют на резонансы. Однако собственные частоты не всегда определяют форму единственным образом. Гордон, Уэбб и Вольперт построили разные плоские области с одинаковыми спектрами. Этот результат относится к строго заданной математической задаче и показывает, что даже полный набор идеальных частот может потерять часть геометрической информации. Для исследования неизвестного пространства это основание расширять измеряемые данные за пределы спектрального списка. [16]

Рассмотрим вещественную симметричную матрицу L с ортонормированными собственными векторами v_n и собственными значениями λ_n. Передаточная матрица G(s) содержит и значения λ_n, и пространственные профили v_n. Её элемент связывает воздействие в узле j с откликом в узле i. Собственные значения задают положения характерных масштабов, а произведения компонент собственных векторов сообщают, какие точки участвуют в каждом режиме. Измерение пространственных откликов поэтому потенциально богаче измерения одних резонансов.

$$G_{ij}(s) = \sum_{n} \frac{v_n(i)\,v_n(j)}{s + \lambda_n}, \qquad s > 0 \qquad (6.1)$$

Дополнительная информация появляется только тогда, когда места возбуждения и регистрации действительно различаются и известны. Если прибор суммирует отклик по всей поверхности, часть пространственной структуры снова исчезает. Если узлы можно произвольно переименовывать, две записи матрицы могут описывать одну и ту же физическую сеть. Метки портов, их координаты, полярности и калибровочные коэффициенты должны быть закреплены независимо от процедуры восстановления. Иначе алгоритм способен выдать различие, которое существует лишь в выбранных обозначениях.

По той же причине спектральная размерность не является полным паспортом пространства. Она сжимает огромный объём сведений до зависимости одного числа от масштаба. Такое сжатие полезно для обнаружения переходов и сравнения семейств моделей, но не предназначено для окончательной идентификации. В исследовании квантовой геометрии отдельно показано, что разные процессы диффузии могут иметь одинаковую спектральную размерность. Следовательно, её изменение требует проверки самого закона распространения, а не только предполагаемой геометрии. [25]

Как скрытые узлы превращаются в дальние связи

Теперь разделим узлы сети на доступные и скрытые. Для краткости обозначим их индексами o и h. В установившейся линейной задаче скрытые переменные можно выразить через наблюдаемые и подставить обратно. Внешний наблюдатель получит уменьшенную матрицу, описывающую только доступные узлы. В неё попадут эффективные связи между портами, даже если непосредственно соединяющего их элемента внутри нет. Это не приближение, возникающее из плохой точности: при заданных условиях исключение переменных является точным алгебраическим преобразованием.

$$A_{\text{eff}}(s) = A_{oo}(s) - A_{oh}(s)A_{hh}(s)^{-1}A_{ho}(s) \qquad (6.2)$$

Выражение называется дополнением Шура. В электрических сетях соответствующее исключение внутренних узлов известно как редукция Крона. Дёрфлер и Булло исследовали, как при этой процедуре меняются топология и спектральные свойства графа. Для рассматриваемой задачи особенно существенен сам факт: снаружи скрытая цепочка может выглядеть как непосредственная связь. Поэтому необычное соединение восстановленной сокращённой модели ещё не устанавливает необычную связь в исходной физической системе. [17]

Простейший пример не требует матриц. Между двумя доступными точками стоят последовательно два резистора; место их соединения недоступно. Измерения постоянного тока на концах дают суммарное сопротивление. Такой объект неотличим от одного резистора с тем же сопротивлением. Сколько бы раз ни повторялось это измерение, внутренний узел не появится в данных. Если в средней точке есть заметная ёмкость, переходный процесс может раскрыть дополнительный временной масштаб. Но и тогда вывод касается класса сравниваемых электрических моделей, а не любой мыслимой внутренней конструкции.

Динамические измерения потому и ценны, что скрытые степени свободы часто проявляются через память. После исключения внутренних переменных эффективная связь начинает зависеть от s или частоты. По её задержке и форме можно отличить несколько конкретных кандидатов, совпадающих в статике. Вместе с тем динамическая редукция также является самостоятельной математической задачей; она исследована для классов обобщённых электрических сетей. Само наличие памяти не служит свидетельством новой геометрии: её может создать обычный ненаблюдаемый накопитель энергии. [20]

На рисунке 22 сопоставлены исходное устройство со скрытым узлом и его сокращённое описание. Новая линия в нижней схеме означает результат исключения переменной. Чтобы установить, существует ли соответствующий непосредственный элемент, потребуется наблюдение, чувствительное к внутренней динамике; статической эквивалентности для этого недостаточно.

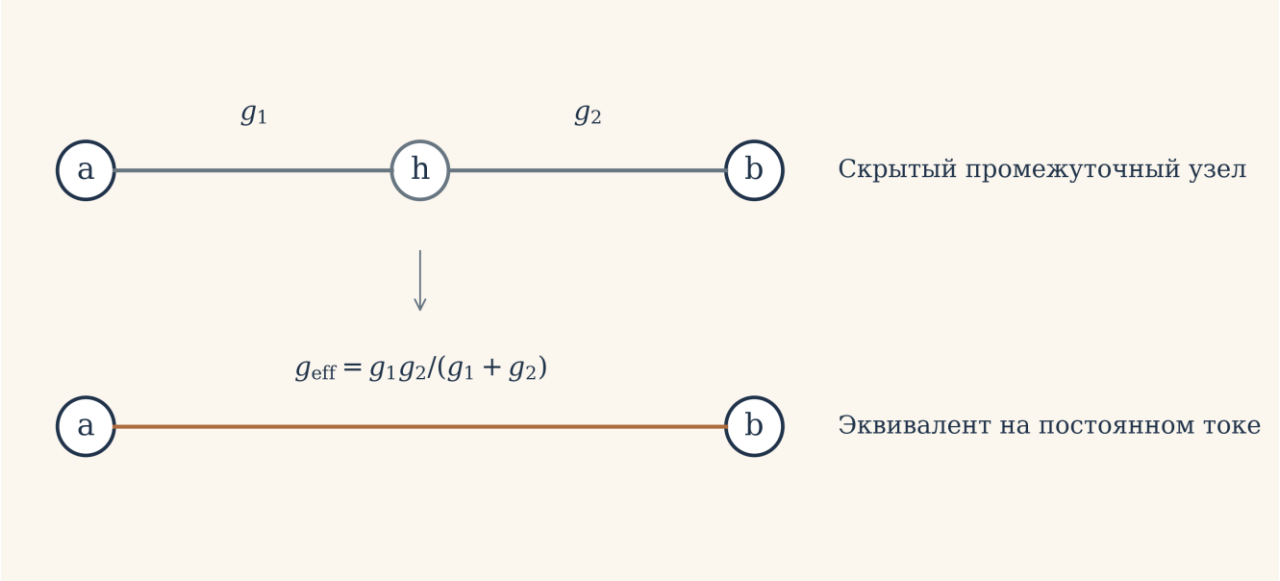


Рисунок 22. Скрытый узел и эффективная связь между доступными портами. Сокращённая схема воспроизводит выбранные внешние данные; её ребро не обязано совпадать с отдельным физическим проводником исходной сети.

Когда восстановление становится однозначным

Из сказанного не следует, что обратные задачи безнадёжны. Их разрешимость зависит от точных условий. Если известна нормировка, доступны все узлы и измерена полная матрица G(s) для вещественного положительного s, то в этой конечномерной модели оператор восстанавливается обращением матрицы. Это сильное утверждение, но его сила оплачена полным доступом к системе. Оно не переносится на ситуацию, когда измерена небольшая подматрица или неизвестны коэффициенты подключения датчиков.

$$L = G(s)^{-1} - sI \qquad (6.3)$$

В непрерывных задачах тоже существуют теоремы единственности. Сильвестр и Ульман показали восстановимость гладкой изотропной проводимости по полным граничным данным в области размерности не ниже трёх при условиях их теоремы. Этот пример важен именно своей условностью: известны тип уравнения и область, ограничен класс коэффициентов, доступны все требуемые граничные воздействия. Восемь датчиков в неизвестной среде не воспроизводят автоматически такой набор предпосылок. [18]

Кроме единственности существует устойчивость. Две разные модели могут давать неодинаковые ответы, но различие окажется меньше приборного шума. Формально задача тогда разрешима, практически - плохо обусловлена. Разумный результат исследования включает не только найденную конфигурацию, но и расстояние до ближайших конкурентов в пространстве измеряемых сигналов. Чем меньше это расстояние по сравнению с неопределённостью, тем осторожнее следует интерпретировать восстановленную картину. На графике такие альтернативы полезно показывать вместе, а не скрывать за единственной линией лучшего соответствия.

Расстояние между объяснениями

Практическая различимость начинается с выбора пространства данных. Пусть все измеряемые элементы матриц собраны в вектор μ, а C описывает их ошибки. Разность двух предсказаний сравнивается с шумом после нормировки обратной ковариацией. Если два семейства моделей допускают собственные неизвестные параметры, сравнивать нужно ближайшие допустимые предсказания, а не две произвольно выбранные типичные кривые.

$$D^2(\mathcal{M}_0, \mathcal{M}_1) = \inf_{\mu_0 \in \mathcal{M}_0,\, \mu_1 \in \mathcal{M}_1} (\mu_1 - \mu_0)^{\mathsf{T}} C^{-1} (\mu_1 - \mu_0) \qquad (6.4)$$

Здесь M_0 и M_1 обозначают множества ожидаемых данных, а не множества уже зашумлённых записей. Нулевое расстояние означает, что хотя бы некоторые представители классов неразличимы данным протоколом. Оно не запрещает различение других представителей. В частности, класс дополнительной связи с g, сколь угодно близким к нулю, соприкасается с классом без этой связи. Поэтому универсальную обнаружимость всего такого семейства нельзя получить при конечном шуме.

Когда изучается конкретный диапазон g, расстояние вычисляется именно для него. Ещё один путь - задать требуемую точность независимой калибровки и выяснить, при каких портах конкурирующие множества расходятся. Так вопрос «насколько точный нужен прибор» приобретает определённый смысл: точность нужна для отделения заданных предсказаний при заданных допустимых изменениях обычных компонентов.

Ни один одинокий минимум функции ошибки не заменяет этого сравнения. Он сообщает, где находится лучший представитель выбранного класса. Если соседний класс подходит столь же хорошо, результатом остаётся несколько объяснений. Такая запись полезна практически: она показывает, какой именно новый опыт должен изменить положение.

Когда калибровка направлена туда же, куда сигнал

Локальную причину неоднозначности удобно рассмотреть до полной нелинейной подгонки. В окрестности эталона производная по силе предполагаемого ребра задаёт вектор h. Производные по обычным весам составляют столбцы матрицы J. Если h почти лежит в пространстве этих столбцов, распределённый дрейф меняет данные почти в том же направлении, что и искомое добавление.

$$\delta\mu = h\,\delta g + J\,\delta w, \qquad \rho_{\mathrm{loc}} = \frac{\| (I - J J^{+}) h \|_2}{\| h \|_2} \qquad (6.5)$$

Запись использует одинаковые независимые дисперсии элементов данных. При общей ковариации сначала применяется соответствующее нормирование. Матрица J^{+} - псевдообратная с явно заданным отсечением малых сингулярных чисел. Значение ρloc измеряет долю сигнального направления, которая остаётся после свободного исключения калибровочных направлений. Оно характеризует линейное приближение в выбранной точке.

Показатель для исходных угловых портов	Значение
Размер матрицы чувствительности	192 × 144
Относительное отсечение сингулярных чисел	10^{-10}
Численный ранг	93
Оставшаяся доля нормы сигнального направления	2,376 %
Норма свободных коэффициентов на единицу g	575,42

Чувствительность к численному отсечению проверена отдельно. При порогах 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10} и 10^{-12} получаются те же ранг 93, остаточная доля 0,02375875 и максимальный коэффициент 146,69. Причина устойчивости здесь видна в спектре: 93-е сингулярное число составляет $1{,}1141 \times 10^{-6}$ от наибольшего, следующее - около $3{,}13 \times 10^{-16}$. Полный спектр и четыре результата сохранены программой. Это проверка численной обусловленности данной линеаризации; она не превращает свободные калибровочные направления в физически допустимый конечный дрейф.

В этой сети после проекции остаётся около 2,38 процента исходной нормы. Одновременно необходимые свободные коэффициенты очень велики: максимальный по модулю равен примерно 146,69 на единицу g. Поэтому из малой доли остатка ещё не следует, что сильную конечную связь можно имитировать двумя процентами дрейфа. Ограниченная нелинейная задача должна решаться отдельно. Такое разделение предотвращает ошибку, когда локальный вывод без пределов параметров незаметно превращают в утверждение о реальном приборе.

Геометрию этой локальной неоднозначности в пространстве записей показывает рисунок 23.

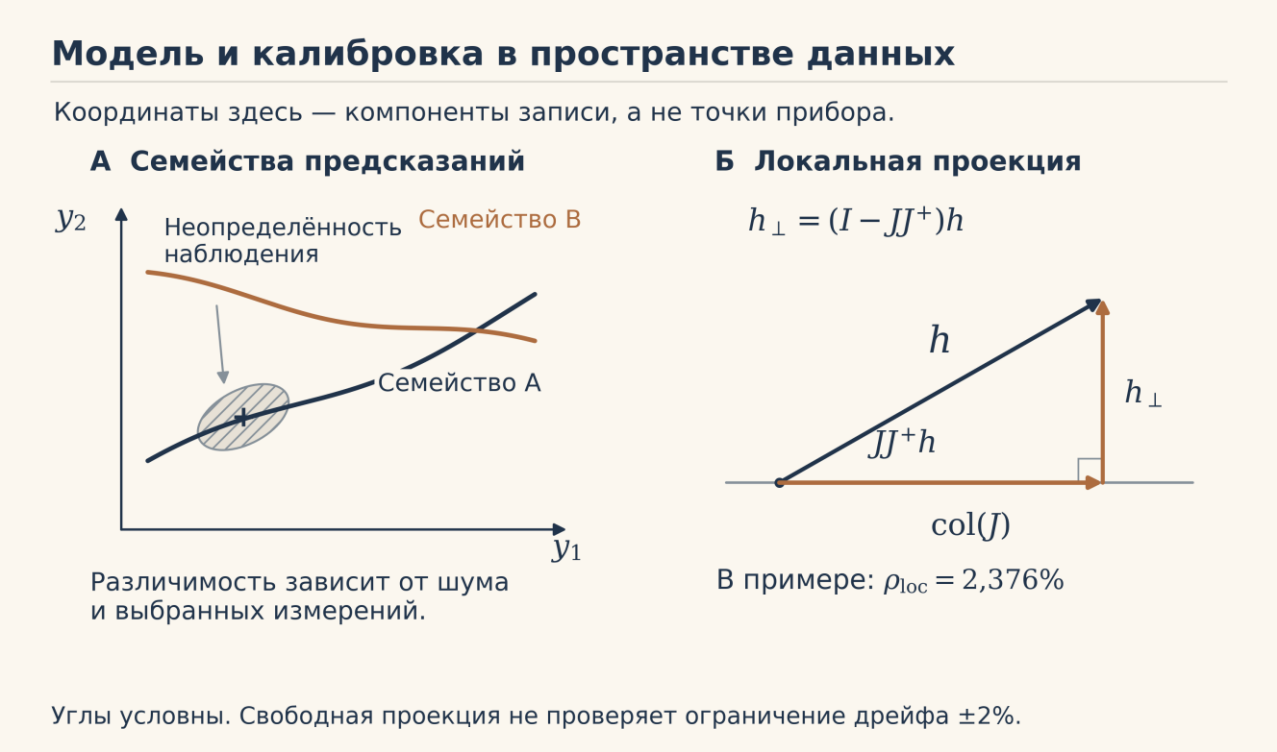


Рисунок 23. Пространство данных и локальная калибровочная неоднозначность. Слева показаны семейства предсказаний и неопределённость наблюдения; это схема, а не физическая геометрия объекта. Справа сигнальное направление h разделено на калибровочную проекцию и остаток. В сетевом примере остаток составляет 2,376 % исходной нормы. Углы рисунка условны: малая свободная проекция сама по себе не устанавливает совместимость с конечным ограничением дрейфа ±2 %.

Полезный план измерения стремится увеличить различие после учёта допустимой калибровки. Для этого можно изменить места источников, способ считывания или известный оператор второго зонда. Рост одного только сырого сигнала не гарантирует улучшения: одновременно может вырасти и сигнал калибровочного изменения. В следующей главе появятся границы, действующие для всего конечного диапазона весов.

Какие измерения добавляют различимость

Первый способ добавить информацию состоит в изменении места воздействия. Источник, расположенный рядом с предполагаемым концом скрытой связи, возбуждает систему иначе, чем удалённый источник. Второй способ - изменить временной масштаб. Медленный отклик успевает обойти длинные пути, быстрый сильнее чувствует ближайшие участки и внутренние задержки. Третий способ - внести известное локальное изменение и проверить, как перестроился весь ответ. В последнем случае исследователь получает сведения не только о состоянии системы, но и о её реакции на контролируемое вмешательство.

Для обратимой матрицы A малое известное возмущение δA приводит в первом порядке к δG = −GδAG. Эта формула связывает чувствительность наблюдаемого отклика с

расположением вмешательства. Если изменение в одном узле существенно различает две конкурирующие конфигурации, именно туда выгодно поместить переключаемый элемент или дополнительный датчик. Такое планирование намного содержательнее механического увеличения числа измерений. Сто повторов нечувствительного канала могут дать меньше полезной информации, чем один новый независимо калиброванный канал.

Наконец, следует различать восстановление графа и восстановление его физического вложения. Один и тот же граф можно реализовать проводами на столе, оптическими путями или взаимодействиями внутренних состояний. Матрица связей сама по себе не сообщает, через какое пространство проложены эти взаимодействия. Поэтому книга использует сетевую томографию как школу проверяемых гипотез. Она учит находить скрытые связи, оценивать неоднозначность и проектировать различающие опыты. Переход от этого результата к утверждениям о вакууме требует отдельного физического основания, которое будет рассмотрено после вычислительного эксперимента.

Место этой задачи среди существующих методов

Совместное восстановление нескольких графов уже является самостоятельным направлением. Юань и соавторы изучают оценивание нескольких лапласианов с общей, различающейся и разреженной структурой через специальную регуляризацию. Навarро и соавторы рассматривают частичные наблюдения стационарных графовых сигналов при скрытых узлах и похожей связности нескольких сетей. Эти работы задают полезные точки сравнения; их гарантии относятся к собственным операторам наблюдения и предпосылкам. [39] [40]

Постановка	Данные и объект	Что следует сопоставлять
Юань и соавторы	Несколько наборов графовых сигналов; совместная оценка лапласианов	Способ задания общей и различающейся структуры; предпосылки оценивания
Навarро и соавторы	Частичные узловые наблюдения; влияние скрытых узлов	Связь наблюдаемой статистики с графом и условия восстановления
Пример настоящей книги	Управляемые портовые отклики известной сети; конечные пределы дрейфа	Какие пары исключаются при изменении портов и какие остаются совместимыми

Предмет расчёта ниже уже, чем общая задача возникающего пространства. Известны узлы, базовая топология и операторы регистрации. Неизвестны ограниченные изменения весов и возможная дополнительная связь. Вклад выполненного примера состоит в проверяемой конструкции сравнения таких объяснений: точный отклик, ограниченная оболочка, опасный контрпример и измерение, разделяющее выбранные альтернативы. Самостоятельная научная новизна всей конструкции потребует отдельного сопоставления с более широкой литературой; известные тождества и сама идея нескольких зондов сохраняют своё происхождение.

Глава 7
Гипотеза общей разреженной связности

От необычного сигнала к проверяемой структуре

После обсуждения неоднозначности можно сформулировать рабочую гипотезу. Пусть несколько независимо калиброванных способов исследования одной системы указывают на небольшое число одних и тех же дополнительных соединений. Их сила может различаться, поскольку разные процессы по-разному взаимодействуют с объектом. Предполагается общность расположения связей, а не совпадение всех сигналов. Такая гипотеза достаточно конкретна, чтобы оказаться неверной: восстановленные соединения могут не совпасть, предсказание на новых портах может провалиться, а отклонение может целиком объясниться обычной калибровочной ошибкой.

На первом этапе речь идёт о конечной сети с известными узлами. Индекс α обозначает канал исследования, для которого определён собственный базовый оператор $L_0\alpha$. Это могут быть разные экспериментальные реализации общей топологии или различные физические процессы, если для них независимо обосновано соответствие узлов. Использовать один и тот же индекс точки в двух моделях недостаточно: нужно установить, что датчики действительно обращаются к одному элементу системы. Без такого сопоставления совпадающая структура матриц будет соглашением о записи, а не наблюдаемым фактом.

$$L_\alpha = L_{0\alpha} + \sum_{e=1}^{m} g_{\alpha e}\, b_e b_e^{\top}, \qquad b_e = e_{a_e} - e_{b_e}, \qquad g_{\alpha e} \geq 0 \qquad (7.1)$$

Разреженность здесь означает малость m по сравнению с числом возможных пар. Она не выводится из общих принципов физики и вводится как проверяемое ограничение модели. Если данные требуют сотен независимо настраиваемых связей, первоначальная гипотеза теряет объяснительную экономность. Если отдельному каналу разрешить произвольно не видеть любую неудобную связь, проверяемость также ослабевает. Поэтому до анализа нужно указать, какие взаимодействия должны присутствовать в участвующих каналах и какие пределы чувствительности позволяют считать отсутствие отклика содержательным.

Общий словарь и общая активная структура

Матрица возможных рёбер ещё не определяет, какие из них физически присутствуют. Пусть B содержит два столбца, а первый зонд имеет веса (g, 0), второй - (0, g). Общим оказывается словарь кандидатов; активных общих соединений нет. Поэтому гипотеза о едином устройстве должна явно выделять множество E* ненулевых связей, предельное число его элементов и участвующие чувствительные каналы.

$$E_\alpha^{\mathrm{act}} = \{e : g_{\alpha e} > 0\}, \qquad E_\alpha^{\mathrm{act}} = E_* \qquad (7.2)$$

Равенство относится только к тем каналам, для которых заранее задано ненулевое взаимодействие с проверяемыми связями. Если физическая теория допускает отсутствие взаимодействия в отдельном канале, это исключение фиксируется до анализа. Оно не может вводиться каждый раз, когда очередной зонд неудобно расходится с остальными. Для обнаружимости также нужен диапазон сил, доступный данной точности; граница $g = 0$ остаётся пределом нулевой гипотезы.

Численный двухзондовый пример главы 8 выбирает ещё более узкую версию: $m = 1$, одна и та же неупорядоченная пара, g в пределах от 0 до 3 $с^{-1}$ и известные положительные коэффициенты $\eta\alpha$, так что $g\alpha = \eta\alpha g$. В первом зонде $\eta_1 = 1$, во втором $\eta_2 = 1{,}6$. Это заданная связь двух аналоговых моделей, а не универсальное отношение взаимодействий разных природных полей. Внешние границы будут включать $g = 0$; когда ноль остаётся допустимым, существование активной связи не установлено.

Узлы сопоставлены до анализа. Для каждого зонда известны номинальные веса, оператор выбора портов, нормировка источника и отклика. Отдельно рассматриваются модель без добавления, модель общей пары и модель, допускающая разные пары в двух каналах. Везде сохраняется один и тот же предел относительного изменения обычных весов. Благодаря этому общность структуры проверяется на фоне той же калибровочной неопределённости.

Различие между общим словарём кандидатов и действительно общей активной связью видно на рисунке 24.

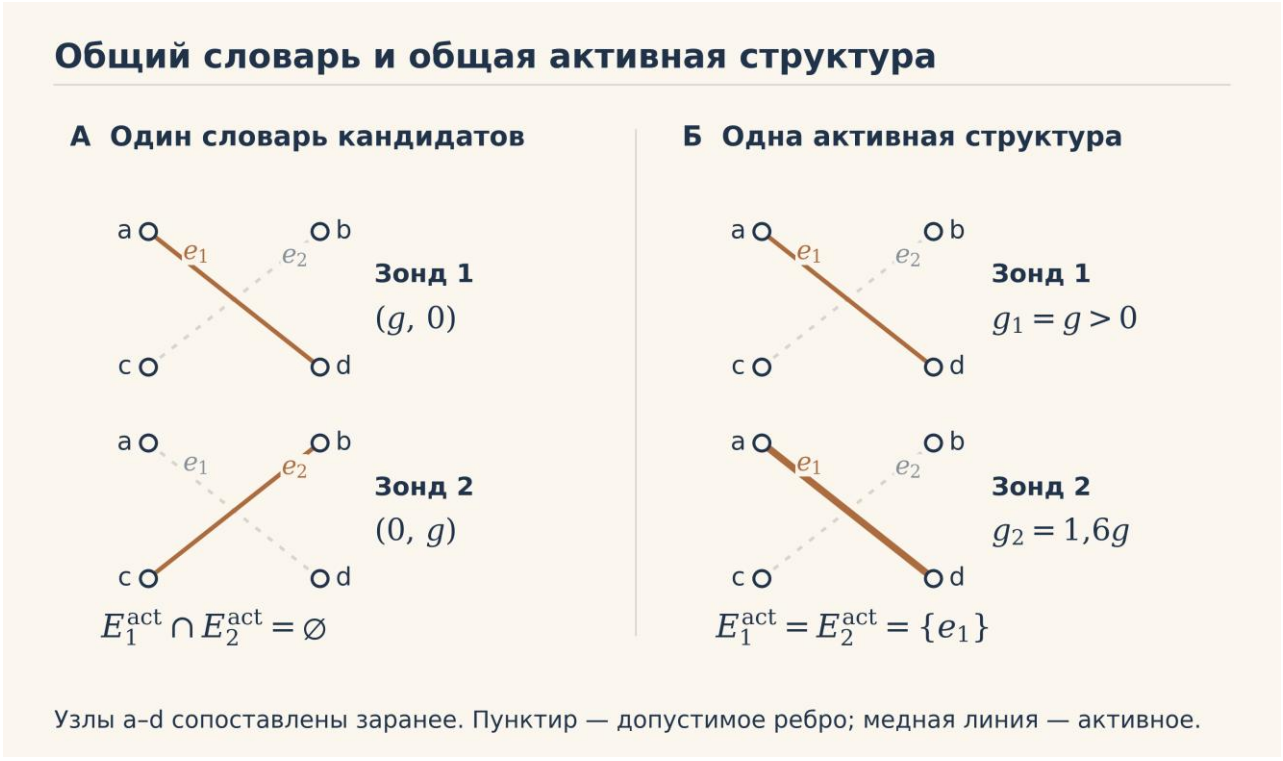


Рисунок 24. Общий словарь и общая активная структура - разные условия. В левой паре схем оба зонда допускают одни и те же рёбра e_1 и e_2, однако активируют разные элементы словаря; пересечение активных множеств пусто. Справа активна одна и та же связь между заранее сопоставленными узлами. Коэффициенты g и $1{,}6g$ повторяют заданное отношение чувствительностей двухзондовой модели, не выражая универсальный закон взаимодействия природных полей.

Что гарантируют положительные веса

Матрица L строится из положительных весов рёбер. Для произвольного вещественного вектора x её квадратичная форма является суммой квадратов разностей между соседними узлами. Отсюда следуют неотрицательность собственных значений и устойчивость затухающих режимов уравнения $\dot{x} = -Lx$. Равномерное состояние остаётся нулевым режимом, поскольку каждое соединение реагирует только на разность величин на концах. Эти свойства обеспечивают математическую согласованность выбранного аналога. Они не доказывают, что такая же динамика описывает фундаментальное пространство.

$$x^{\mathsf{T}} L x = \sum_{e} w_e \left(x_{a_e} - x_{b_e} \right)^2 \geq 0, \qquad L\mathbf{1} = 0 \qquad (7.3)$$

При вещественном s больше нуля оператор A = L + sI строго положителен и обратим. Если L имеет размерность обратного времени, s измеряется в тех же единицах, а $G = A^{-1}$ имеет размерность времени. Коэффициент добавленной связи g также измеряется в обратных секундах. Вектор b безразмерен. Поэтому произведение $g\, b^{T} G_0 b$ безразмерно, как и требуется для суммы с единицей в последующих формулах. Такая проверка единиц особенно полезна при переносе математической модели на электрическую схему или механический стенд.

Отрицательное приращение существующей связи требует отдельного рассмотрения. Оно может быть физически допустимо, если итоговый вес остаётся неотрицательным, но уже не принадлежит проверяемому здесь классу добавлений $g \geq 0$. Аналогично направленные взаимодействия, активные усилители и несимметричные операторы изменяют свойства модели. Их нельзя включать одним устным уточнением после неудачной подгонки. Расширение класса возможно, однако оно должно сопровождаться новыми условиями устойчивости, новыми формулами отклика и повторной оценкой различимости.

Точный отклик одной добавленной связи

Для одной связи вывод можно провести без обращения к громоздкой матричной алгебре. Обозначим прежнее решение $x_0 = G_0 f$, где f - заданное внешнее воздействие. После добавления связи уравнение принимает вид $(A_0 + g b b^{T})x = f$. Умножение на G_0 даёт $x = x_0 - g G_0 b (b^{T} x)$. Вся неизвестная поправка теперь зависит от единственного скаляра $\beta = b^{T} x$, то есть от разности состояния на концах добавленного соединения.

$$\beta = \frac{b^{\mathsf{T}} x_0}{1 + g\tau}, \qquad \tau = b^{\mathsf{T}} G_0 b > 0 \qquad (7.4)$$

Подставляя β обратно и учитывая произвольность воздействия f, получаем изменение всей передаточной матрицы. Это частный случай стандартного тождества Шермана - Моррисона. Его историческое происхождение важно сохранить: предметом предлагаемого исследования является постановка измерений и проверка моделей связности, а не присвоение известной алгебраической формулы. Здесь формула заново выведена для конкретного класса сетей, чтобы читатель мог проверить каждый переход и условия его применимости. [19]

$$\Delta G = -\frac{g}{1 + g\tau}\, uu^{\mathsf{T}}, \qquad u = G_0 b \qquad (7.5)$$

Отклик факторизуется в произведение одного пространственного профиля на самого себя. Поэтому его ранг не превышает единицы. Для положительного s поправка отрицательно полуопределена: любая квадратичная комбинация измеряемых величин даёт неположительный результат. Однако отдельные внедиагональные элементы могут иметь оба знака, поскольку компоненты u тоже бывают разными по знаку. Утверждение о знаке матрицы нельзя заменять утверждением о знаке каждого её элемента.

Если доступны только некоторые порты, оператор выбора P заменяет профиль u на Pu. Структура ранга один сохраняется, но амплитуда может стать очень малой или вообще исчезнуть. Отсутствие сигнала тогда свидетельствует об отсутствии чувствительности выбранных портов к данной связи. Оно не равнозначно отсутствию самой связи. Именно поэтому схема расположения датчиков является частью проверяемой гипотезы: один и тот же объект может быть различим в одной конфигурации портов и почти невидим в другой.

Переход от добавленного ребра к доступной портовой матрице представлен на рисунке 25.

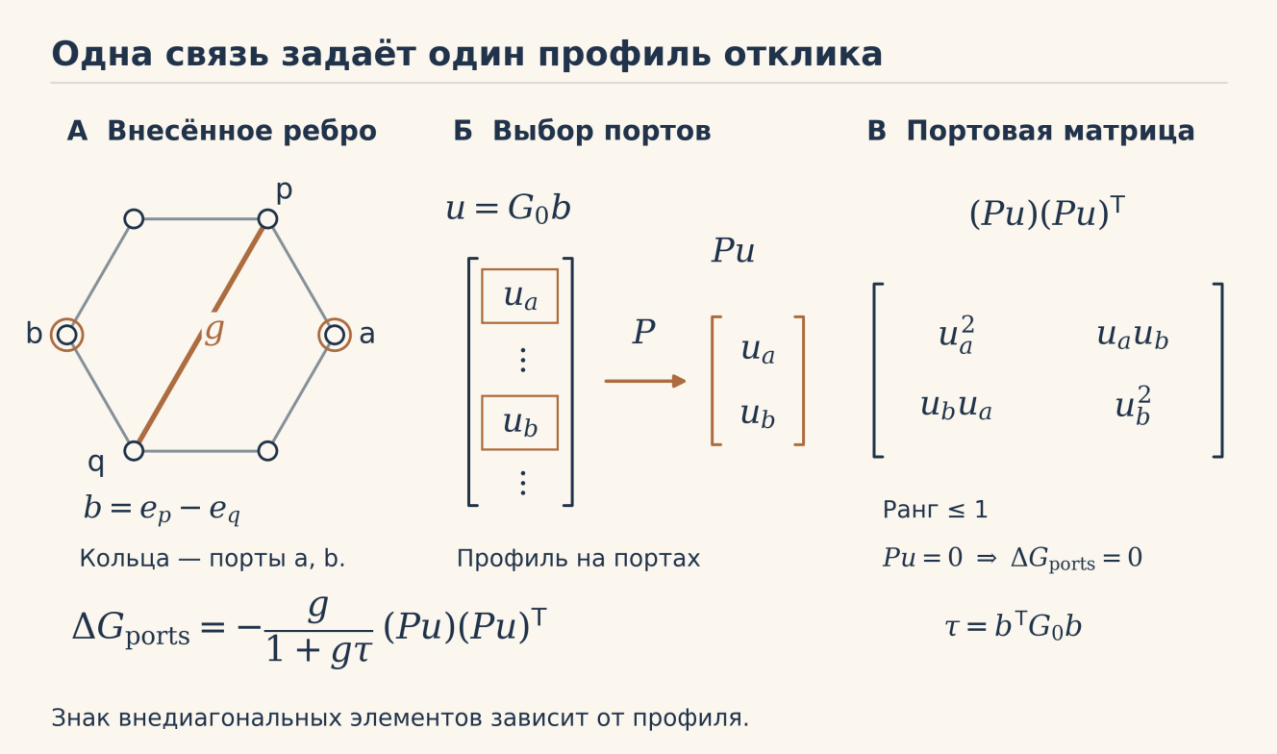


Рисунок 25. Факторизация отклика одной дополнительной связи. Ребро между p и q задаёт вектор b, а обратный номинальный оператор переводит его в профиль u. Выбор двух иллюстративных портов сохраняет только компоненты u_a и u_β. Их внешнее произведение образует наблюдаемую поправку с общим отрицательным множителем. Ранг не превышает единицы, но отдельные внедиагональные элементы могут иметь любой знак. При Pu = 0 выбранные порты не чувствуют добавленную связь.

Почему сильная связь не всегда измеряется лучше

Формула обнаруживает ещё одно ограничение. При росте g амплитуда множителя g/(1 + gτ) насыщается. Две очень сильные связи разных весов могут почти одинаково стягивать свои концы и производить близкие отклики. Прибор уверенно обнаруживает изменение, но плохо оценивает его точную силу. Это пример того, как обнаружимость и точность определения параметра расходятся даже в совершенно известной модели. Увеличение чувствительности датчика помогает лишь до тех пор, пока неопределённость не определяется самой слабой зависимостью сигнала от g.

$$\frac{\partial \Delta G}{\partial g} = -\frac{uu^{\mathsf{T}}}{(1+g\tau)^2}, \qquad \lim_{g\to\infty} \Delta G = -\frac{uu^{\mathsf{T}}}{\tau} \tag{7.6}$$

Из этого следует практический выбор масштабов измерения. Для каждой пары портов полезно оценивать не только величину сигнала, но и производную по неизвестному параметру. Канал с самым большим отклонением не обязательно даёт наименьшую погрешность g. Совместный анализ нескольких s способен улучшить положение, поскольку профиль u и величина τ изменяются с масштабом. Но он не создаёт информацию бесплатно: диапазон s ограничен временем записи, шумом и точностью модели реального прибора.

Несколько соединений и общий рисунок связей

Для нескольких добавлений соберём векторы b в столбцы матрицы B и введём диагональную матрицу Γ положительных весов. Удобно положить U = BΓ^{1/2}. Решение системы $A_0x + UU^{T}x = f$ сводится к нахождению небольшого вектора $z = U^{T}x$. Умножение выражения $x = G_0f - G_0Uz$ на U^{T} даёт линейную систему для z размерности m. После её решения получается форма стандартного тождества Вудбери.

$$\Delta G = -G_0U\left(I + U^{\mathsf{T}}G_0U\right)^{-1}U^{\mathsf{T}}G_0 \tag{7.7}$$

При s > 0 внутренняя матрица строго положительна. Поэтому поправка снова отрицательно полуопределена, а её ранг не превосходит числа линейно независимых столбцов B. Он может быть меньше числа добавленных рёбер: например, векторы рёбер цикла линейно зависимы. Измерение только части узлов способно ещё уменьшить наблюдаемый ранг. Таким образом, число заметных сингулярных значений даёт ограниченную информацию о сложности возмущения, но не является универсальным счётчиком скрытых соединений.

В многоканальной версии общий активный набор рёбер задаётся определением выше. Сами матрицы B можно записать в расширенном словаре, однако нулевые столбцовые веса не должны создавать фиктивное согласие. Проверка сравнивает модель общей структуры с моделью раздельных структур и с инструментальными причинами. Число совпавших индексов полезно только вместе с известным сопоставлением узлов и количественными предсказаниями измерений.

Калибровка входит в гипотезу

Обычные рёбра тоже меняются. В первом порядке их вклад равен $-G_0 \delta L G_0$, где δL складывается из множества небольших локальных приращений. На ограниченных портах этот вклад может быть похож на одну новую связь. Поэтому в дальнейшей процедуре эталон заменяется семейством допустимых калибровок. Предположим, что относительное отклонение каждого обычного веса по модулю не превосходит $\varepsilon = 0{,}02$. Для вычислительного опыта это точное условие генератора; в приборе оно должно опираться на независимую калибровку.

Функцию несогласия удобно строить по вектору остатков r и ковариационной матрице ошибок C. Тогда учитываются разные точности каналов и корреляции между ними. Но минимальное значение функции после перебора множества пар не следует автоматически трактовать как обычную статистику с одним подбираемым параметром. Алгоритм выбирает и непрерывную силу связи, и дискретное расположение её концов. Вероятность случайного удачного совпадения должна учитывать весь поиск, а не только последний шаг оптимизации.

$$\chi^2 = r^{\mathsf{T}} C^{-1} r \qquad (7.8)$$

Две сравниваемые модели теперь различаются только добавленной связью. В Hcal свободно изменяются обычные веса внутри заданного диапазона. В Hcal+edge действуют те же пределы и допускается дополнительная положительная связь. Порог, полученный для идеально неподвижного эталона, не переносится на это сравнение. Для ограниченного класса можно построить другую проверку, которая опирается на порядок положительных матриц и не требует находить глобальный минимум по всем 144 весам.

Оболочка всех допустимых калибровок

Каждый обычный вес записывается как $w_e = w_{0e}(1 + \delta_e)$, где $|\delta_e| \le \varepsilon$. Для любого вектора x сумма $w_{0e}\delta_e(x_a - x_\beta)^2$ ограничена по модулю величиной $\varepsilon x^{\mathsf{T}} L_0 x$. Поэтому сразу для всех допустимых весов выполняется порядок квадратичных форм. Знак «предшествует» в формуле означает именно такой порядок, а не поэлементное сравнение матриц.

$$(1-\varepsilon) L_{0\alpha} \preccurlyeq L_\alpha(\delta_\alpha) \preccurlyeq (1+\varepsilon) L_{0\alpha} \qquad (7.9)$$

При $s > 0$ все матрицы после добавления sI строго положительны. Обращение меняет порядок на противоположный. Это можно проверить, перейдя к $B^{-1/2} A B^{-1/2}$: если A не меньше B, нормированная матрица не меньше единичной, а её обратная не больше единичной. Возвращение к исходным переменным даёт нужное неравенство. Один и тот же положительный вклад ребра можно добавить к обеим границам до обращения.

$$A_{\pm,\alpha} = sI + (1 \pm \varepsilon) L_{0\alpha} + \eta_\alpha g b b^{\mathsf{T}} \qquad (7.10)$$

$$A_{+,\alpha}^{-1} \preccurlyeq G_\alpha(s) \preccurlyeq A_{-,\alpha}^{-1} \qquad (7.11)$$

Получена внешняя оболочка отклика для любого распределения допустимых весов, включая специально подобранный коррелированный дрейф. Независимость изменений рёбер

не требуется. Более того, для разных зондов можно разрешить разные векторы δα. Если они в реальности общие, класс становится уже и оболочка сохраняет силу. При ε < 1 не теряется положительность обычных проводимостей.

Граница действует только для перечисленных переменных. Неизвестные ёмкости, утечки в землю, направленные связи, скрытые активные элементы и неточная нормировка требуют отдельного включения в модель. Приписывать этой формуле защиту от любого приборного дефекта было бы неверно. Её достоинство состоит в точном охвате конечного, явно названного диапазона калибровки.

Как превратить матричную границу в измеримый интервал

Выберем заранее нормированный вектор a, поддержанный на доступных портах, и рассмотрим скаляр $z = a^{T}Ga$. Например, a может выделять один диагональный отклик или разность двух портов, разделённую на √2. Из матричного порядка следует интервал для z. Скаляр удобен тем, что его неопределённость непосредственно вычисляется из ковариации записанных элементов матрицы.

$$a^{\top} A_{+}^{-1} a \le z \le a^{\top} A_{-}^{-1} a \qquad (7.12)$$

Для предполагаемой пары обе границы зависят от g по уже выведенной формуле одной связи. Пусть R обозначает одну из двух обратных номинальных матриц при g = 0. Тогда $z_0 = a^{T}Ra$, $v = a^{T}Rb$ и $d = b^{T}Rb$. Все эти числа вычисляются до подгонки силы ребра.

$$z_R(g) = z_0 - \frac{\eta g v^2}{1 + \eta g d} \qquad (7.13)$$

Кривая не возрастает. Пересечение её значения с заданным уровнем z* находится аналитически, когда знаменатель положителен. В остальных случаях условия проверяются на концах диапазона g; бесконечное или отрицательное формальное решение не подменяет эту проверку.

$$g_* = \frac{z_0 - z_*}{\eta\,[v^2 - d(z_0 - z_*)]} \qquad (7.14)$$

Каждый контраст даёт необходимый интервал силы. Пересечение по контрастам, масштабам и зондам либо сохраняет диапазон g для пары, либо исключает её целиком. Для 64 узлов код проверяет все 2016 неупорядоченных пар без предварительного отбора. При g = 0 все они обозначают один и тот же случай отсутствия добавления; тысячи сохранившихся индексов в этом режиме не означают тысячи обнаруженных связей.

Внешняя оболочка допускает значения, которые могут требовать разных весов для разных контрастов. Поэтому выжившая пара ещё не доказывает существование одного совместимого вектора компонентов. После отсечения выполняется точная ограниченная подгонка полного отклика. Найденная допустимая точка служит свидетельством совместимости, но остановка локального оптимизатора не доказывает отсутствие такой точки. Именно это различие позволит отдельно использовать строгие исключения и полезный численный поиск.

Логику объединения скалярных ограничений и её пределы поясняет рисунок 26.

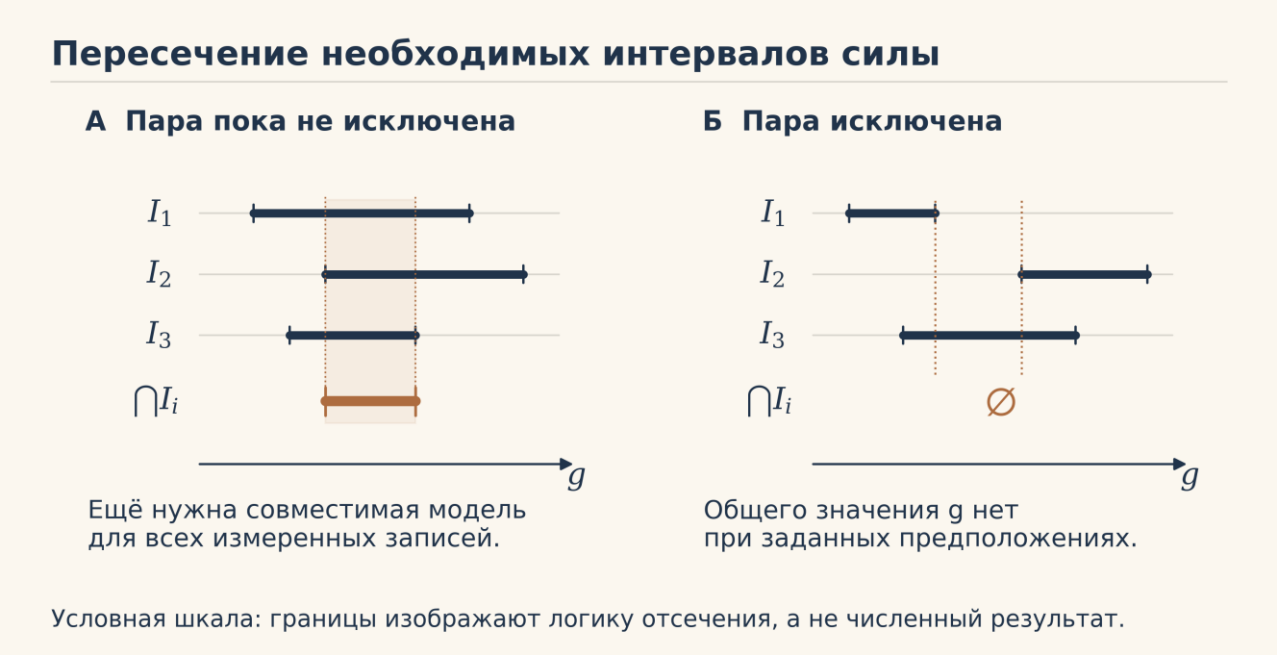


Рисунок 26. Необходимые интервалы для силы одной предполагаемой связи. Каждый контраст ограничивает g, после чего интервалы пересекаются. Непустое пересечение сохраняет кандидата, но ещё не предъявляет один вектор обычных весов, совместимый со всеми наблюдениями. Пустое пересечение исключает пару при исходных предположениях и выбранной одновременной границе ошибки. Концы интервалов здесь условны: рисунок объясняет логику внешней оболочки и не изображает результаты численного поиска.

Когда второй зонд повторяет первый

Общее ребро становится содержательным ограничением, если каналы по-разному видят допустимые альтернативы. Простейший контроль получается масштабированием всего оператора. Если $L_2 = cL_1$ и параметры Лапласа также умножены на c, второй отклик повторяет первый с известным множителем.

$$L_2 = cL_1, \quad s_2 = cs_1, \quad G_2(cs) = \frac{1}{c} G_1(s) \qquad (7.15)$$

Независимый шум такого повторения может уменьшить статистическую неопределённость. Но при нулевом шуме набор структурных объяснений остаётся прежним: любой допустимой модели первого канала соответствует масштабированная модель второго. Это строгий контроль того, что дополнительная таблица данных сама по себе не обязательно означает дополнительную геометрическую информацию.

В следующей главе сопоставляются два варианта. Один зонд масштабирует первый. Другой меняет номинальный перенос по направлениям и обращается к противоположной грани куба. Затем вводится ещё одна конфигурация портов, выбранная для разделения обнаруженных альтернатив. Такие переходы позволяют указать, какая информация изменила вывод и какой результат остаётся условным.

Глава 8
Вычислительный опыт и проверка его устойчивости

Зачем нужен небольшой опыт

Первая проверка исследовательской идеи должна быть достаточно простой, чтобы её можно было воспроизвести целиком. Слишком сложная симуляция скрывает ошибки за числом параметров и затрудняет понимание того, что именно удалось восстановить. Поэтому для этой книги выбран конечный кубический граф. Его устройство известно, дополнительная связь вносится явно, а алгоритм получает только ограниченные внешние данные. Опыт позволяет проверить формулы, построить процедуру поиска и увидеть её ограничения до изготовления прибора.

Все числа этой главы получены вычислением заданных сетей. Первый этап проверяет восстановление при точном эталоне; второй показывает, как это восстановление разрушается при его ошибке. Далее калибровка становится полноценным семейством объяснений. Последовательность нужна читателю целиком: удачный ответ, опасный контрпример и изменение измерения, которое устраняет выбранную неоднозначность.

Исходный пример, расширенная серия испытаний и протокол с ограниченной калибровкой сохранены в отдельных наборах. Их нельзя смешивать: разные порты, границы калибровки и правила вывода задают разные опыты. Все записи синтетические; изготовление стенда рассматривается отдельно в измерительном практикуме. Соответствие наборов программам приведено в сопроводительной инструкции.

Известная решётка и неизвестное соединение

В системе 64 узла, расположенные в целочисленных точках куба $4 \times 4 \times 4$. Каждый узел соединён только с ближайшими соседями по трём координатам. Всего получается 144 обычных ребра, каждое с интенсивностью 1 $с^{-1}$. Восемь углов куба используются как порты. Их индексы при принятом порядке нумерации равны 0, 3, 12, 15, 48, 51, 60 и 63. Внутренние узлы напрямую не измеряются, но их существование и исходные связи известны алгоритму.

Дополнительно соединены узлы 5 и 58 с координатами (0, 1, 1) и (3, 2, 2). Интенсивность новой связи составляет 0,3 $с^{-1}$. В прежней решётке между этими точками нужно пройти не менее пяти ближайших рёбер. Поэтому относительно заданного графа соединение является коротким обходом прежних путей. Это определение относится к сетевой геометрии. В реальной электрической реализации обычный провод может соединить эти точки, не создавая нового пространственного измерения.

На каждом масштабе измеряется изменение портовой передаточной матрицы после добавления связи. Используются четыре положительных вещественных параметра

преобразования Лапласа: 0,1; 0,3; 1,0 и 3,0 $с^{-1}$. Первые три участвуют в подгонке, последний оставлен для проверки предсказания. Эти числа не являются частотами в герцах. Они задают экспоненциальное взвешивание временного отклика; прямой переход к синусоидальному прибору требует заменить вещественный параметр соответствующим комплексным выражением.

К каждому из 64 элементов портовой матрицы на каждом масштабе добавлен независимый гауссов шум. В первом запуске его стандартное отклонение равно 10^{-5} с. Хотя истинная матрица взаимна, шум для направлений i → j и j → i выбирается независимо: предполагаются отдельно приобретённые записи. Поэтому шумная матрица не обязана быть точно симметричной. Это специальная модель регистрации, а не нарушение взаимности физической сети. Погрешность базовой калибровки в первом запуске отсутствует.

На рисунке 27 видны три разных объекта: известный кубический каркас, выбранные порты и внесённая связь. Положение портов следует читать как часть условия опыта. В последующих разделах оно изменится; это будет новый измерительный протокол с теми же 64 узлами.

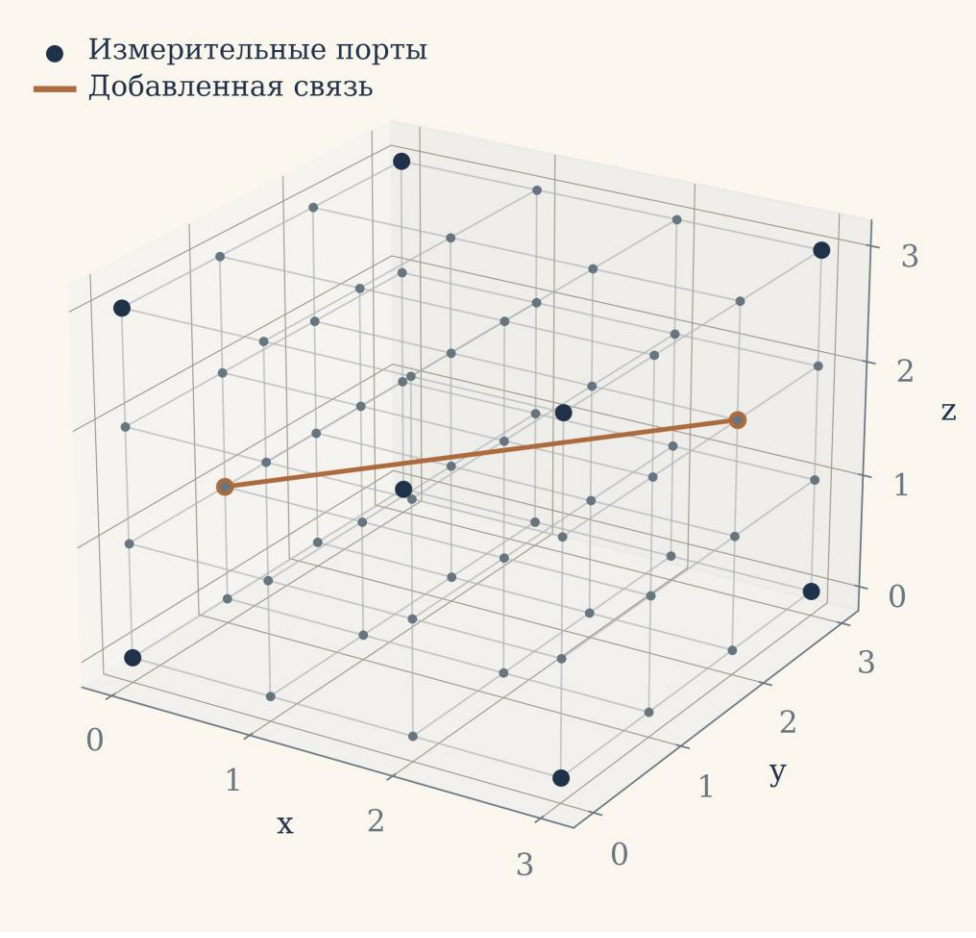


Рисунок 27. Исходный опыт на кубе 4 × 4 × 4. Восемь угловых портов наблюдают действие добавления между узлами 5 и 58. Нумерация идёт по координатам x, y, z, причём z меняется быстрее остальных.

Как алгоритм ищет ответ

Алгоритм рассматривает все 2016 неупорядоченных пар из 64 узлов. В число кандидатов входят и уже существующие локальные рёбра: добавление к ним положительного веса означает обычное усиление связи. Для каждой пары подбирается g в диапазоне от 0 до 3 $с^{-1}$. Предсказание вычисляется по точной формуле предыдущей главы, после чего сравнивается с тремя шумными матрицами. Таким образом, используются 192 направленные записи. Алгоритму заранее сообщён класс объяснения: изменена ровно одна положительная связь на известном наборе узлов.

Начальное состояние генератора случайных чисел и вычислительная среда зафиксированы в сопроводительном комплекте. Близость повторного результата до последних знаков зависит от точности численных процедур. Поэтому следует сравнивать устойчивые цифры, выбранную пару и поведение ошибок; совпадение машинного округления само по себе не является физическим результатом.

Внутри программы прямое обращение матрицы сравнивается с аналитической поправкой. Относительное расхождение на четырёх масштабах лежит приблизительно между $2{,}4 \times 10^{-14}$ и $4{,}4 \times 10^{-14}$. Отношение второго сингулярного значения полной безошибочной поправки к первому также находится около машинной точности. Это проверяет реализацию тождества и ранга один. Такая точность не относится к восстановлению по шумным данным и тем более не характеризует возможную точность будущего физического прибора.

Проверку ранга иллюстрирует рисунок 28. Здесь показаны первые восемь из 64 сингулярных чисел полной матрицы изменения отклика. Это другая матрица, чем измеряемый портовый блок 8 × 8. Почти нулевые последующие числа подтверждают алгебраическую факторизацию безошибочного полного отклика; шумный портовый поиск решает отдельную обратную задачу.

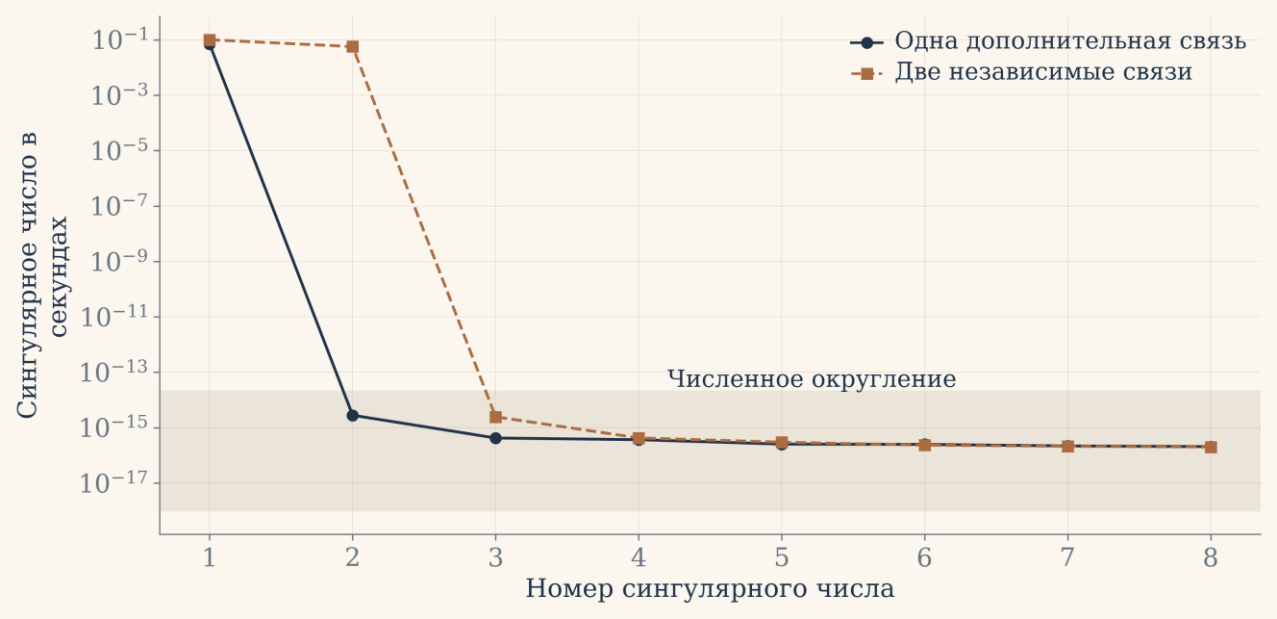


Рисунок 28. Первые восемь сингулярных чисел полного отклика размерности 64 × 64. Ранг один относится к точному добавлению одной связи при известном эталоне. Число показанных значений не означает число портов.

Что дал первый запуск

Лучшим кандидатом оказалась именно пара 5 и 58. Восстановленная интенсивность равна 0,2994421092 $с^{-1}$; относительная ошибка составляет примерно 0,186 процента. Сумма нормированных квадратов остатков на обучающих данных равна 163,636 при 192 записях. Это согласуется с хорошим соответствием выбранной шумовой постановке, однако само отношение этих чисел нельзя превращать в универсальную вероятность правильности найденной пары: выбор происходил среди множества кандидатов.

Величина	Результат первого запуска
Внесённая пара	5 и 58
Восстановленная пара	5 и 58
Внесённая интенсивность	0,3000000000 $с^{-1}$
Восстановленная интенсивность	0,2994421092 $с^{-1}$
Относительная ошибка интенсивности	0,18596 %
Ошибка предсказания чистого отложенного отклика	0,17179 %
Отложенная χ^2 на одну запись	1,30606

Следующие два кандидата, пары 5 и 42 и 21 и 58, дали обучающие значения χ^2 около 70 584 и 70 763. В этом конкретном малошумном примере различие между лучшим и ближайшими рассмотренными конкурентами велико. На отложенном масштабе 3 $с^{-1}$ относительная ошибка предсказания безошибочного отклика составила около 0,172 процента.

Эта величина вычислена относительно известной синтетической истины. В настоящем эксперименте такой истины нет, и непосредственно доступны только остатки относительно новых шумных измерений.

Первый запуск поэтому показывает возможность восстановления в тщательно ограниченной задаче. Он не оценивает долю успешных результатов при других парах узлов, уровнях шума или ошибках эталона. Особенно благоприятно то, что прямое вычисление и обратный поиск используют один и тот же класс оператора. Отложенный масштаб проверяет предсказание внутри этого класса, но не превращает симуляцию в независимую проверку физической модели. Следующий этап специально ослабляет часть благоприятных условий.

Матрица на рисунке 29 показывает пространственный рисунок отклика. Знак конкретной внедиагональной ячейки определяется произведением компонент профиля u. Поэтому положительная ячейка не противоречит отрицательной полуопределённости всей поправки. Для восстановления используется согласованная матрица целиком, а не один особенно заметный элемент.

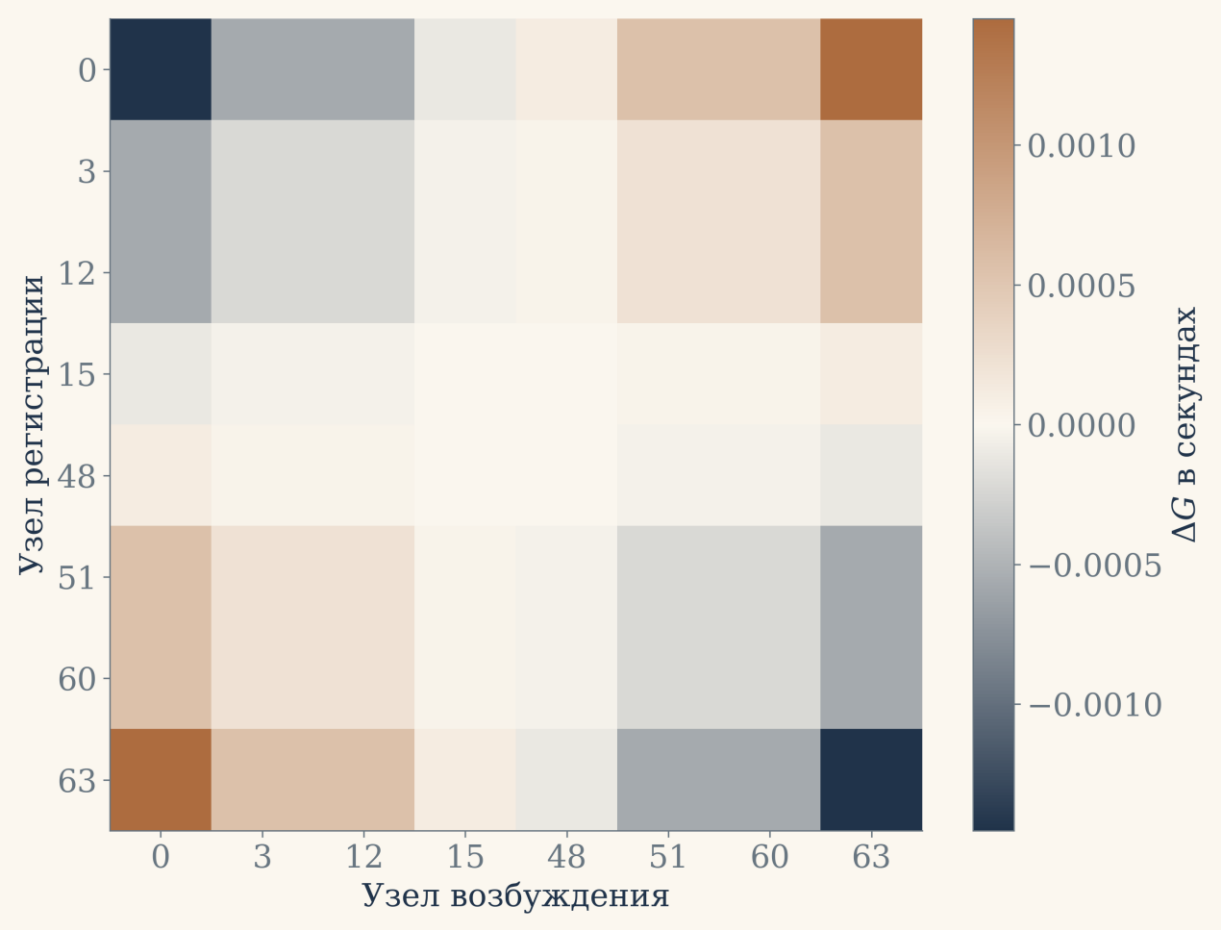


Рисунок 29. Портовое изменение отклика в первом опыте. Пространственный рисунок несёт информацию о предполагаемых концах связи, которую теряет одна суммарная амплитуда.

Серия проверок вместо одного примера

Расширенная программа выполняет шесть сценариев по двадцать реализаций. В первых трёх меняется только стандартное отклонение регистрационного шума: 10^{-5}, 10^{-4} и 10^{-3} с. В двух следующих добавляется неизвестная алгоритму ошибка обычных рёбер. Их веса умножаются на независимые положительные логнормальные множители со средним, равным единице. Стандартное отклонение логарифма составляет 0,005 или 0,02, что для столь малых значений соответствует приблизительно 0,5 и 2 процентам относительного разброса. Последний сценарий усиливает локальное ребро 5-6 вместо дальней связи.

В расширенном поиске все 2016 пар первоначально оцениваются на сетке из 161 значения интенсивности, включая ноль; затем уточняются двенадцать лучших. Отдельная проверка для трёх опубликованных наборов восстанавливает исходный порядок генерации данных и сравнивает ускоренный поиск с уточнением каждой пары на всём интервале от 0 до 3 $с^{-1}$, включая оба конца. Порядок запуска проверки приведён в сопроводительной инструкции.

Сценарий	Шум σ в секундах	Верные пары	Медиана ошибки g	Медиана χ^2 на запись
Точный эталон	10^{-5}	20 из 20	0,131 %	0,973
Точный эталон	10^{-4}	20 из 20	1,306 %	0,973
Точный эталон	10^{-3}	12 из 20	15,913 %	0,965
Разброс эталона около 0,5 %	10^{-4}	18 из 20	10,134 %	7,290
Разброс эталона около 2 %	10^{-4}	1 из 20	73,378 %	75,956
Контроль локального ребра	10^{-4}	19 из 20	3,221 %	0,982

Медиана ошибки g в таблице рассчитана по всем двадцати запускам каждого сценария, включая случаи неправильной пары. При неверных концах найденный вес уже относится к другому соединению; сравнение с истинными 0,3 $с^{-1}$ тогда служит общим диагностическим показателем алгоритма, а не точностью оценки одной и той же физической величины. Доля правильных пар также описывает лишь небольшой фиксированный ансамбль. Даже 20 успехов из 20 не доказывают стопроцентную надёжность: интервал Уилсона уровня 95 процентов для такого счётчика составляет приблизительно от 0,839 до 1.

Внутри каждого сценария использованы разные случайные начальные состояния от 12000 до 12019. Между сценариями этот набор повторяется, чтобы сравнение условий было более прозрачным. Поэтому все 120 запусков нельзя считать независимыми испытаниями одной общей вероятности успеха. Кроме того, основные серии проверяют одну дальнюю пару, а контроль - одну локальную. Полученные доли нельзя переносить на произвольное расположение скрытого соединения без нового ансамбля по геометрии и весам.

Во всех трёх проверках выбрана та же пара 5-58, а различие найденных интенсивностей меньше 10^{-7} $с^{-1}$. Для двух записей совпали и ранее сохранённые малые расхождения; для первой последние знаки зависят от полной процедуры численной минимизации. Новый файл

сохраняет оба значения и не выдаёт реконструкцию отсутствовавшего старого режима за побитовое воспроизведение. Эта проверка относится к трём наборам данных, а не доказывает глобальную оптимальность для любого сигнала.

На рисунке 30 нужно различать правильность выбранной пары и величину остатка. При шуме 10^{-3} с неправильная пара ещё способна описывать данные с остатком около единицы. При ошибке эталона остаток часто становится большим. Эти разные механизмы требуют разных контрольных опытов.

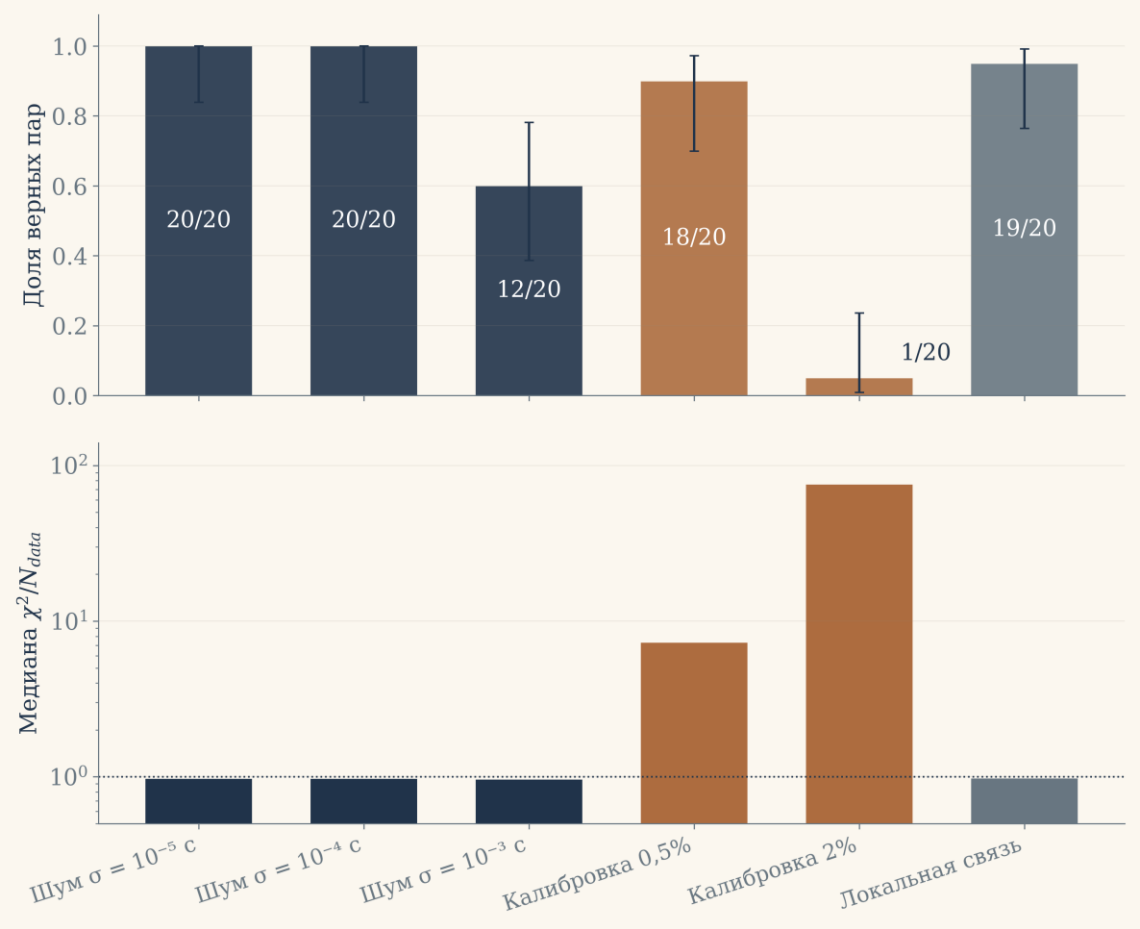


Рисунок 30. Расширенная серия испытаний. Показатели восстановления и остатка относятся к указанным отдельным ансамблям; общее число запусков не является одной выборкой надёжности метода.

Почему ошибка эталона важнее красивого минимума

При точной калибровке увеличение шума прежде всего ухудшает различимость кандидатов. В самом шумном сценарии правильные концы найдены в двенадцати случаях из двадцати. При этом медиана обучающего χ^2 на запись остаётся около единицы. Причина проста: неправильная конфигурация иногда достаточно хорошо воспроизводит слабый сигнал на фоне большого шума. Приемлемый остаток является необходимой проверкой модели, но сам по себе не устанавливает истинность восстановленной внутренней картины.

Неучтённый разброс эталона действует иначе. При приблизительно половине процента ошибки правильная пара ещё находится в восемнадцати реализациях, но медианная ошибка

интенсивности увеличивается до десяти процентов, а нормированный остаток заметно превышает единицу. При двух процентах правильная пара сохраняется лишь в одном случае из двадцати. Алгоритм продолжает уверенно выбирать какой-то лучший ответ, хотя его предпосылка об идеально известной исходной решётке уже нарушена. Значение слова «лучший» здесь ограничено ошибочным набором кандидатов.

Нужно точно понимать способ внесения этой ошибки. Реальный для симуляции базовый граф отличается от номинального, но из сигнала вычитается именно номинальный отклик. Это моделирует нераспознанное расхождение с калибровкой. Если в физическом опыте перед каждым переключением измерять фактический базовый отклик при тех же условиях, часть постоянного отклонения можно устранить. Поэтому приведённые проценты не являются универсальными пределами допустимости компонентов. Они показывают цену конкретного пропуска в модели измерений и мотивируют дополнительную процедуру калибровки.

Отложенная проверка тоже требует внимательного чтения. При разбросе около 0,5 процента медианная относительная ошибка предсказания чистого отложенного изменения достигает примерно 99 процентов, тогда как нормированная ошибка относительно шумных данных составляет около 1,49 на запись. Эти числа не противоречат друг другу: слабый чистый сигнал может быть плохо восстановлен, оставаясь сравнимым с шумом. Указывать только относительную ошибку или только нормированный остаток было бы недостаточно; вместе они показывают чувствительность и качество описания.

Порог обнаружения и локальный контроль

Дополнительно выполнены по сто нулевых реализаций без внесённой связи и с точным эталоном для каждого из трёх уровней шума. В каждой работает весь алгоритм выбора пары. Регистрируется улучшение χ^2 по сравнению с нулевой моделью. Эмпирические 95-е процентили равны соответственно 12,3293978; 12,3296483 и 12,3320514. Поскольку поиск повторён целиком, процедура учитывает эффект отбора кандидата. Но сто реализаций на уровень дают только демонстрационный порог для этой постановки; независимая проверка заявленной частоты ложных срабатываний ещё необходима.

Во всех двадцати реализациях каждого ненулевого сценария улучшение превышает соответствующий порог, включая серию, где правильная пара найдена всего однажды. Это наглядно разделяет обнаружение отличия и идентификацию причины. В сценариях ошибочного эталона настоящая дополнительная связь присутствует, поэтому сами по себе они не показывают ложную интерпретацию одного лишь дрейфа. Для проверки этой возможности выполнен отдельный контроль, описанный ниже. Локальный контроль также напоминает, что превышение порога не устанавливает дальний характер взаимодействия.

Локальный контроль столь же содержателен. Обычное усиление ребра 5-6 определяется в девятнадцати реализациях из двадцати и даёт ту же структуру аналитической поправки. Следовательно, ранг один и значительное улучшение подгонки не являются уникальной подписью дальней связи. Отличие определяется восстановленным расположением концов относительно независимо известной решётки. Именно включение локальных кандидатов не

позволяет алгоритму назвать любое изменение нелокальным только потому, что ему предложены исключительно экзотические варианты.

Когда обычный дрейф получает неверное имя

В дополнительном контроле новая связь вообще не вносится. Меняются только веса 144 обычных рёбер, а алгоритм продолжает объяснять отклонение одним положительным добавлением. Для разбросов около 0,5 и 2 процентов выполнено по двадцать реализаций с шумом 10^{-4} с и начальными состояниями генератора от 44000 до 44019. Во всех сорока случаях улучшение превышает порог, откалиброванный на номинальной сети без дрейфа. Внешне процедура снова выдаёт выбранную пару и положительную интенсивность, хотя исходная причина состоит в распределённом изменении известных компонентов.

Контроль без новой связи	Выше номинального порога	Медиана найденного g	Медиана χ^2 на запись
Разброс обычных рёбер около 0,5 %	20 из 20	0,006220 $с^{-1}$	5,563
Разброс обычных рёбер около 2 %	20 из 20	0,024068 $с^{-1}$	76,440

Здесь нельзя говорить о ложном обнаружении любого изменения: система действительно отличается от эталона. Ошибочна более узкая интерпретация, приписывающая отличие одной добавленной связи. Большие остатки дополнительно показывают неполноту этого объяснения. Если смотреть только на улучшение относительно нуля и игнорировать абсолютное качество модели, обычный дрейф легко получает убедительное, но неверное имя. Поэтому критерий будущего исследования должен одновременно требовать обнаружимого отличия, приемлемого полного описания и преимущества перед реалистичными альтернативами калибровки.

Итоговая расширенная проверка содержит 460 синтетических реализаций: 120 с добавленной или усиленной связью, 300 номинальных нулевых и 40 только с ошибкой калибровки. Эта сумма характеризует объём выполненного расчёта, но не образует единую выборку одинаково распределённых независимых опытов. Разные серии отвечают на разные вопросы, а случайные начальные состояния внутри сопоставляемых сценариев повторяются. Статистические выводы следует формулировать отдельно для каждой постановки и сохранять её ограничения.

Дрейф, который оставляет хороший остаток

Большой остаток позволяет заметить неполноту односвязной модели. Более трудный случай возникает, когда обычный дрейф описывается ею хорошо. Для его построения выбран слабый номинальный отклик пары 5-58 при $g = 0{,}03$ $с^{-1}$. Ограниченная линейная задача подбирает изменения 144 обычных весов в пределах ±2 процента, приближающие этот

отклик на трёх исходных масштабах. Затем вычисляется точный нелинейный ответ полученной сети, в которой дополнительного ребра вообще нет.

Только после фиксации весов добавляется независимый гауссов шум со стандартным отклонением 10^{-4} с и seed = 271828. Первоначальный алгоритм выбирает пару 5-58, оценивает g = 0,02836284 $с^{-1}$ и улучшает χ^2 на 85,69 при номинальном демонстрационном пороге 12,33. Обучающий остаток равен 0,8884 на запись, отложенный - 0,7829. Перебор всех 2016 пар подтверждает этот выбор. Значит, ошибка причины сохраняется и при полном рассмотрении пар.

На рисунке 31 сопоставлены слабое добавление и подобранный дрейф. Их матрицы близки, хотя внутренние причины различны. Построение специально использует коррелированные изменения весов. Это свидетельство существования опасного случая; оно не оценивает частоту такой конфигурации в исходном независимом логнормальном ансамбле.

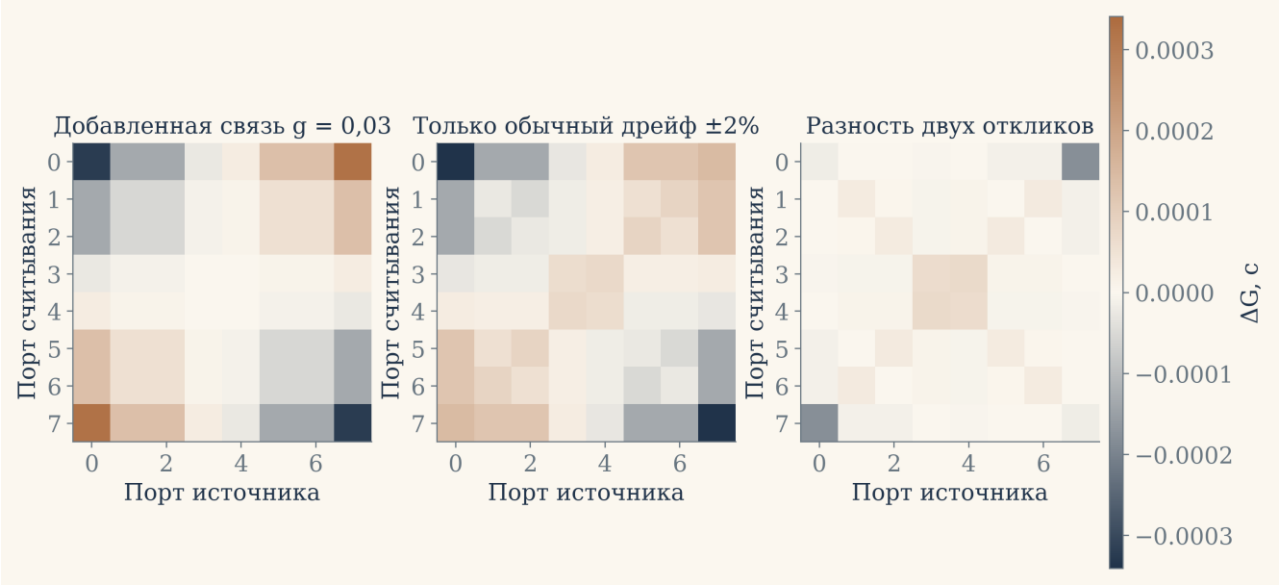


Рисунок 31. Слабая связь и ограниченный дрейф на исходных угловых портах при s = 0,1 $с^{-1}$. Все панели имеют одинаковую цветовую шкалу. Правая показывает малую разность двух точных откликов до добавления регистрационного шума.

Модель для тех же данных	χ^2 на запись	Что можно заключить
Номинальная сеть плюс одна связь	0,8884	Хорошее описание не определяет причину
Только ограниченная калибровка	0,6105	Найдена допустимая точка без дополнительной связи
Та же калибровка плюс связь	0,6085	Добавление почти не меняет остаток

Ограниченная подгонка начала поиск с номинальных весов и нашла калибровочную точку с χ^2 = 117,21 на 192 записи. Число меньше 99-процентного радиуса гауссова шара, равного 240,50 для 192 компонент с известными независимыми дисперсиями. Все найденные веса

удовлетворяют исходным границам. Это достаточное свидетельство того, что данные допускают обычную калибровку.

Оптимизатор в этой задаче достиг лимита 160 вычислений и не сообщил окончательной сходимости. Для предъявленного вывода это не препятствие: уже найденная точка проверена прямым вычислением и удовлетворяет ограничениям. Утверждения о достигнутом глобальном минимуме нет. Небольшое дополнительное снижение остатка в модели со связью также не интерпретируется как её обнаружение. Правильный ответ процедуры здесь - калибровочная неоднозначность.

Проверка, которая почти не видит сигнал

Исходное отложенное значение s = 3 $с^{-1}$ выглядело естественным продолжением первых трёх масштабов. Но у угловых портов именно в этом режиме дополнительная связь видна особенно слабо. Для g = 0,3 $с^{-1}$ и шума 10^{-4} с отношение нормы матрицы сигнала к стандартному отклонению одного элемента составляет 75,33; 37,86; 6,75 и 0,388 при последовательных значениях s = 0,1; 0,3; 1 и 3 $с^{-1}$.

$$\rho = \frac{\| \Delta G \|_F}{\sigma}, \qquad \mathbb{E}\left[\frac{\chi^2_{\mathrm{null}}}{64}\right] = 1 + \frac{\rho^2}{64} \qquad (8.1)$$

В последнем режиме даже нулевое предсказание дополнительного сигнала даёт ожидаемое χ^2 на запись около 1,00235. Поэтому благополучный остаток здесь почти не проверяет восстановленную структуру. В более точном первом опыте с шумом 10^{-5} с ситуация лучше: отношение сигнала к шуму увеличивается в десять раз. Замечание относится к конкретному режиму, а не к самому принципу отложенного предсказания.

Для нового протокола параметры выбираются по расчётной чувствительности до новой серии записей. Рисунок 32 сравнивает старые угловые порты с правой гранью второго зонда. В новом режиме при s = 0,3 $с^{-1}$ номинальная норма сигнала равна 224,88 стандартным отклонениям при σ = 10^{-4} с. В последующем более шумном испытании σ = 10^{-3} с эта величина уменьшается в десять раз и всё ещё заметна.

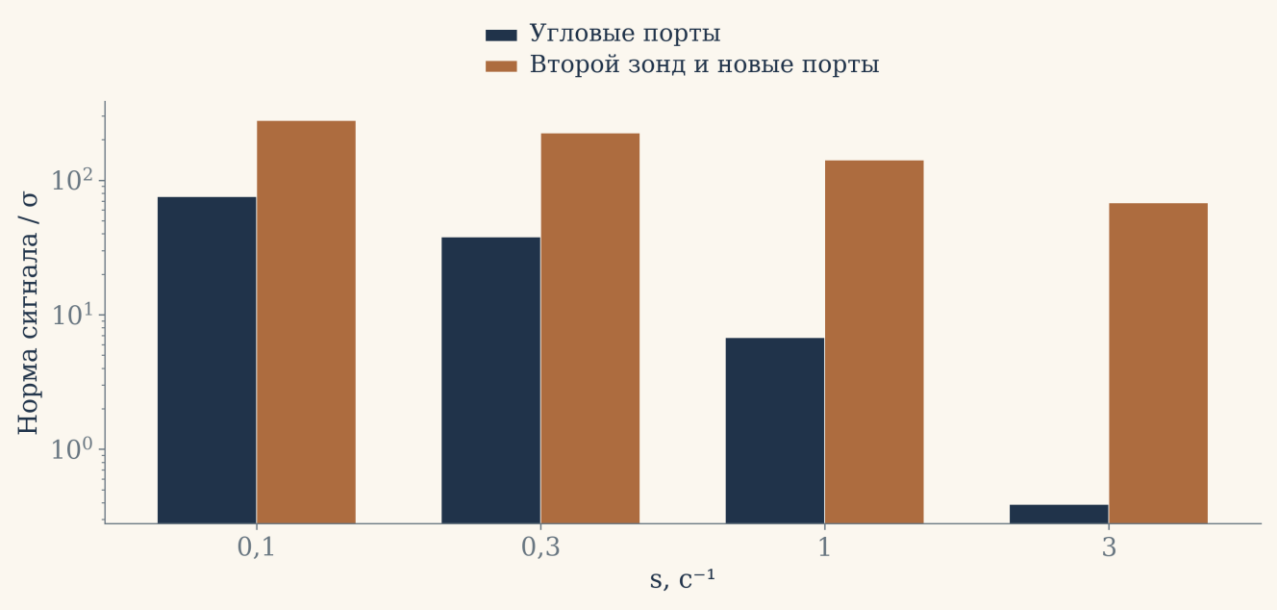


Рисунок 32. Номинальная чувствительность при g = 0,3 c^{-1} и одинаковом σ = 10^{-4} с. Вторая конфигурация одновременно меняет оператор и порты; график показывает итоговый выигрыш выбранной схемы, не разделяя вклады этих двух изменений.

Одна отдельная запись второго зонда при s = 0,3 c^{-1} получена с seed = 930001. Для этой проверки ограниченная подгонка первого зонда проводится при заранее заданной проверяемой паре 5-58. Сам первый зонд оставляет 52 пары во внешней области, поэтому здесь проверяется условное предсказание выбранной пары, а её однозначное восстановление одним каналом не установлено. Это предсказание даёт $\chi^2/64$ = 1,081; номинальная модель без ребра - 7,819. Здесь отложенные данные действительно способны отвергнуть нулевой номинальный отклик. При этом ошибка переноса оценки дрейфа остаётся самостоятельным вопросом: нулевую калибровочную модель с разрешёнными изменениями весов проверяют полными оболочками, а не только сравнением с неподвижным эталоном.

Два зонда видят разные концы одной связи

Теперь вводится новый опыт. Первый зонд наблюдает узлы 0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15 на левой грани куба и имеет номинальные веса 1 c^{-1} по всем направлениям. Второй наблюдает правую грань через узлы 48, 51, 53, 54, 57, 58, 60, 63. Его номинальные веса по направлениям x, y, z равны соответственно 2; 0,7; 1,4 c^{-1}. Сила общей пары во втором зонде по условию равна 1,6g.

Используются три прежних параметра Лапласа, но это уже другие пространственные данные. В генераторе обычные веса имеют общий относительный дрейф в пределах ±1 процента; анализ разрешает весь диапазон ±2 процента. Истинная пара равна 5-58, g = 0,3 c^{-1}. Независимый регистрационный шум имеет σ = 10^{-3} с. В каждом портовом блоке заранее заданы восемь диагональных и 28 разностных нормированных контрастов, всего 108 на зонд.

Набор наблюдений	Не исключённые пары
Только левая грань	52

Набор наблюдений	Не исключённые пары
Только правая грань	48
Левая грань и её масштабированный дубль	51
Два различных зонда и противоположные грани	1

Оба зонда по отдельности исключают чистую калибровку, но оставляют десятки возможных вторых концов. В совместной внешней области сохраняется только пара 5-58 с интервалом g от 0,202 до 0,429 $с^{-1}$. Найдена и точная ограниченная подгонка одного общего вектора относительных весов: g = 0,30533 $с^{-1}$, $\chi^2/384 = 0{,}7669$. Следовательно, в этом примере ограничение общей парой выдержало обе разные системы наблюдений.

На рисунке 33 масштабированный дубль оставляет 51 пару против 52 в первом зонде. Небольшое изменение связано с независимым шумом; во всех соответствующих безошибочных данных число одинаково и равно 44. Тождество масштабирования выполнено с относительной ошибкой около $7{,}4 \times 10^{-16}$. Различный зонд с новыми портами сокращает внешнюю область гораздо сильнее. Пример показывает значение новой измерительной информации; он не устанавливает, какая её часть связана только с анизотропией, а какая - только с перемещением портов.

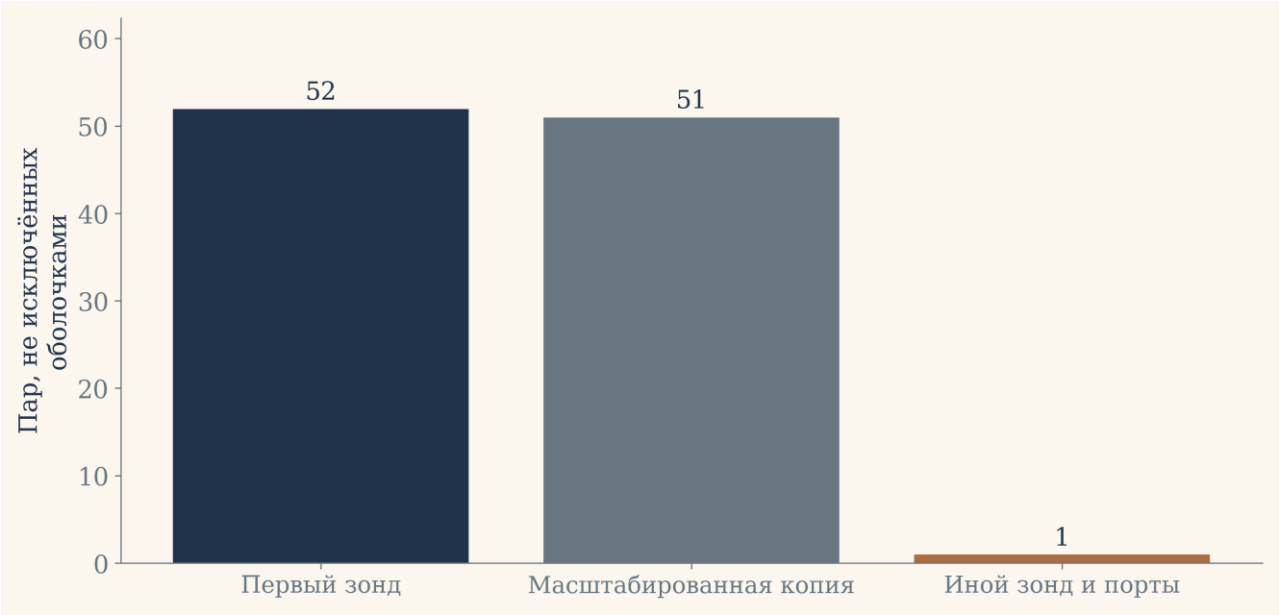


Рисунок 33. Число пар, сохранившихся после консервативной проверки в одном шумном примере. Оставшаяся пара требует дальнейшей проверки существования совместной модели и контроля раздельных структур.

Оболочка отдельного диагонального контраста второго зонда показана на рисунке 34. Синий диапазон охватывает все допустимые веса для выбранной пары, оранжевая полоса задаёт одновременный интервал наблюдения. Пересечения разных таких полос дают ограничения на g. Нулевой вес в сильном случае уже вне допустимого диапазона.

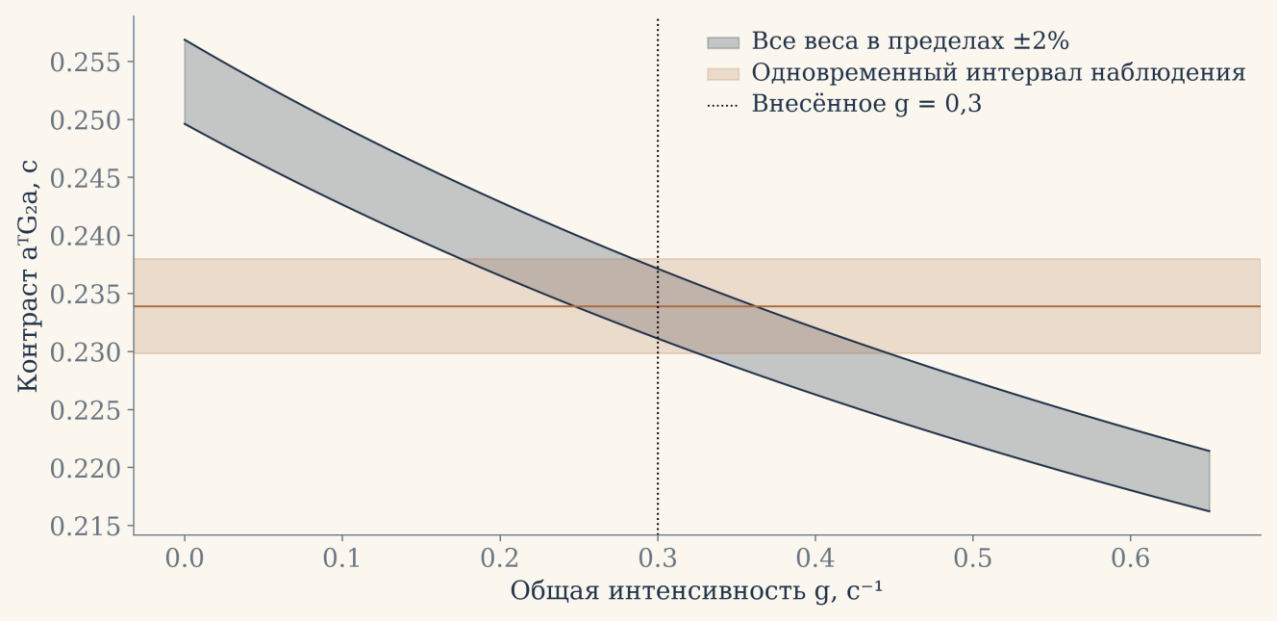


Рисунок 34. Контраст G_2,58,58 при s = 0,3 с⁻¹. Границы учитывают любой дрейф обычных весов в пределах ±2 процентов. Оранжевая полоса использует поправку на весь заранее заданный набор из 216 скалярных наблюдений.

Опасное согласие двух разных структур

Одна оставшаяся общая пара всё ещё не равна доказательству общности. В следующем контроле первый зонд содержит ребро 5-58, а второй - ребро 6-57. Силы связаны тем же известным коэффициентом 1,6; обычный дрейф и регистрационный шум сохранены. Из наблюдений левой грани легко выделяется конец 5, из наблюдений правой - конец 57. Совместный поиск склеивает эти локальные сведения в пару 5-57.

Этот гибрид проходит не только скалярные оболочки. Полная общая модель с допустимым дрейфом даёт $\chi^2/384 = 0{,}8341$ при g = 0,2933 с⁻¹. Модель двух действительных раздельных пар также совместима: $\chi^2/384 = 0{,}8096$. Следовательно, сами эти записи не устанавливают, что обнаруженное согласие относится к одной физической связи. Два правдоподобных объяснения требуют различающего измерения.

После изучения этого конструктивного примера спроектирована контрольная схема: в обоих зондах доступны порты 0, 5, 6, 15, 48, 57, 58, 63, а измерение проводится при s = 0,3 с⁻¹. Эти порты видят оба конкурирующих конца и выбранные соседние области. Схема зафиксирована до новой серии шумовых реализаций. Такой порядок является проверкой спроектированного протокола; он не выдаётся за заранее зарегистрированное слепое подтверждение первоначальной гипотезы.

Действительные рёбра, ложный общий кандидат и новый выбор портов сопоставлены на рисунке 35.

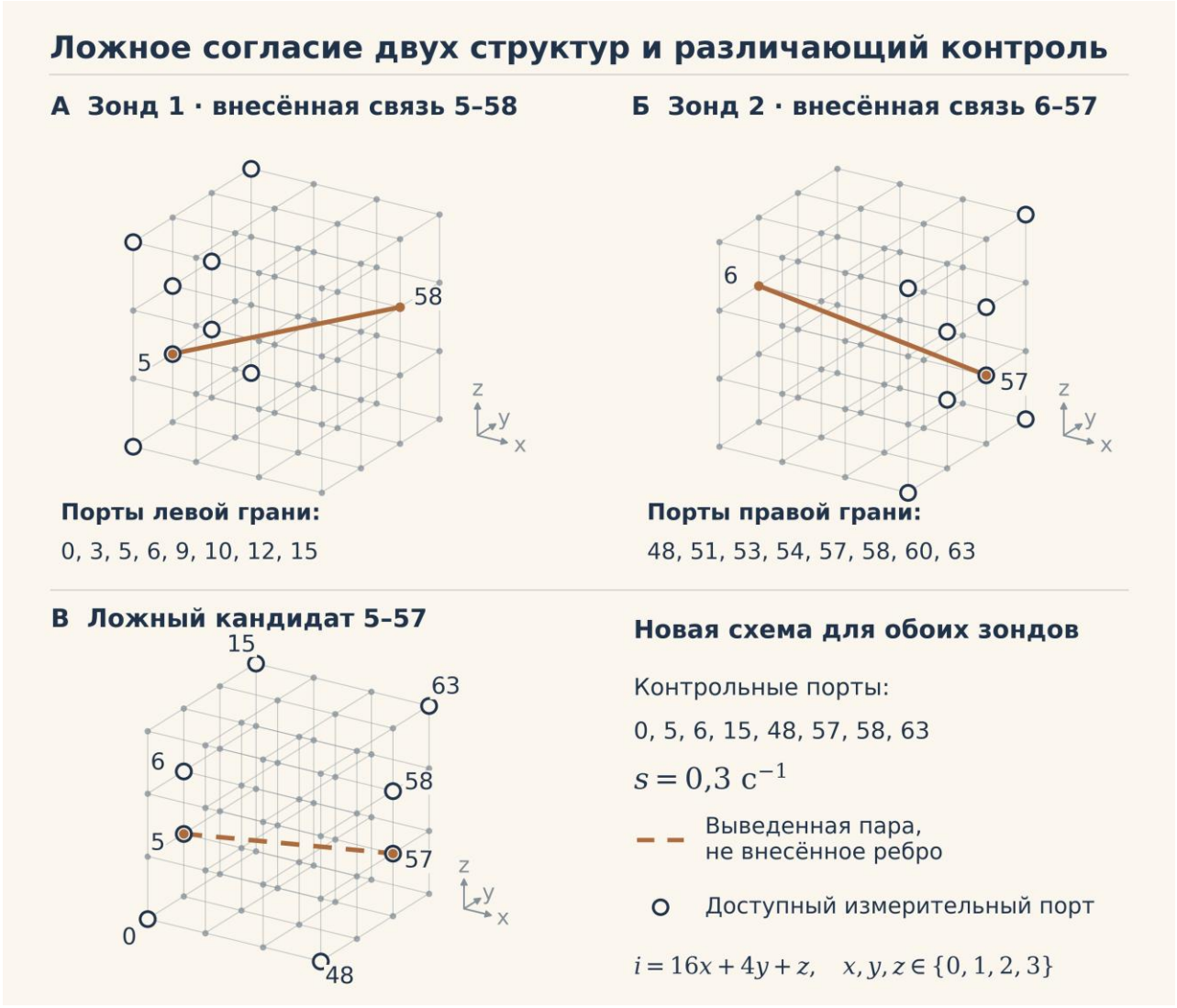


Рисунок 35. Конструктивный пример ложной общности на точном каркасе 4 × 4 × 4. В первом зонде внесено ребро 5-58, во втором - 6-57. Наблюдения противоположных граней допускают ложную общую пару 5-57, показанную пунктиром. Нижняя схема отмечает контрольные порты, доступные в обоих зондах при s = 0,3 c^{-1}. Они различают названные альтернативы в описанном опыте. Координаты и нумерация узлов одинаковы во всех трёх проекциях.

Сценарий	До контрольной схемы	После контрольной схемы
Общая истинная пара 5-58	Одна общая пара 5-58	Сохраняется 5-58
Раздельные пары 5-58 и 6-57	Одна ложная общая пара 5-57	Все общие пары исключены

Для настоящей общей пары итоговый внешний интервал g составляет от 0,2348 до 0,3638 c^{-1}. Подгонка всех 512 направленных записей даёт g = 0,30021 c^{-1} и $\chi^2/512 = 0{,}8075$. В раздельном контроле исключение общего ребра получено оболочками сразу для всех 2016 пар, а не из неудачи оптимизатора. Раздельная модель имеет допустимую точку с

$\chi^2/512 = 0{,}8222$. В этом ограниченном примере новый опыт выполнил именно ту работу, для которой был спроектирован.

Из результата не следует универсальная единственность для всех возможных дополнительных связей, ёмкостей и скрытых узлов. Он показывает более узкий завершённый переход: обнаружена конкретная неоднозначность, выбран измерительный режим, выведено его предсказание и проверено различение названных альтернатив. Для других классов неоднозначности схема должна проектироваться заново.

Общий электронный сигнал и независимый контроль

Согласие двух каналов может возникнуть и после физического объекта, внутри электроники. Для проверки в обе записи добавлен один и тот же матричный шаблон, специально совпадающий с откликом ребра в первом зонде. В узловых моделях дополнительной связи нет. Такой выбор создаёт трудный искусственный контроль общего тракта регистрации; он не описывает частоту появления именно такого шаблона в настоящем приборе.

До дополнительных проверок внешняя совместная область снова оставляет одну ложную пару, теперь 5-53. В отдельной опорной записи физическое распространение отключено, а путь предполагаемой электронной утечки сохранён. Эта запись даёт $\chi^2 = 1919{,}59$ на 192 элемента при 99-процентной границе 240,50 для чистого известного гауссова шума. Значит, общий сигнал доступен в канале, который не должен содержать проверяемую сетевую динамику.

Разделение физического пути и сохраняющегося тракта регистрации показано на функциональной схеме 36.

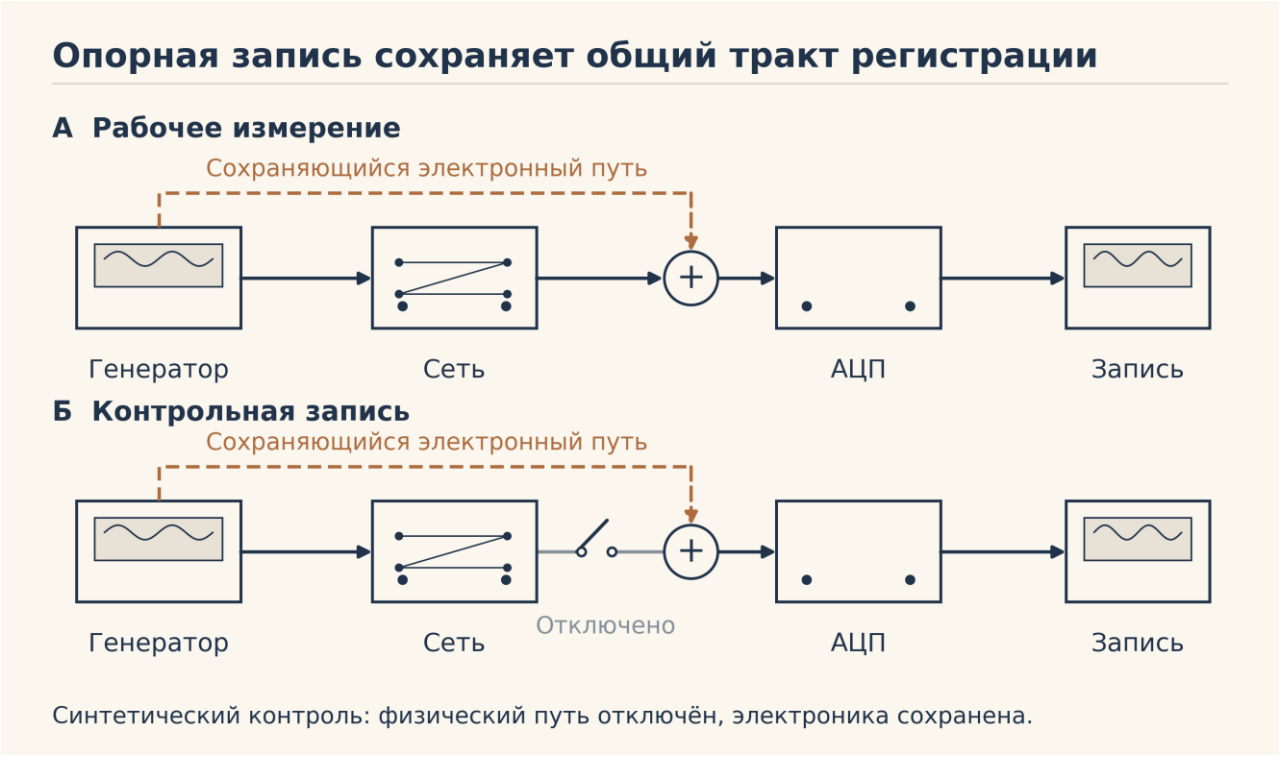


Рисунок 36. Функциональный смысл опорной записи в синтетическом контроле. Рабочее измерение содержит отклик сети и добавку общего электронного тракта. В контрольном состоянии физический путь отключён, а предполагаемый электронный путь сохранён. Сигнал, остающийся в такой записи, позволяет проверить обычную причину ложной общности. Изображение не задаёт собранную принципиальную схему; конкретный стенд должен отдельно подтверждать, что переключение действительно сохраняет исследуемый тракт утечки.

После вычитания опорной записи чистая калибровка больше не исключается. Цена такого вычитания - дополнительный шум. При одинаковой точности двух независимо приобретённых записей стандартное отклонение разности равно $\sqrt{2}\sigma$. Если одна и та же опорная запись вычитается из обоих зондов, их остатки коррелированы. Использованная скалярная проверка сохраняет силу с правильными маргинальными дисперсиями, поскольку её одновременная граница не требует независимости контрастов. Для полной подгонки этих вычтенных данных понадобилась бы совместная ковариация.

Контрольные порты также исключают все общие односвязные объяснения этого шаблона. Опорная запись добавляет другое знание: она указывает на конкретный участок измерительной цепи, где сохраняется сигнал. Такое вмешательство существенно сильнее одного статистического несогласия, поскольку помогает установить обычную причину отклонения.

Новая серия после выбора протокола

После фиксации контрольной схемы выполнены четыре серии по 24 реализации. В каждой независимо генерируется общий относительный дрейф обычных весов, равномерный в пределах ±2 процентов, и свежий гауссов шум. Начальные состояния начинаются с 3600000, 3601000, 3602000 и 3603000 соответственно. Во всех случаях силы, пары, карта портов и критерий исключения заданы программой. Эта серия отделена от прежних 460 расчётов.

Сценарий	Исключена чистая калибровка	После контроля нет общей пары
Только ограниченный дрейф	0 из 24	0 из 24
Общая пара	24 из 24	0 из 24
Разные пары	24 из 24	24 из 24
Общая электронная утечка	24 из 24	24 из 24

В 24 реализациях настоящей общей пары её индекс сохранился во внешней области. При одном лишь допустимом дрейфе чистая калибровка не исключалась. Раздельные связи и скопированная электронная утечка после контрольной схемы не имели ни одной общей допустимой пары. Рисунок 37 показывает эти счётчики вместе: исключение калибровки и исключение общего ребра являются разными решениями.

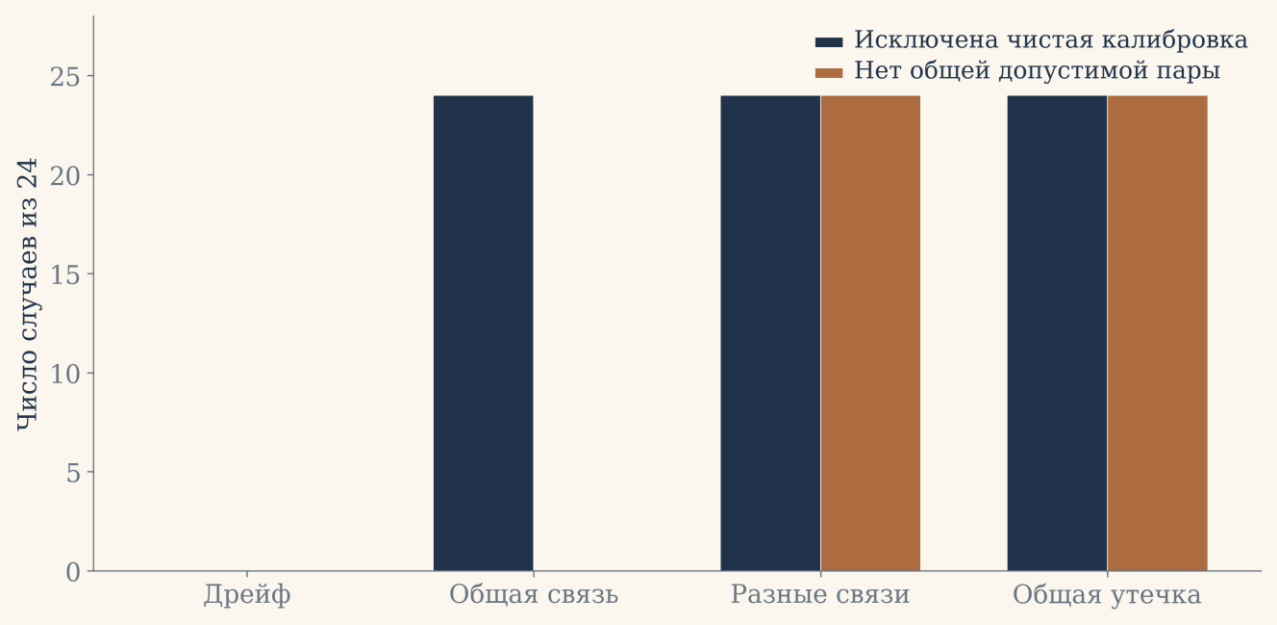


Рисунок 37. Итоги 96 новых синтетических реализаций после фиксации контрольного режима. Счётчики описывают четыре заданных класса и эти 24 записи каждого класса; они не являются универсальными вероятностями ошибок прибора.

Нулевая доля ошибочного исключения в 24 опытах не доказывает нулевой риск. Формальная граница для оболочек выводится в главе 14 из предположений о шуме и калибровке, а не оценивается этими малыми счётчиками. Серии проверяют код и выбранный

сценарий. Случайный выбор всех возможных пар, неизвестные узлы, задержки, утечки и ошибка самих пределов калибровки остаются другими задачами.

Связь между прямой и обратной моделью по-прежнему тесна: обе используют заданный класс линейной сети. Это облегчение необходимо учитывать. В литературе об обратных задачах ошибки дискретизации и чрезмерное совпадение моделей рассматриваются как источник оптимистических восстановлений. Поэтому физический практикум должен добавить реальные записи, паразитные элементы и независимые калибровочные измерения. [21]

Глава 9
От сетевого аналога к причинной физической модели

Граница применимости уравнения

Вычислительная сеть полезна именно потому, что её устройство можно контролировать. Однако у этой удобной модели есть пределы. Уравнение $\dot{x} = -Lx$ описывает выравнивание величины между узлами, а не полный электромагнитный процесс внутри проводов. В нём не записаны распределённые поля, распространение по линиям и движение энергии между отдельными точками проводника. Пока интересующие времена намного больше этих внутренних времён, сокращённое описание может быть хорошим. При исследовании предельной скорости сигнала пропущенные детали становятся центральными.

Матрица e^{-tL} на связном конечном графе обычно имеет ненулевые элементы между удалёнными узлами при любом $t > 0$. Чтобы увидеть причину, достаточно разложить экспоненту в ряд. Для пары, разделённой r рёбрами кратчайшего пути, первый ненулевой вклад возникает с некоторой степенью t порядка r. Он чрезвычайно мал при малом времени, но не обязан быть строго нулевым. Следовательно, идеальная диффузионная модель не содержит точного светового конуса. Обнаружить эту особенность в формуле означает найти предел приближения, а не открыть возможность сверхсветовой передачи.

В электрическом стенде причинность обеспечивает более полное описание проводников и полей. Сосредоточенная RC-модель используется после исключения быстрых процессов. Длинный провод, который на рисунке графа изображён одной линией, физически обладает протяжённостью и временем распространения. Для исследования медленного затухания это может быть несущественно; для поиска необычно раннего прихода импульса - решающе. Поэтому прибор для томографии связности и прибор для проверки причинной структуры должны иметь разные модели погрешностей и разные требования к калибровке.

Разницу между диффузионным хвостом и причинным фронтом поясняет рисунок 38.

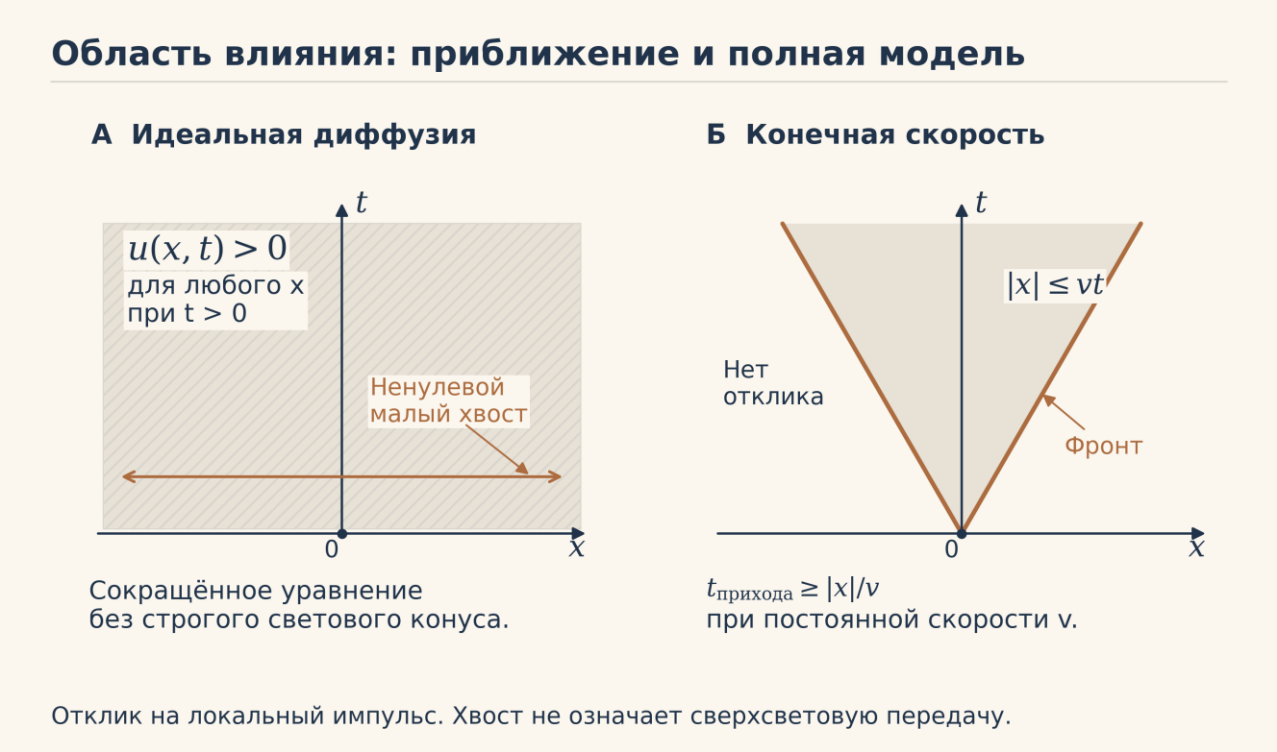


Рисунок 38. Области поддержки отклика на локальный импульс в идеальном диффузионном описании и в полной модели с конечной скоростью. Слева малый математический хвост появляется при любом положительном времени; справа влияние ограничено причинным фронтом. Рисунок схематичен, оси не имеют численного масштаба, а постоянная скорость v выбрана для пояснения границы. Диффузионный хвост указывает на предел сокращённого уравнения и не является свидетельством физической сверхсветовой передачи.

Задержка должна выводиться из устройства

Естественная попытка улучшить модель состоит в добавлении задержек. В частотном или лапласовом описании чистое запаздывание даёт множитель exp(−sτ). Но произвольная замена положительного веса g на g exp(−sτ) не гарантирует, что полученное уравнение описывает пассивное физическое соединение. Задерживаются не только полезные сигналы: меняются обратные связи, запасаемая энергия и условия устойчивости. Реальная линия передачи связывает входные и выходные величины согласованным набором уравнений, а не одним украшенным коэффициентом.

Это видно на скалярном примере. Без задержки уравнение $\dot{x} = -\gamma x$ при $\gamma > 0$ описывает затухание. Если заменить x(t) в правой части на x(t − τ), характеристическое уравнение станет $s + \gamma \exp(-s\tau) = 0$. Подстановка чисто мнимого корня $s = i\omega$ показывает первую границу устойчивости при $\gamma\tau = \pi/2$. Таким образом, достаточно большая задержка превращает исходно затухающее правило в колебательную неустойчивость. Наличие положительного γ больше не обеспечивает прежнего вывода.

$$\dot{x}(t) = -\gamma x(t-\tau), \qquad s + \gamma e^{-s\tau} = 0, \qquad \gamma\tau = \frac{\pi}{2} \tag{9.1}$$

Этот пример не запрещает задержанные модели. Он показывает, что их необходимо проверять заново. Для лабораторного аналога предпочтителен физически понятный элемент: линия передачи, известный резонатор или измеренный внутренний контур. Тогда задержка, дисперсия и потери определяются совместно. Измерения на нескольких частотах позволяют установить, когда простая постоянная связь перестаёт быть подходящим приближением. Именно на этой границе скрытые степени свободы могут стать видимыми, но их обнаружение сначала требует обычного инженерного объяснения.

Память обычного скрытого посредника

Можно явно построить элемент, который создаёт память после исключения внутренней переменной. Пусть два доступных узла напряжений V_1 и V_2 связаны через скрытый узел h двумя одинаковыми проводимостями k. В скрытом узле установлена ёмкость C_h относительно общего опорного проводника. При нулевом начальном заряде уравнение скрытого напряжения имеет вид

$$C_h \dot{V}_h + 2kV_h = k(V_1 + V_2) \qquad (9.2)$$

В преобразовании Лапласа отсюда $V_h = k(V_1 + V_2)/(sC_h + 2k)$. Подстановка в ток $I_1 = k(V_1 - V_h)$ показывает, что коэффициент взаимного влияния концов зависит от s. В матрице проводимостей появляется внедиагональный элемент −kэфф(s), а диагональные элементы также изменяются. Оставить только новую линию между концами и забыть эти изменения означало бы потерять часть динамики посредника.

$$k_{\mathrm{eff}}(s) = \frac{k^2}{sC_h + 2k}, \qquad k_{\mathrm{eff}}(0) = \frac{k}{2} \qquad (9.3)$$

В статике получается знакомая сумма двух одинаковых сопротивлений. Во временной области взаимный вклад содержит затухающую память. Его характерное время $C_h/(2k)$ определяется ёмкостью и проводимостями, а не геометрической длиной между концами.

$$K_{12}(t) = \frac{k^2}{C_h} \exp\left(-\frac{2k}{C_h} t\right) \Theta(t) \qquad (9.4)$$

Это ядро описывает величину положительного коэффициента взаимного воздействия; знак в токовом уравнении задаётся выбранным направлением тока. Размерность kэфф - сименс, размерность $K_{12}(t)$ - сименс в секунду. Наличие Θ(t) делает память запаздывающей во времени. Оно не создаёт точного пространственного светового конуса внутри сосредоточенной модели.

Пример связывает редукцию Крона с измеримым признаком. Два статически эквивалентных устройства различаются переходным процессом, если полоса регистрации включает время $C_h/(2k)$. Если этот масштаб вне полосы, память скрывается в эффективных постоянных. Поэтому обнаруженный частотно зависимый канал сначала следует сравнивать с обычными накопителями энергии и линиями передачи. Это конкретный физический мост от сетевого сокращения к наблюдаемой динамике.

Схема скрытой ёмкости и возникающее после её исключения ядро памяти приведены на рисунке 39.

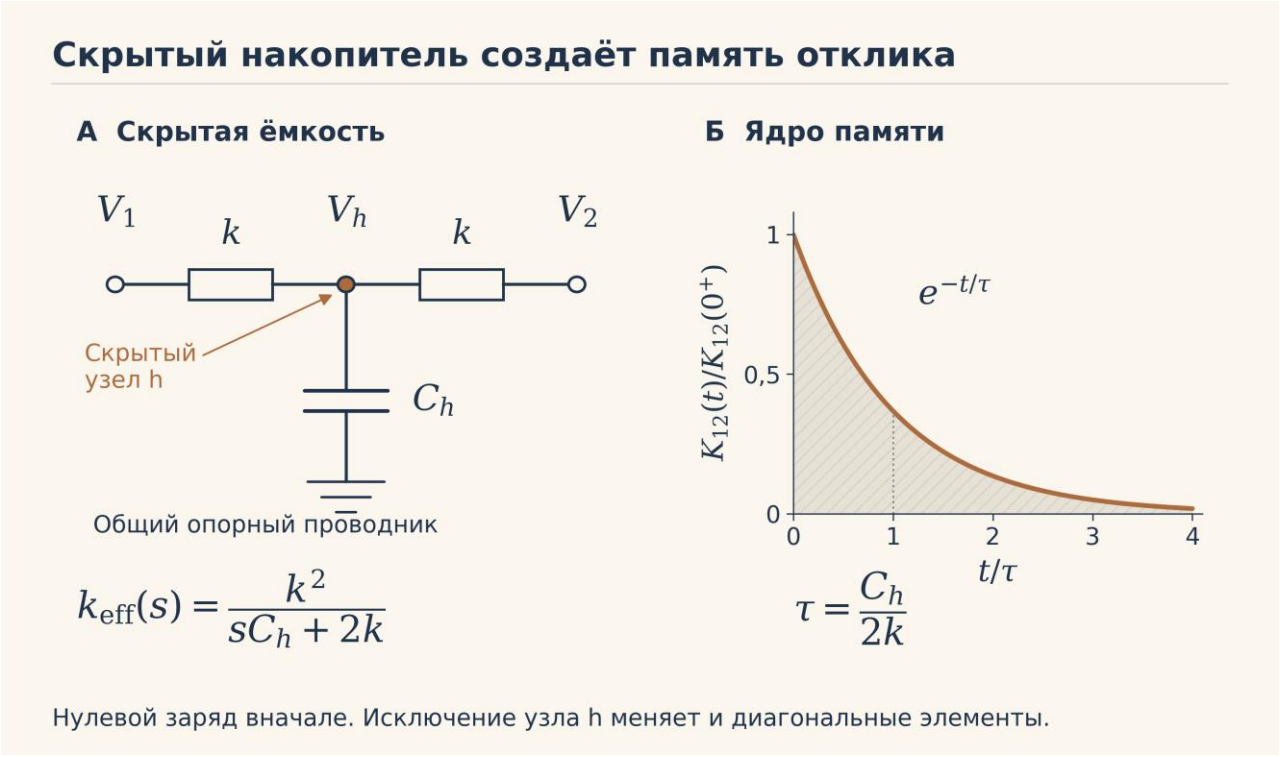


Рисунок 39. Обычный скрытый посредник с памятью. Две одинаковые проводимости k соединяют доступные узлы через узел h с ёмкостью C_h относительно общего проводника. При нулевом начальном заряде исключение V_h создаёт частотно зависимый взаимный коэффициент и меняет диагональные элементы. Справа показано точное нормированное экспоненциальное ядро при $t \geq 0$ с временем $\tau = C_h/(2k)$, а не экспериментальная кривая. Запаздывание во времени не задаёт пространственный световой конус.

Пассивность как проверяемое ограничение

Для RC-сети энергетическая проверка особенно прозрачна. Пусть C - положительная диагональная матрица ёмкостей, K - симметричная матрица проводимостей, а V - вектор напряжений. Электрическая энергия в ёмкостях равна половине квадратичной формы V^TCV. Уравнение $C\dot{V} + KV = I$ позволяет вычислить её производную. Получается разность подводимой мощности и мощности, рассеиваемой на резисторах. Из положительности весов следует, что сеть не выдаёт больше энергии, чем получает и сохраняла ранее.

$$E = \frac{1}{2}V^TCV, \qquad \frac{dE}{dt} = V^TI - V^TKV \leq V^TI \qquad (9.5)$$

Такое неравенство является частным случаем общей теории диссипативных систем, где сопоставляются запасённая энергия и внешний поток. Виллемс сформулировал соответствующий подход через функции хранения и снабжения. Для нашего стенда полезна возможность проверить пассивность как до сборки, так и по данным прибора. Неожиданный рост энергии в модели может указывать на ошибку знака, неверное исключение переменных или пропущенный источник питания. [22]

Пассивность не равна полной физической корректности. Пассивная электрическая схема остаётся материальным объектом с выделенным состоянием покоя; её нельзя объявить моделью вакуума только потому, что она устойчива. Однако энергетическая проверка отсекает часть ошибочных конструкций ещё до обсуждения фундаментальной интерпретации. Она также помогает отличать реальное усиление за счёт внешней энергии от изменения геометрической чувствительности. В исследовательском приборе эти причины могут создавать похожее увеличение амплитуды, хотя физический смысл у них различен.

Причинный отклик и наблюдаемая величина

Более общая линейная модель описывает сигнал как свёртку источника с запаздывающим ядром. Время регистрации должно следовать за временем воздействия в пределах принятой причинной структуры. В локально плоском пространстве с обычной предельной скоростью с ядро воздействия между точками разделения r обращается в ноль раньше r/c. В искривлённой геометрии условие формулируется через соответствующий световой конус. Если предполагается иной причинный путь, необходимо определить его геометрию и согласовать с измерениями часов и расстояний.

$$y_i(t) = \sum_j \int_{-\infty}^{t} H_{ij}(t - t') f_j(t')\, dt' \qquad (9.6)$$

Важна именно зависимость управляемого отклика от источника. Корреляция двух датчиков, зарегистрированная без такого вмешательства, не доказывает передачу информации между ними. Её может создать общий источник, общая среда или подготовленное совместное состояние. Для утверждения о новом канале требуется показать, что изменение известного воздействия предсказуемо меняет удалённый результат, и установить временные границы этого изменения. Смешивать корреляционный поиск и измерение сигнальной скорости означало бы отвечать на разные вопросы одной статистикой.

Даже при заданном поле новая теория должна вывести конкретную наблюдаемую величину. Компонента метрики в выбранных координатах не является готовым показанием фотодетектора. Нужно рассчитать путь света, движение отражателей, ход часов и процедуру сравнения фаз. Некоторые возмущения воздействуют на обе ветви дифференциального прибора одинаково и взаимно сокращаются. Поэтому предполагаемое свойство пространства может быть реальным в модели, но невидимым именно данной конфигурации. Чувствительность устанавливается расчётом измерительной процедуры, а не названием поля.

Положительность корреляций и ковариантность закона

Если гипотеза описывает случайный общий сигнал, она должна задавать допустимую ковариацию всех каналов. Для любой линейной комбинации записей спектральная мощность неотрицательна. Отсюда следует положительная полуопределённость спектральной матрицы S(f). В частности, квадрат модуля взаимного спектра двух каналов ограничен произведением их собственных спектров. Произвольный красивый рисунок угловых корреляций может

нарушить это условие и вообще не соответствовать никакому случайному процессу. Такая проверка проводится до сопоставления с данными.

$$z^{\dagger}S(f)z \geq 0, \qquad \left|S_{ij}(f)\right|^2 \leq S_{ii}(f)S_{jj}(f) \qquad (9.7)$$

Термин «ковариантность» в теории пространства относится к другому вопросу: как закон записывается при изменении координат. Координатно согласованная запись необходима для геометрической интерпретации, но сама по себе не доказывает отсутствие выделенной системы отсчёта. Решётка способна задавать особые направления и время; скрыть их за тензорными обозначениями недостаточно. Если предполагается восстановление лоренцевой симметрии на больших масштабах, нужно вычислить остаточные отклонения, указать область приближения и сопоставить их с соответствующими экспериментальными ограничениями.

Причинность, аналитические свойства амплитуд и допустимые коэффициенты эффективной теории также связаны между собой. Работа Адамса и соавторов показывает на определённых классах эффективных полевых моделей, что кажущаяся приемлемость низкоэнергетического лагранжиана ещё не гарантирует согласованное высокоэнергетическое продолжение. Это не универсальный запрет на необычную геометрию. Это основание проверять знаки, устойчивость фона и предпосылки применяемых теорем, когда сетевое правило пытаются превратить в физический закон. [23]

Что требуется для перехода к вакууму

Полная интерпретация должна сначала назвать свои степени свободы. Являются ли узлы событиями, областями пространства, состояниями поля или лишь элементами вычислительной сетки? Затем требуется закон их эволюции и взаимодействия с материей. Для квантовой модели дополнительно задаются пространство состояний, вероятностная интерпретация и динамика, сохраняющая необходимые свойства состояния. Для эффективной открытой системы допустима диссипация, но должен быть понятен источник потерь и предел применимости сокращённого описания.

Далее нужно восстановить проверенные режимы. Если модель вводит дополнительную связь между далёкими областями, необходимо показать, почему обычные оптические, механические и гравитационные измерения обычно не замечают её. Ответ может состоять в малости взаимодействия, ограниченной полосе чувствительности или специфическом способе связи с материей. Однако это должны быть количественные свойства, а не объяснения, меняющиеся после каждого отрицательного опыта. Из модели должен следовать диапазон параметров, где её можно опровергнуть.

Аналоговые опыты остаются полезными на всех этих этапах. Электрические сети уже использовались для воспроизведения свойств гиперболической геометрии и проверки распространения в соответствующей эффективной метрике. Такое устройство демонстрирует управляемую реализацию математического оператора, а не превращает пространство лаборатории в фундаментально гиперболическое. По той же логике рассматриваемый графовый стенд может проверять методы восстановления скрытой связности, не претендуя автоматически на измерение структуры вакуума. [24]

Переход от графа к физике требует последовательных соответствий: переменная модели - физическая величина, коэффициент - измеряемое взаимодействие, математическое возмущение - воспроизводимая процедура, предсказанный отклик - показание прибора. Пока какое-либо соответствие не установлено, результат относится к математическому или аналоговому уровню. На нём уже возможны содержательные теоремы и приборные решения. Фундаментальная интерпретация требует отдельной проверки.

Дальнейшие главы рассматривают другие реализации того же исследовательского порядка. Для компактного направления нужно вычислить возбуждение и регистрацию мод выбранного поля. Для случайного потенциала - совместный отклик часов и ускорений. Для интерферометра - световой путь и фазу. Эти ветви имеют собственные физические предпосылки; общий метод сравнения предсказаний не выводит одну из другой.

Глава 10
Спектроскопия скрытой геометрии

Что можно узнать из закона силы

После сетевого опыта возникает новый вопрос: какое измерение могло бы связать необычный отклик с физическим дополнительным направлением? Для этой главы выбрана одна определённая реализация: скалярное поле распространяется по обычным трём координатам и по окружности. Рассматриваются сила между телами и динамический отклик того же поля. Это самостоятельная физическая модель; установленное в сетевом аналоге ребро не переносится в неё как уже обнаруженное свойство пространства.

Представим экспериментатора, которому неизвестно число пространственных направлений. Ему доступны небольшие массы, измеритель расстояния и датчик притяжения. Он перемещает источник и записывает, как ослабевает сила. В обычном трёхмерном пространстве ньютоновская сила точечных масс убывает обратно квадрату расстояния. Если поток некоторого поля равномерно расходится по пространству другой размерности, площадь окружающей источник поверхности меняется иначе. Кажется, достаточно измерить показатель степени и получить число измерений. Однако такое рассуждение скрывает условия: поле должно подчиняться выбранному уравнению, источник должен быть практически точечным, а распространение взаимодействия не должно изменяться по иной причине. Опыт проверяет сразу геометрию и физический закон, который превращает геометрию в силу.

$$F(r) \propto r^{-(d-1)}, \qquad d_F(r) = 1 - \frac{d\ln|F(r)|}{d\ln r} \qquad (10.1)$$

Величина d_F обозначает операционную размерность, восстановленную по силе. Это удобный язык для описания измерения, но не независимое определение устройства мира. При степенном законе она совпадает с d, если выполнены перечисленные предположения. При переходе между режимами она становится функцией расстояния. Сам по себе нецелый результат, например 3,2, ещё не означает дробное число физических направлений. Его способны породить несколько одновременно действующих взаимодействий, конечный размер источника, неоднородность материала и ошибка расстояния. Исследовательская задача состоит в том, чтобы установить, какие из этих объяснений различимы при имеющихся данных, а не выбрать наиболее необычное название для полученной кривой.

Физически содержательная гипотеза дополнительного измерения должна связать несколько следствий. Одно и то же устройство скрытого направления определяет допустимые пространственные моды, их энергии и вклад в статическое взаимодействие. Если каждому измеренному эффекту разрешить собственный свободный масштаб, гипотеза потеряет проверяемость. Поэтому далее рассматривается программа спектроскопии компактности: восстановление согласованного семейства масштабов из разных наблюдений. Сама идея

компактных дополнительных измерений и их проявлений в гравитации давно существует. В модели Аркани-Хамеда, Димопулоса и Двали гравитационные и стандартные поля получают различный доступ к дополнительным направлениям; именно эта разница показывает, почему нельзя автоматически переносить гравитационный прогноз на свет или вещество. [26]

Один новый посредник способен изменить видимую размерность

Начнём с контрпримера, который полезнее преждевременного обещания открытия. Пусть пространство остаётся трёхмерным, но помимо ньютоновского притяжения возникает взаимодействие с конечной дальностью. Его стандартная параметризация называется поправкой Юкавы. Безразмерный коэффициент α задаёт относительную силу, а λ, измеряемая в метрах, определяет дальность. В этой главе знак α допускается обоих видов; выражения для логарифмической производной используются только там, где полная сила не обращается в нуль. Формула является проверяемым эффективным описанием, а происхождение нового взаимодействия требует отдельной теории. Уже такой простой пример показывает, насколько рискованно отождествлять необычный показатель степени с изменившейся размерностью.

$$V(r) = -\frac{GmM}{r}\left(1 + \alpha e^{-r/\lambda}\right), \qquad x = \frac{r}{\lambda} \qquad (10.2)$$

При B(x) > 0 взаимодействие остаётся притягивающим; удобно работать с положительным модулем радиальной силы. Дифференцирование потенциала даёт два вклада: производную множителя 1/r и производную экспоненты. Вторая часть принципиальна: если просто умножить ньютоновскую силу на поправку потенциала, прогноз окажется неверным. Обозначим квадратную скобку в силе через B(x). Тогда логарифмическая производная содержит обычное слагаемое −2 и добавку xB′/B. Производная B′ равна $-\alpha x e^{-x}$. После подстановки получается выражение для d_F, в котором при положительном α возникает добавка к трём. Все множители в этой добавке безразмерны, поэтому формула проходит простую, но обязательную проверку единиц.

$$|F(r)| = \frac{GmM}{r^2}|B(x)|, \qquad B(x) = 1 + \alpha(1 + x)e^{-x}, \qquad B'(x) = -\alpha x e^{-x} \qquad (10.3)$$

$$d_F(r) = 3 + \frac{\alpha x^2 e^{-x}}{1 + \alpha(1 + x)e^{-x}} \qquad (10.4)$$

При малом x поправка почти постоянна и в основном меняет эффективную силу взаимодействия. При большом x она экспоненциально исчезает. Между этими пределами возникает участок, который можно ошибочно назвать повышенной пространственной размерностью. Этот вывод получен обычным дифференцированием, а не экспериментальным открытием. Он задаёт полезное требование к будущему прибору: необходимо измерять достаточно широкий диапазон расстояний и проверять форму перехода. На узком интервале разные функции легко выглядят одинаково. Даже безошибочная регистрация d_F больше трёх позволит сначала утверждать только то, что исходная модель силы недостаточна. Следующий вопрос будет касаться физического происхождения обнаруженной поправки.

На участках с B < 0 та же логарифмическая производная вычисляется через ln|B|. В точке B = 0 показатель d_F не определён. Знак силы в этих случаях требуется показывать отдельно: один график её модуля скрывает переход между притяжением и отталкиванием.

Замкнутое направление и башня мод

Теперь рассмотрим явно заданную модель. Помимо трёх протяжённых координат существует периодическая координата y с периодом 2πR. Вдоль неё распространяется безмассовое скалярное поле; источники расположены при одном значении y. Периодичность допускает волновые числа n/R, где n - целое число. Наблюдатель, которому доступно только обычное пространство, описывает ненулевые моды как массивные возбуждения. Это учебная скалярная модель на пространстве $R^3 \times S^1$. Она позволяет вывести связь спектра и статического потенциала, однако не заменяет тензорную теорию гравитации: спины, дополнительные поля, механизм фиксации радиуса и реальные связи с веществом здесь пока не заданы.

$$q_n = \frac{n}{R}, \qquad m_n = \frac{|n|\hbar}{cR}, \qquad E_n = m_n c^2 = \frac{|n|\hbar c}{R}, \qquad \lambda_n = \frac{R}{|n|} \tag{10.5}$$

Если нормировать нулевую моду так, чтобы дальнее взаимодействие имело привычную форму, пара мод с номерами n и −n даёт одинаковые вклады. Сумма экспонент превращается в гиперболический котангенс. При расстояниях значительно больше R остаётся потенциал 1/r. При расстояниях значительно меньше R поле успевает распространяться вдоль дополнительного направления, и потенциал становится пропорциональным $1/r^2$. Его сила убывает как $1/r^3$. Такое поведение выводится из принятой геометрии и правил распространения поля. Коэффициент 2 перед суммой относится именно к выбранной скалярной модели; переносить его без проверки в реалистическую гравитационную гипотезу нельзя.

$$V_{\mathrm{sc}}(r) = -\frac{GmM}{r}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nr/R}\right] = -\frac{GmM}{r}\coth\left(\frac{r}{2R}\right) \tag{10.6}$$

$$V_{\mathrm{sc}}(r) \simeq -\frac{GmM}{r} \quad (r \gg R), \qquad V_{\mathrm{sc}}(r) \simeq -\frac{2GmMR}{r^2} \quad (r \ll R) \tag{10.7}$$

Для иллюстрации единиц возьмём R равным 10 микрометрам. Энергия первой моды тогда составляет приблизительно 0,0197 электронвольта, а частота E_1/h - 4,77 терагерца. Это арифметическое следствие выбранного радиуса, не прогноз обнаружения и не утверждение, что данный вариант разрешён совокупностью существующих наблюдений. Частота сама по себе не определяет возможность возбуждения. Нужны оператор связи, его коэффициент, правила отбора, интенсивность источника и способ считывания. Электромагнитный генератор на указанной частоте может вообще не взаимодействовать с искомой модой. Практический смысл примера в другом: один радиус одновременно задаёт диапазон статической силы и энергетическую шкалу, которую должна учитывать полная теория.

Два разных способа получить масштабную структуру сопоставлены на рисунке 40. Слева один обычный посредник создаёт отклонение силового показателя от трёх. Справа показаны связанные дальности компактных мод. Правая последовательность задаёт более жёсткую гипотезу, однако её можно проверить лишь тогда, когда измерение чувствительно хотя бы к нескольким её членам.

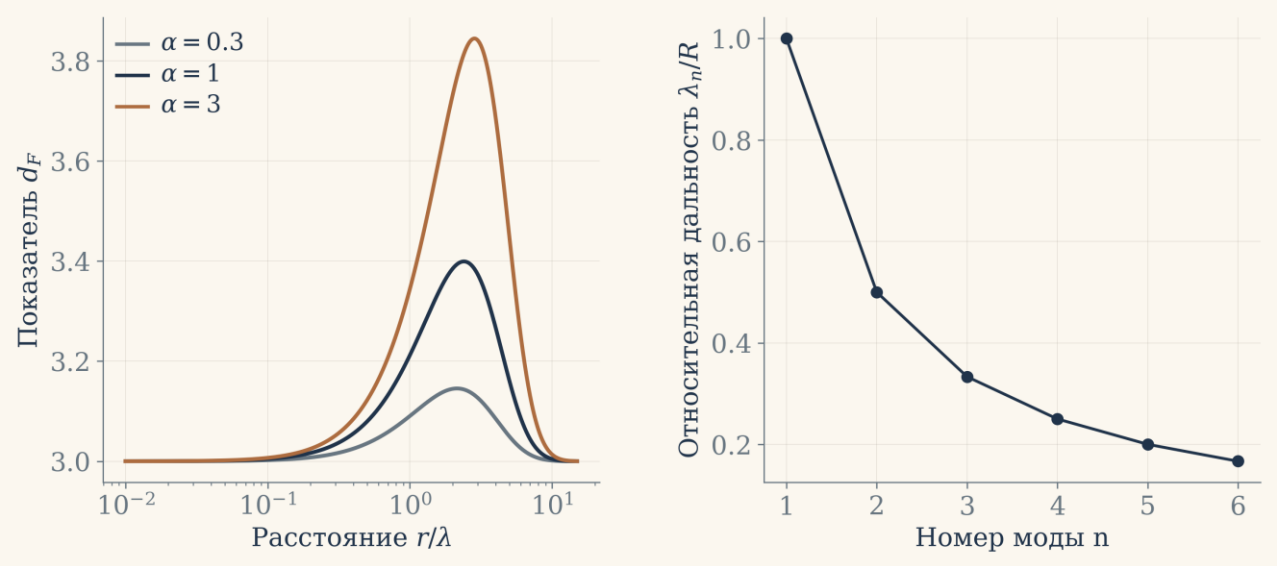


Рисунок 40. Операционный силовой показатель для одной поправки Юкавы и дальности компактных мод. Кривые слева рассчитаны при положительных α; справа λ_n/R = 1/n. Это следствия выбранных моделей, а не наблюдения дополнительных измерений.

Источник, детектор и запаздывающий отклик

Чтобы спектр мод превратился в прогноз прибора, зададим источник. Небольшое тело массой m находится при y = 0 и смещается вдоль линии к детектору на ε cos(ωt). Его скалярный заряд по условию пропорционален массе. Пробное тело массой M также расположено при y = 0 и взаимодействует с потенциалом через энергию МФ_s. Движение источника поддерживается внешним приводом; ε значительно меньше расстояния r, а скорость εω значительно меньше c. Принята линейная скалярная динамика с фиксированным радиусом R. Она полностью задаёт данный пример, сохраняя отдельным вопрос о возможности её реализации в природе.

На рисунке 41 движение источника, запаздывающий отклик и показание силового канала разделены как разные части одного измерительного оператора.

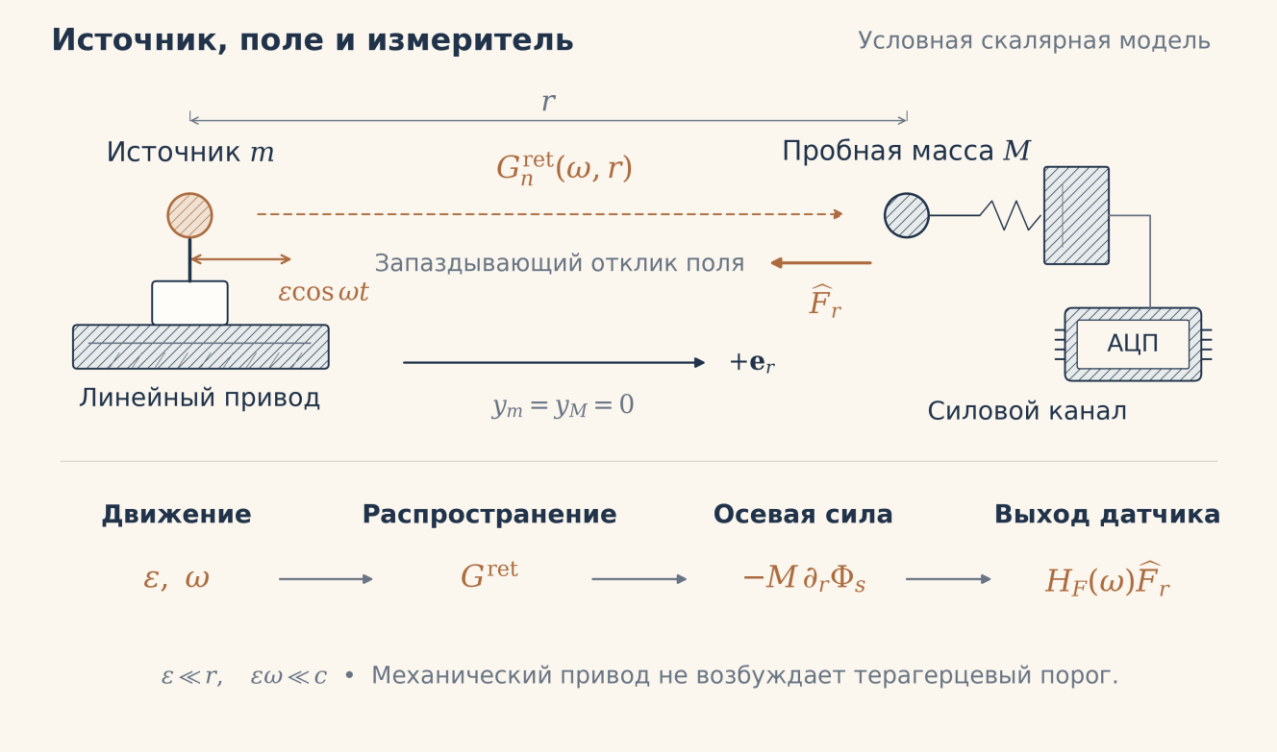


Рисунок 41. Источник m и пробная масса M находятся при одной компактной координате y = 0. Привод смещает источник вдоль положительного радиального направления; стрелка силы фиксирует знак притягивающего квазистатического отклика. Между движением и цифровым выходом стоят функция Грина, пространственная производная потенциала и отклик силового датчика. Изображён проект измерительного принципа в заданной скалярной модели. Механическое возбуждение на 100 Гц не становится терагерцевым источником из-за наличия компактного порога в уравнении поля.

$$\left(\nabla_{\mathbf{x}}^2 + \partial_y^2 - c^{-2}\,\partial_t^2\right)\Phi_s = 4\pi G_4 \rho_4, \qquad G_4 = 2\pi R G_s, \tag{10.8}$$

$$\rho_4 = m\,\delta^{(3)}(\mathbf{x} - \epsilon\cos(\omega t)\mathbf{e}_r)\delta_{2\pi R}(y) \tag{10.9}$$

Здесь Φ_s имеет единицы м²/с², четырёхмерная пространственная плотность ρ_4 - кг/м⁴, а G_4 - м⁴/(кг·с²). Периодическая дельта-функция интегрируется в единицу по окружности. Коэффициент G_s определяет дальнюю скалярную силу после выделения нулевой моды. Все фазовые амплитуды далее умножаются на exp(−iωt). Исходящая радиальная волна поэтому содержит exp(ik_nr), причём ветвь корня выбирается с неотрицательной мнимой частью.

$$k_n(\omega) = \sqrt{\frac{(\omega + i0)^2}{c^2} - \frac{n^2}{R^2}}, \qquad G_n^{\mathrm{ret}}(\omega, r) = \frac{e^{ik_n r}}{4\pi r} \tag{10.10}$$

При ω < nc/R число k_n мнимо: вклад убывает экспоненциально и не переносит свободную распространяющуюся моду на большое расстояние. Выше порога k_n становится вещественным. Обычный радиальный импульс при этом остаётся непрерывным, поэтому порог не обязан быть узкой спектральной линией. Резонанс потребовал бы дополнительного удержания, отражения или конкретной динамики источника. Статический предел этой же

функции даёт exp(−nr/R)/r и возвращает уже полученный потенциал. Такая проверка связывает две части модели одним оператором. Связь компактного спектра с юкавовскими поправками исследована в первичной литературе; коэффициенты зависят от геометрии и вырождения мод. [45]

Малое перемещение источника дифференцирует функцию Грина по положению источника. Измеряемая сила требует ещё одной производной по положению детектора. Для соосного точечного опыта амплитуда радиальной силы имеет вид

$$\widehat{F}_r(\omega) = -\frac{G_s m M \epsilon}{r^3}\mathcal{D}(\omega, r), \qquad \mathcal{D} = \sum_{n=0}^{\infty} w_n\, e^{ik_n r}\left[2 - 2ik_n r - (k_n r)^2\right], \qquad (10.11)$$

$$w_0 = 1, \qquad w_n = 2\ (n \geq 1) \qquad (10.12)$$

Знак соответствует радиальной оси от источника к детектору. При ω = 0 первая скобка равна двум для нулевой моды, а для массивной моды превращается в 2 + 2nr/R + (nr/R)². Таким образом, динамическое показание определено вместе с его амплитудой и фазой. Условия точечного приближения требуют размеров тел намного меньше r; ниже конечные тела будут рассчитаны отдельным интегралом.

Для R = 10 мкм первый порог равен 4,7713 ТГц, тогда как привод на 100 Гц даёт ωR/c = 2,10 × 10⁻¹¹. Доступное механическое движение исследует практически статическую силу. Само наличие вычисленной терагерцевой шкалы не делает механический источник терагерцевым возбудителем. На левой панели рисунка 44 показан безразмерный динамический эталон при r = 3R; область высоких частот служит прогнозом указанного уравнения поля, а не паспортом предложенного механического опыта.

От точечных масс к измеряемому моменту

Настоящая масса имеет форму, толщину и распределение плотности. Когда зазор сопоставим с её размерами, сила между центрами не описывает показание датчика. Нужно суммировать взаимодействие всех пар элементов вещества. Для вращающегося источника сначала вычисляют полную потенциальную энергию при угле θ, а затем её производную по этому углу. В интеграл входят измеренные поверхности, неоднородности плотности, отверстия и экран. Эта операция занимает центральное место в приборной модели: слабый эффект, который исчезает после уточнения геометрии, не свидетельствует об изменившемся пространстве. Геометрия самого прибора должна быть известна лучше, чем геометрия, которую он призван открыть.

$$U(\theta) = -G\int d^3x\, d^3y\, \frac{\rho_1(\mathbf{x})\rho_2(\mathbf{y})}{s(\mathbf{x},\mathbf{y},\theta)}\left[1 + \sum_n \alpha_n\, e^{-s(\mathbf{x},\mathbf{y},\theta)/\lambda_n}\right], \qquad \tau_z = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \qquad (10.13)$$

Здесь s - фактическое расстояние между элементами тел после поворота источника. Плотности имеют единицы килограмм на кубический метр, интеграл энергии - джоуль, а момент - ньютон-метр. Полезная конструкция источника содержит несколько пространственных периодов. При вращении они создают разные гармоники, каждая из которых по-своему взвешивает расстояния внутри интеграла. Изменение зазора добавляет независимую информацию. Такой подход помогает отделять форму взаимодействия от общего коэффициента усиления датчика. Но несколько гармоник не следует заранее считать независимыми опытами: одни и те же ошибки поверхности или положения могут одновременно смещать все каналы, и их общая ковариация должна входить в анализ.

Ли и соавторы проверили взаимодействие на зазорах от 52 мкм до 3 мм. В их анализе 2020 года дальность юкавовской поправки гравитационной силы по величине, |α| = 1, ограничена значением менее 38,6 мкм при доверительном уровне 95%. Это конкретная точка сечения области (α, λ), а не универсальный предел радиуса любого дополнительного направления. В работе Тана и соавторов подавление движения экранирующей мембраны уменьшало влияние остаточного поверхностного потенциала. Оба примера показывают, что интерпретация силы зависит от модели взаимодействия и измеренных свойств установки. [27] [28]

Полностью заданный расчёт двух конечных дисков

Рассмотрим два однородных соосных диска радиусом a = 5 мм и толщиной t = 100 мкм каждый. Плотность обоих тел задана равной 19 300 кг/м³. Средний зазор z_0 составляет 50 мкм, а привод уменьшает его на ε cos(ωt), где ε = 0,1 мкм и частота равна 100 Гц. Датчик измеряет первую гармонику осевой силы. Значения определяют расчётный образец: свойства привода, экрана и силового датчика ещё должны проверяться на отдельном макете.

Для сравнения с обычной дальней силой удобно ввести β. Если дальняя скалярная составляющая равна G_s, а измеренный общий коэффициент равен G_N, положим β = G_s/G_N. При сумме двух притягивающих вкладов 0 ≤ β ≤ 1; значение β = 1 возвращает чистый скалярный эталон. Нулевая мода уже включена в G_N. Добавочные юкавовские члены тогда имеют α_n = 2β и λ_n = R/n. Числа ниже используют G_N = 6,67430 × 10⁻¹¹ м³/(кг·с²).

$$V(r) = -\frac{G_N m M}{r}\left[1 + 2\beta \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nr/R}\right] \qquad (10.14)$$

Интеграл по двум цилиндрическим телам можно уменьшить до двух переменных без замены конечных дисков бесконечными пластинами. При поперечном смещении u площадь перекрытия их проекций равна A_ov(u). Сумма глубин двух элементов w имеет треугольный вес b(w). Эти геометрические веса учитывают все пары элементов вещества.

$$A_{\mathrm{ov}}(u) = 2a^2 \arccos\frac{u}{2a} - \frac{u}{2}\sqrt{4a^2 - u^2}, \qquad 0 \le u \le 2a, \qquad (10.15)$$

$$b(w) = \min(w, 2t - w), \quad s = \sqrt{u^2 + (z_0 + w)^2}, \quad 0 \le w \le 2t \qquad (10.16)$$

Геометрические величины интеграла и направление модуляции зазора собраны на рисунке 42.

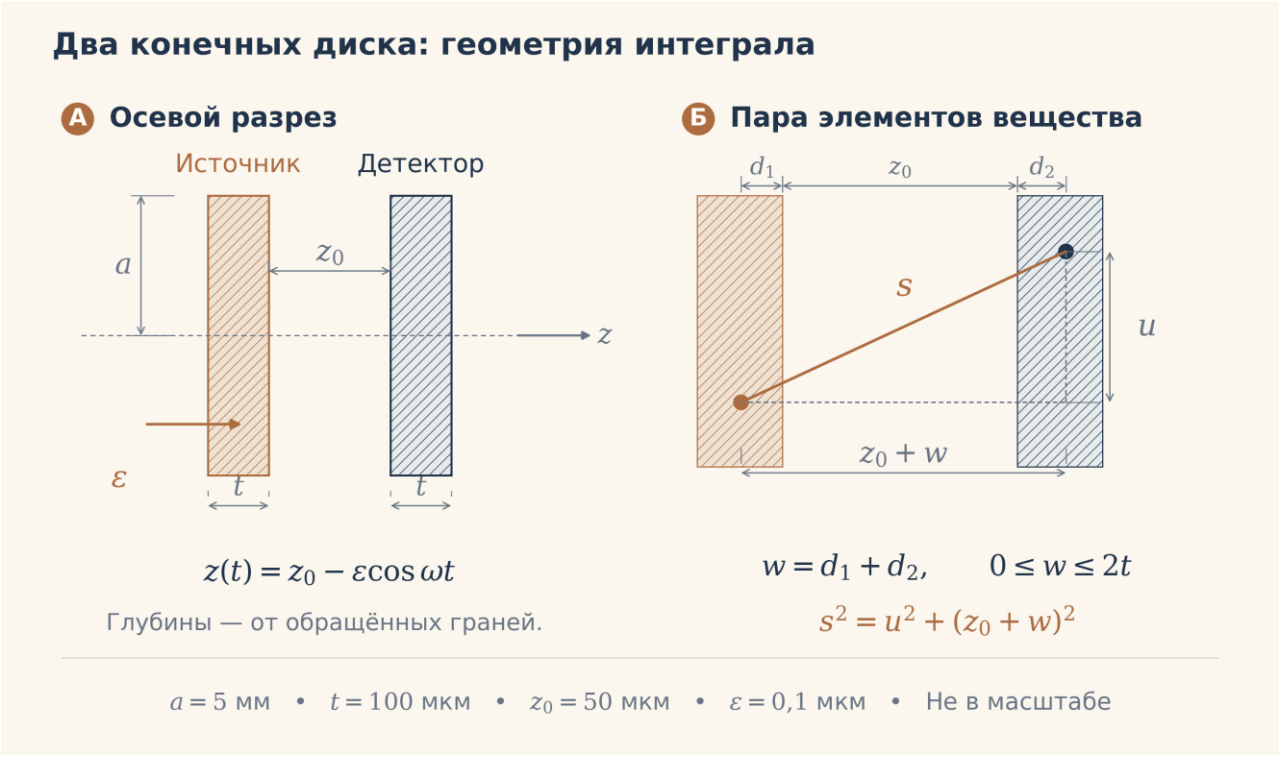


Рисунок 42. Два однородных соосных диска имеют одинаковые радиус a и толщину t. Перемещение источника уменьшает средний зазор z_0 на ε cos(ωt). В увеличенной паре элементов d_1 и d_2 отсчитываются внутрь тел от обращённых граней; их сумма w задаёт осевое расстояние z_0 + w, а u - поперечное. Поэтому расстояние пары равно $s = \sqrt{[u^2 + (z_0 + w)^2]}$. Толщина, зазор и перемещение показаны не в масштабе; дополнительный экран в рассчитанную геометрию не введён.

$$F_Y(z_0;\lambda,\alpha) = 2\pi G_N \rho^2 \alpha \int_0^{2a} u\, A_{\mathrm{ov}}(u)\, du \int_0^{2t} b\,(w)\, \frac{z_0 + w}{s^3}\left(1 + \frac{s}{\lambda}\right) e^{-s/\lambda}\, dw \qquad (10.17)$$

$$F_{1,Y} = -\epsilon \frac{\partial F_Y}{\partial z_0}, \qquad F_{1,\mathrm{tower}} = \sum_{n\geq 1} F_{1,Y}\,(z_0; R/n, 2\beta) \qquad (10.18)$$

Сила F_Y в записи (10.17) положительна для притяжения. При уменьшении зазора она растёт; поэтому амплитуда первой гармоники положительна. В программе производная ядра вычисляется аналитически, после чего выполняется квадратура. Ньютоновский вклад получается заменой экспоненциального множителя единицей и также интегрируется по конечным телам. Он не исчезает при модуляции: краевые поля конечного диска создают ненулевую производную силы.

Величина при R = 10 мкм и β = 1	**Результат расчёта**
Постоянная ньютоновская сила	1,12028 × 10⁻¹³ Н

Величина при R = 10 мкм и β = 1	Результат расчёта
Ньютоновская первая гармоника	$5{,}66708 \times 10^{-18}$ Н
Добавочная гармоника всей башни	$1{,}65240 \times 10^{-19}$ Н
Добавочная гармоника первой пары мод	$1{,}64682 \times 10^{-19}$ Н
Доля следующих мод в добавочной гармонике	0,3377%

Увеличение порядка квадратуры изменило добавочную гармонику менее чем на 10^{-13} относительно её величины, а ньютоновскую гармонику - примерно на $1{,}2 \times 10^{-11}$. Это проверка численного интегрирования выбранной идеальной геометрии. Погрешности реальных размеров, плотности и положения ею не оцениваются. Линеаризация по ε даёт отдельную поправку порядка $(\varepsilon/\lambda)^2$ для отдельной моды; при ε/R = 0,01 ведущая мода глубоко в линейном режиме. Высшие моды, для которых отношение больше, здесь экспоненциально подавлены зазором.

Полученный ньютоновский гармонический фон примерно в 34 раза больше добавочного сигнала. Его калибровка входит в задачу наравне с чувствительностью датчика. Если после всех поправок требуется стандартная ошибка гармоники 3×10^{-20} Н, геометрический и ньютоновский бюджет также должен укладываться в это число. Простое обещание столь малого собственного шума считывания не обеспечивает итоговой точности.

Карта чувствительности и конкурирующий посредник

Пусть стандартная ошибка уже оценённой гармоники силы, включая названные остаточные параметры, по условию равна $\sigma_F = 3 \times 10^{-20}$ Н. Для фиксированного R номинальный двухсторонний масштаб $1{,}96\sigma_F$ даёт $\beta_{min} = 1{,}96\sigma_F/F_1(\beta = 1)$. Это характеристика одного заранее выбранного теста в гауссовом приближении. Поиск по многим R и неопределённость формы фона потребуют общей статистической процедуры главы 14.

$$\beta_{\min}(R) = \frac{1.96\,\sigma_F}{F_{1,\mathrm{tower}}(R, \beta = 1)} \qquad (10.19)$$

При R = 10 мкм получается $\beta_{min} = 0{,}35584$. Это масштаб пересечения заданного порога, а не гарантия высокой мощности: сигнал с математическим ожиданием $1{,}96\sigma_F$ пересекает верхний порог примерно в половине реализаций. Для мощности около 80% при том же двухстороннем номинальном правиле требуется примерно $2{,}80\sigma_F$, что здесь соответствует β около 0,509. На рисунке 43 показана эта условная область чувствительности. Она описывает последствия заданной ошибки, а не достигнутый экспериментальный предел. На ней также не выделена область, якобы разрешённая всеми существующими наблюдениями: для этого надо отдельно перенести реальные ограничения на башню мод и её связи с веществом. Литературный предел при $|\alpha| = 1$ относится к одной поправке Юкавы; превращать его в точную границу для всей башни без повторного анализа нельзя.

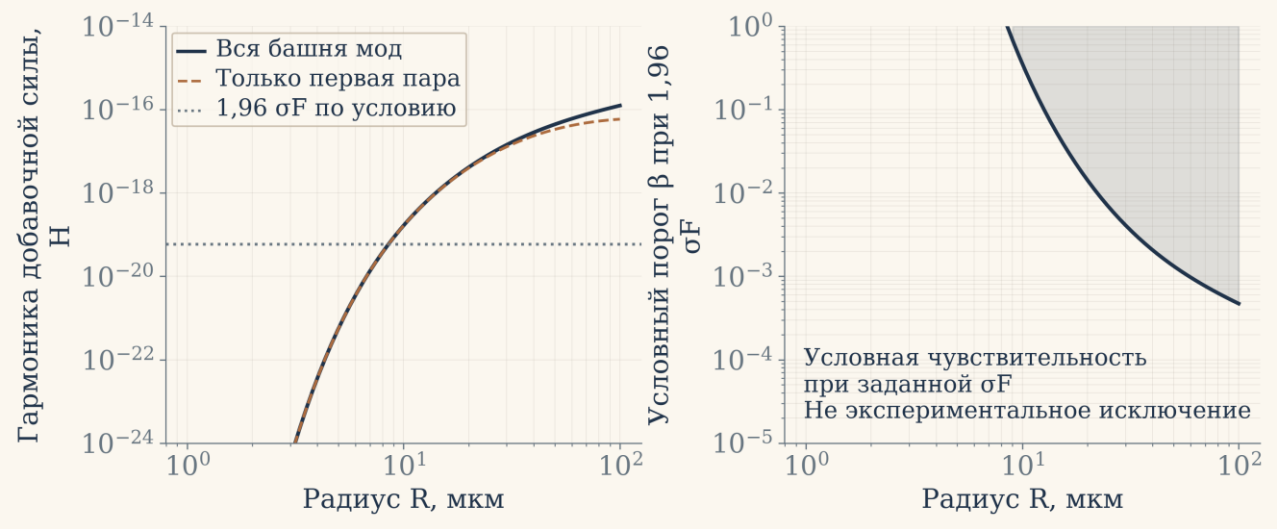


Рисунок 43. Конечные диски и заданный шумовой бюджет. Слева рассчитана добавочная гармоника силы при β = 1, справа - β_min для σ_F = 3 × 10⁻²⁰ Н. Затенение обозначает лишь условную различимость в данном расчёте; экспериментальные исключённые области здесь не нанесены.

Следующая проверка спрашивает, отличима ли башня от одного обычного посредника. В искусственном эталоне заданы R = 20 мкм и β = 0,1. Свободные α и λ одиночного посредника подобраны по точным гармоникам при зазорах 60 и 100 мкм. Получены α = 0,2144505 и λ = 19,77856 мкм. Обе обучающие точки совпадают с башней в точности численного поиска. Это ожидаемо: два параметра подстраиваются под два числа.

Новый зазор	Различие башни и подогнанного посредника	Различие / σ_F
20 мкм	3,56857 × 10⁻¹⁹ Н	11,90
30 мкм	9,68061 × 10⁻²⁰ Н	3,23
40 мкм	2,47110 × 10⁻²⁰ Н	0,82

Данные при 40 мкм в принятом бюджете почти не разделяют эти объяснения. При 20 мкм их прогнозы заметно расходятся. Правая панель рисунка 44 показывает это различие и отмечает точки подгонки. Значения в последнем столбце выражают расстояние между двумя фиксированными прогнозами в единицах назначенной ошибки. Они не являются готовыми значимостями открытия: неопределённость параметров, общие ошибки зазора и повторная подгонка по реальным шумным данным увеличат область перекрытия.

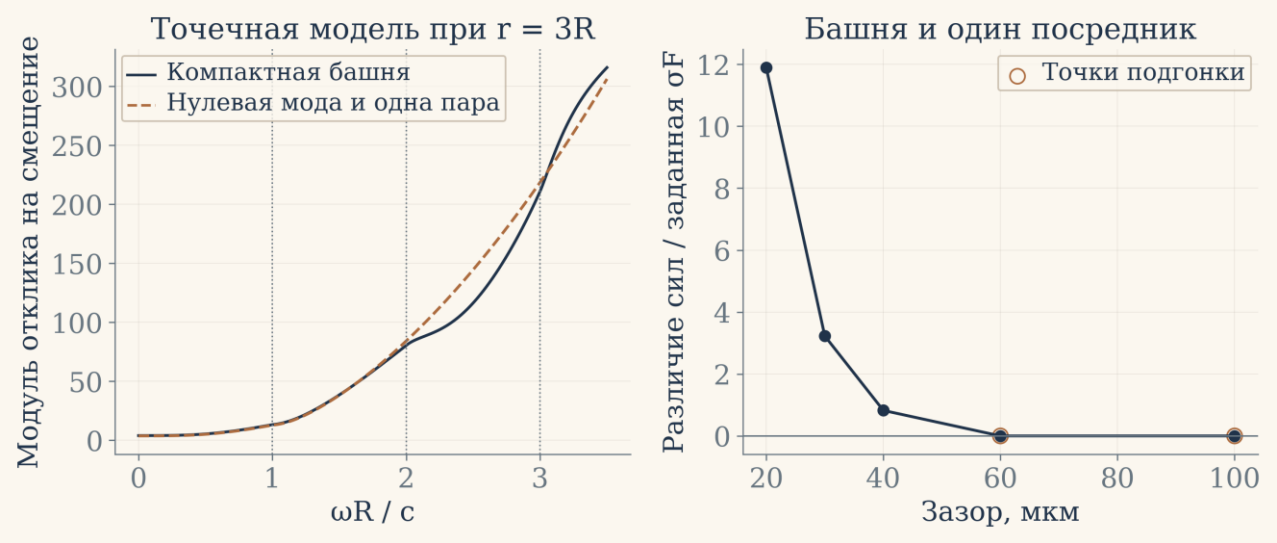


Рисунок 44. Две проверки компактной модели. Слева точечный динамический отклик на смещение источника при r = 3R; вертикали отмечают пороги ωR/c = 1, 2, 3. Справа - различие гармоник конечных дисков между башней и одиночным посредником, совпавшими в двух обучающих точках. Числа получены расчётом.

Все результаты этого раздела воспроизводит программа physics_revision.py. Она выполняет интеграл конечных тел, подгоняет обычного посредника и строит обе панели. Такой пример уточняет смысл спектроскопии геометрии: одних связанных масштабов в уравнении мало; нужны режимы, в которых их вклад превышает неопределённость конкурирующего объяснения.

Какой вывод допускает этот опыт

В выбранной скалярной модели один радиус определяет статические дальности, пороги распространения и динамический отклик. Интеграл для конечных дисков переводит их в гармонику силы, а сравнение с одиночным посредником указывает различающий зазор.

Физический поиск требует измерить геометрию, фон и полный бюджет ошибки, затем выполнить зафиксированные смены зазора. Отклонение установило бы дополнительное взаимодействие в данной полосе. Геометрическая интерпретация потребовала бы согласия других предсказаний того же оператора и проверки более широкого класса посредников.

Далее рассматривается согласованность часовых частот и пространственного градиента поля. Она потребует отдельного контроля движения приборов и общих помех.

Глава 11
Часы и гравиметры как совместный зонд пространства

Одна причина и два способа наблюдения

Два одинаковых прибора способны подтвердить повторяемость показания. Два разных типа приборов дополнительно проверяют связь между наблюдаемыми величинами. В слабом квазистатическом поле сравнение часов связано с разностью потенциалов, а ускорение пробного тела - с его пространственным градиентом. Поэтому часы и гравиметры можно объединить в проверку одной причины. Эта глава доводит выбранную статистическую модель до совместного спектра, конкретной геометрии, шумового бюджета и синтетического опыта с перестановкой часов.

В слабом поле обозначим дополнительный потенциал через δΦ и введём безразмерную величину q = δΦ/c². Для фиксированных часов при медленных изменениях и после учёта известных эффектов относительная частотная поправка между точками a и b приблизительно равна разности q. Выбранный знак зависит от того, какое отношение частот названо y_ab; ниже используется именно определение, записанное в формуле. Гравиметрический канал связан с отрицательным пространственным градиентом потенциала. Реальный датчик на опоре измеряет движение относительно своей механической системы, поэтому его отклик на эту величину требуется калибровать. Уравнение поля само по себе ещё не является уравнением показания прибора. Обозначение q в этой главе относится только к безразмерному потенциалу и не используется для матричного скаляра сетевой задачи.

$$q(\mathbf{x},t)=\frac{\delta\Phi(\mathbf{x},t)}{c^2},\qquad y_{ab}(t)\simeq q(\mathbf{x}_a,t)-q(\mathbf{x}_b,t),\qquad \delta\mathbf{a}(\mathbf{x},t)=-c^2\nabla q(\mathbf{x},t) \tag{11.1}$$

Возможность измерять очень малые гравитационные различия с помощью часов подтверждена отдельными опытами, но это не свидетельство предлагаемого дополнительного поля. Ботвелл и соавторы наблюдали гравитационный частотный градиент внутри миллиметрового атомного образца. Чжэн и соавторы провели слепую проверку красного смещения в массиве из пяти атомных ансамблей с общим перепадом высоты один сантиметр. Для настоящей главы эти работы служат подтверждением измерительного принципа и культуры контроля систематических эффектов. Их результаты нельзя превращать в готовую чувствительность произвольной сети: другие расстояния, линии передачи, интервалы опроса и окружающая среда потребуют собственной оценки. [29] [30]

Ускоренные часы в плоском пространстве-времени

Прежде чем приписывать совместный сигнал кривизне, полезно разобрать случай, где её точно нет. Пусть система наблюдателей равномерно ускорена вдоль x. В координатах Риндлера интервал имеет вид

$$ds^2 = -N(x)^2 c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad N(x) = 1 + \frac{a_0 x}{c^2} > 0 \qquad (11.2)$$

Для неподвижных в этих координатах часов собственное время равно $d\tau = N(x)dt$. Их сравнение содержит зависящий от положения частотный сдвиг. При $a_0 = 9{,}81$ м/с² и малой базе один метр его первый порядок составляет $1{,}0915 \times 10^{-16}$. Акселерометр на опоре также имеет ненулевое показание: собственное ускорение наблюдателя равно $a_0/N(x)$. Тем не менее пространство-время плоское. Это видно непосредственно из перехода к инерциальным координатам.

$$cT = \left(x + \frac{c^2}{a_0}\right)\sinh\frac{a_0 t}{c}, \qquad X = \left(x + \frac{c^2}{a_0}\right)\cosh\frac{a_0 t}{c} - \frac{c^2}{a_0} \qquad (11.3)$$

Подстановка (11.3) превращает метрику в $-c^2dT^2 + dX^2 + dy^2 + dz^2$, поэтому весь тензор Римана равен нулю. Даже пространственный градиент показаний ускоренных опор не следует напрямую отождествлять с приливной кривизной. Для $\alpha(x) = a_0/N(x)$ выполняется точное соотношение

$$\partial_x \alpha + \frac{\alpha^2}{c^2} = 0 \qquad (11.4)$$

Второе слагаемое учитывает кинематику выбранной ускоренной системы. Относительное ускорение свободных пробных тел в локальной инерциальной системе содержит другой смысл: после учёта начальных скоростей и движения измерительной базы оно связано с приливными компонентами кривизны. В общем случае требуется измерительный протокол, включающий наблюдателей, обмен сигналами и движение опор. Именно такие операционные вопросы рассматриваются в работах о часовом компасе и релятивистическом геоиде. [41] [42]

Контроль Риндлера задаёт конкретное требование к расширенной процедуре: она должна возвращать нулевую кривизну после учёта ускорения системы. Теперь проверим ту же конструкцию на фоне с заранее заданным ненулевым приливным компонентом.

Ненулевая кривизна: часы и приливный градиометр

Теперь зададим фон с ненулевым приливным действием и проведём через него оба измерительных канала. Сохраним статическую метрику с евклидовыми пространственными сечениями, добавив к функции N квадратичный член. Параметр a_0 имеет единицы ускорения, к - обратной секунды в квадрате. Рассматривается область $N > 0$, где оба добавочных члена малы. Это заданный локальный геометрический пример; источник его напряжений не выводится из уравнений Эйнштейна, и моделью земного поля он не объявляется.

$$ds^2 = -N(x)^2 c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad N(x) = 1 + \frac{a_0 x}{c^2} + \frac{\kappa x^2}{2c^2} \tag{11.5}$$

Чтобы знак кривизны был проверяемым, фиксируем соглашение для тензора Римана следующей формулой. Координата x^0 равна ct. Штрихи далее обозначают производные по x, который здесь одновременно измеряет собственную пространственную длину на статическом сечении.

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \tag{11.6}$$

В секторе времени и x ненулевые коэффициенты связности равны $\Gamma^{0}_{0x} = \Gamma^{0}_{x0} = N'/N$ и $\Gamma^{x}_{00} = NN'$. Их подстановка даёт $R^{x}_{0x0} = NN''$. Переход к ортонормированному реперу неподвижного наблюдателя делит две временные компоненты на N. Если $\alpha = c^2 N'/N$ - измеряемое собственное ускорение опоры вдоль положительной оси x, результат удобно выразить в единицах приливного градиента:

$$\mathcal{K}(x) = c^2 R_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}\hat{x}} = c^2 \frac{N''}{N} = \partial_x \alpha + \frac{\alpha^2}{c^2}, \qquad \mathcal{K}(0) = \kappa \tag{11.7}$$

Статические часы расположим при x = 0 и x = ±h. Два крайних источника с одинаковой собственной частотой ν_0 посылают свет центральному наблюдателю, который сравнивает принятые частоты со своими часами. Для каждого луча частота пропорциональна $-u\cdot k$; сохранение ковариантной временной компоненты волнового вектора в статической метрике задаёт точное отношение. Поэтому зарегистрированные сдвиги $y_\pm$ равны $N(\pm h) - 1$. Их сумма убирает линейное ускорительное слагаемое:

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{(u^\mu k_\mu)_R}{(u^\mu k_\mu)_E} = \frac{N_E}{N_R}, \qquad C_2 = y_+ + y_- = \frac{\kappa h^2}{c^2} \tag{11.8}$$

Второй канал - разность показаний двух статических акселерометров на концах той же базы, дополненная показанием центральной опоры. Их оси согласованы вдоль x. Конечная разность оценивает производную, а отдельно измеренный квадрат ускорения удаляет кинематический вклад. Полученная величина имеет независимую физическую интерпретацию: свободные близкие тела в невращающемся локальном инерциальном репере испытывают относительное приливное ускорение. Для положительной к оно сжимающее. Связь с измерительными реперами и движением опор является частью протокола часового компаса. [41]

$$\widehat{\kappa}_g = \frac{\alpha(h) - \alpha(-h)}{2h} + \frac{\alpha(0)^2}{c^2}, \qquad \delta a_{\parallel} = -\mathcal{K}\,\xi_{\parallel} \tag{11.9}$$

Рисунок 45 сопоставляет один и тот же часовой и акселерометрический протокол в ускоренном плоском фоне и при положительной приливной кривизне.



Рисунок 45. Крайние атомные часы передают свет одним центральным часам; все три станции удерживаются на опорах, а оси акселерометров направлены вдоль +x. Частотные сдвиги определены как N(±h) − 1. Их сумма убирает линейный ускорительный член. Градиент ускорения требует отдельной центральной поправки α(0)²/c². Нижние пары обозначают свободные пробные тела, не часовые опоры: положительная к даёт сжатие. Это заданная локальная метрика; она не изображает выведенное поле Земли. Конечная база оставляет вычисляемую поправку к градиентной оценке.

Выберем a_0 = 9,81 м/с², к = 3 × 10^{-6} $с^{-2}$ и h = 100 м. Тогда C_2 = 3,33795 × 10^{-19}, а центральный компонент кривизны равен 3,33795 × 10^{-23} $м^{-2}$. Разность ускорений опор составляет 5,999999998 × 10^{-4} м/с². Кинематическая поправка равна 1,07077 × 10^{-15} $с^{-2}$; после её прибавления оценка к отличается от заданного значения на −5,01 × 10^{-25} $с^{-2}$ из-за конечной базы. Соответствующее свободное относительное ускорение на базе 200 м в локальном приближении равно −6 × 10^{-4} м/с².

Назначим полные стандартные ошибки после усреднения: каждому из трёх независимых часовых каналов 10^{-20}, каждому акселерометру 2 × 10^{-5} м/с². Это условия расчёта, не

заявленные характеристики установки. Общие центральные часы входят в обе частотные разности: их ковариация равна σ², поэтому ошибка C_2 составляет √6 σ, а не 2σ. Передача частоты предполагается калиброванной; неизвестная дополнительная корреляция потребовала бы пересчёта бюджета.

Геометрия имеет две разные ошибки: стандартная ошибка общей полубазы - 1 мм, положения середины крайних приборов относительно центрального - 10 мкм. Последняя особенно существенна: смещение середины b добавляет к C_2 линейный член $2a_0b/c^2$. Независимое измерение центрирования нельзя заменять обещанием симметрии. С учётом этих ошибок первая линейная передача неопределённости даёт σ(κ) = 2,2102 × 10^{-7} $с^{-2}$ по часам и 1,4142 × 10^{-7} $с^{-2}$ по градиометру. Отношения заданного сигнала к этим ошибкам равны 13,6 и 21,2; это условный бюджет фиксированной конфигурации.

Для контрольного Риндлера при κ = 0 тот же часовой контраст точно нулевой, как и локальная кривизна. Конечная разность ускорений оставляет только вычисляемый остаток −1,28 × 10^{-43} $с^{-2}$. Значит, протокол различает ускоренную плоскую систему и заданный искривлённый фон. Вычисление выполнено с повышенной арифметической точностью: обычное вычитание трёх чисел около единицы здесь теряет часовой контраст. Эта вычислительная предосторожность не задаёт точность часов. Далее возвращаемся к случайному потенциалу: его совместный сигнал сам по себе не заменяет выполненного здесь приливного контроля.

Проверяемый шаблон случайного поля

Для начала достаточно построить ограниченную феноменологическую гипотезу. Пусть q имеет нулевое среднее, одинаковую дисперсию в каждой точке и пространственную корреляцию, убывающую на масштабе ℓ. Во времени корреляция затухает с характерным временем τ_c. Простейший удобный вариант сочетает гауссову зависимость от расстояния с экспоненциальной зависимостью от временного сдвига. Параметр A описывает среднеквадратичную амплитуду q, ℓ измеряется в метрах, τ_c - в секундах. Такой выбор не следует из доказанной теории квантовой гравитации. Он задаёт конкретный объект проверки, для которого можно заранее вывести наблюдаемые соотношения и определить, какие конфигурации датчиков наиболее информативны.

$$C_q(r, \Delta t) = \langle q(\mathbf{x}, t) q(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t + \Delta t) \rangle = A^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2\ell^2}\right) \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_c}\right) \qquad (11.10)$$

Корреляционную функцию нельзя выбирать только по красивому виду. Для любой совокупности точек матрица её значений обязана давать неотрицательную дисперсию любой линейной комбинации сигналов. Здесь это условие выполняется: пространственное гауссово ядро и временное экспоненциальное ядро положительно определены, а их произведение сохраняет нужное свойство. Но вероятностная допустимость ещё не означает физическую завершённость. Необходимо объяснить, какой динамикой порождается поле, как оно связано с веществом и каким преобразованиям подчиняется при смене системы отсчёта. Заданная

ковариация описывает статистику в выбранной системе наблюдения и сама по себе не определяет ни причинный отклик, ни скорость передачи воздействия.

Особенно важен предел большой длины корреляции. Если все часы находятся в области, значительно меньшей ℓ, поле почти одинаково сдвигает их частоты, и разностное измерение подавляет эффект. Сеть не становится чувствительнее к совершенно общему сдвигу только потому, что её часы очень точны. В противоположном пределе, когда расстояние намного больше ℓ, часы видят почти независимые значения, и дисперсия разности насыщается. Между этими пределами скрыта информация о пространственном масштабе. Поэтому нужны разные базы, а не единственное расстояние. Для одинаковой временной полосы из выбранного ядра немедленно следует формула дисперсии, показывающая оба режима.

$$\mathrm{Var}(y_{ab}) = 2A^2\left[1 - \exp\left(-\frac{d_{ab}^2}{2\ell^2}\right)\right] \qquad (11.11)$$

$$\sqrt{\mathrm{Var}(y_{ab})} \simeq A\frac{d_{ab}}{\ell} \quad (d_{ab} \ll \ell), \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_{ab})} \to \sqrt{2}A \quad (d_{ab} \gg \ell) \qquad (11.12)$$

На рисунке 46 слева видно подавление разности при малой базе, справа - временную полосу модели. Обозначение ℓ_c на горизонтальной оси рисунка означает ту же величину ℓ, которая используется в тексте; отдельного второго пространственного масштаба здесь нет.

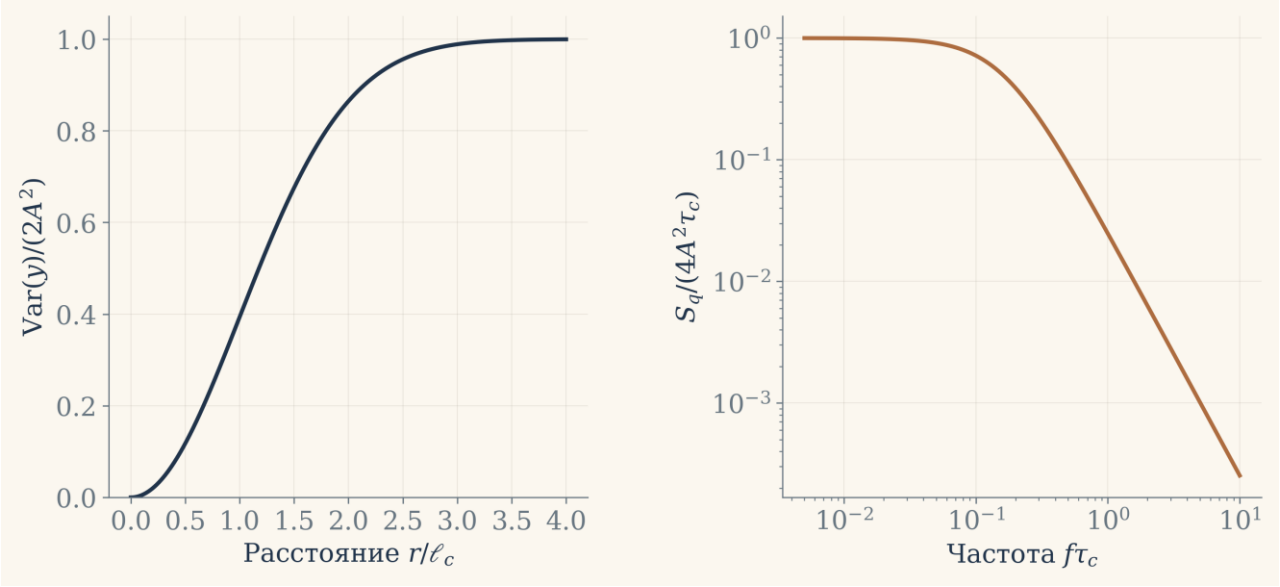


Рисунок 46. Пространственная и временная части выбранной ковариации. Слева дисперсия разности двух часов, нормированная на 2A²; справа нормированный лоренцев спектр одного q. На рисунке ℓ_c = ℓ текста.

Одна физическая интерпретация и её пределы

Согласованный часовой и гравиметрический сигнал может иметь обычное происхождение. Движущаяся масса создаёт потенциал −GM/|x − x_s(t)|; его разность и градиент попадут в оба канала с теми же квазистатическими коэффициентами. Поэтому первым физическим результатом такой сети будет оценка общего поля, а происхождение этого поля придётся

устанавливать отдельно. Служебные измерения давления, движения опор и распределения близких масс становятся частью научного опыта.

Для пространственного гауссова шаблона можно явно построить квазистатическую ньютоновскую интерпретацию. В выбранной системе зададим малую флуктуацию плотности вокруг положительного фонового распределения так, чтобы выполнялось уравнение Пуассона. Тогда

$$\delta\rho(\mathbf{x},t)=\frac{c^2}{4\pi G}\nabla^2 q(\mathbf{x},t),\qquad P_{\delta\rho}(\mathbf{k},f)=\frac{c^4k^4}{(4\pi G)^2}P_q(\mathbf{k},f)\qquad(11.13)$$

Положительность спектра сохраняется. В трёх пространственных измерениях гауссово ядро даёт среднеквадратичную плотность $c^2\sqrt{15}\,A/(4\pi G\ell^2)$. Для численного примера ниже это 4,15 кг/м³. Значение характеризует требуемую статистику распределённого материального фона в данной интерпретации, а не измеренную плотность и не доказательство его существования. Локально отрицательная δρ означает уменьшение относительно фоновой плотности. Использование гауссова закона остаётся приближением малых флуктуаций; его бесконечные хвосты нельзя считать буквальной моделью отрицательной полной массы.

Такое поле не является строго гармоническим потенциалом в области без источников: $\nabla^2 q$ обычно отлично от нуля. Предположение об окружающем вакууме поэтому нельзя одновременно сочетать с этим материальным объяснением без изменения модели. Для реального фона потребуются также законы движения материи, сохранение массы и измерение его спектра. Соотношение (11.13) завершает статическую связь источника и потенциала, но не заменяет гидродинамику или упругость источника.

Экспоненциальная временная ковариация соответствует процессу с изломом при нулевом временном сдвиге. Она пригодна для спектрального шаблона в ограниченной полосе, однако полная гладкая метрика на всех частотах потребовала бы дополнительного ультрафиолетового описания. Здесь рабочие сигналы фильтруются; при построении физического источника высокочастотный спектр должен плавно обрезаться выше полосы опыта. Условия $2\pi f\ell/c \ll 1$ позволяют пользоваться квазистатическим приближением. Пространственная корреляция шума сама по себе не задаёт скорость передачи управляемого воздействия.

В стохастической полуклассической гравитации случайная часть метрического отклика связывается с флуктуациями энергии-импульса и уравнением Эйнштейна-Ланжевена. Это пример более глубокой динамической постановки, а не выведенное происхождение выбранного здесь гауссова ядра. [43] Для данной главы достаточно фиксировать систему отсчёта, полосу и статус потенциала как проверяемой эффективной модели.

Спектр частотных разностей и градиента

В частотной области выбранный временной закон даёт лоренцев спектр. Ниже используется односторонняя спектральная плотность: интеграл по неотрицательным частотам равен полной дисперсии. Поэтому коэффициент 4 в числителе связан с соглашением о нормировке, а не с дополнительной физикой. Для безразмерного q единица спектральной

плотности - обратный герц. Обозначив пространственное ядро между точками i и j через K_ij, можно получить взаимный спектр любых двух часовых сравнений. Его четыре слагаемых соответствуют четырём парам точек. Часы, присутствующие в обоих сравнениях, одновременно создают общие инструментальные ошибки; эти ошибки нужно учитывать отдельно от гипотетического поля.

$$S_q(r,f) = \frac{4A^2\tau_c}{1+(2\pi f\tau_c)^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\ell^2}\right), \qquad K_{ij} = e^{-d_{ij}^2/(2\ell^2)}, \qquad f \geq 0 \qquad (11.14)$$

$$S_{y_{ab}y_{cd}}(f) = \frac{4A^2\tau_c}{1+(2\pi f\tau_c)^2}\left(K_{ac}-K_{ad}-K_{bc}+K_{bd}\right) \qquad (11.15)$$

Гравиметрический прогноз получается пространственным дифференцированием того же ядра. Пусть r = x − x′. Поскольку ускорения содержат по одной производной, их ковариация содержит смешанную вторую производную по координатам двух точек. При нулевом разделении среднеквадратичное значение одной компоненты равно c²A/ℓ. На ненулевой базе ковариация зависит не только от расстояния, но и от ориентации измеряемой компоненты. Продольные и поперечные каналы поэтому несут разную информацию. Это различие возникает из градиентной природы поля; оно не должно добавляться в подгонку как независимая произвольная угловая функция. Иначе общий физический смысл двух измерений будет потерян.

$$\langle \delta a_i(\mathbf{x},t)\delta a_j(\mathbf{x}',t)\rangle = c^4A^2\left(\frac{\delta_{ij}}{\ell^2}-\frac{r_ir_j}{\ell^4}\right)e^{-r^2/(2\ell^2)}, \qquad a_{i,\mathrm{rms}} = \frac{c^2A}{\ell} \qquad (11.16)$$

При малой базе разность потенциалов приблизительно равна производной, умноженной на расстояние. Отсюда получается практическая проверка: часовой сигнал вдоль базы должен соответствовать проекции ускорения с известным коэффициентом d/c² и выбранным знаком. Это соотношение полезнее совпадения двух спектральных пиков, поскольку фиксирует относительную амплитуду. Однако оно справедливо только при d намного меньше ℓ, одинаковой фильтрации времени и корректной модели отклика обоих приборов. Если один канал усреднялся минуту, а другой регистрировал быстрые колебания, их полные среднеквадратичные значения сравнивать напрямую нельзя. Простая размерностная проверка не исправляет несовпадение измерительных полос.

$$y_{ab} \simeq -\frac{\delta a_{\parallel} d_{ab}}{c^2} \qquad (d_{ab} \ll \ell) \qquad (11.17)$$

Смешанный спектр двух разных приборов

Введём $S_0(f) = 4A^2\tau_c/[1 + (2\pi f\tau_c)^2]$ и $K(x,z) = \exp[-|x - z|^2/(2\ell^2)]$. Спектральные амплитуды умножаются на $\exp(-i2\pi ft)$, а взаимный спектр определяется порядком S_uv =

⟨ũṽ*⟩. Смешанный канал получается одной производной того же ядра. Поскольку ∂K(x,z)/∂z_i = (x_i − z_i)K/ℓ², знак ускорения сохраняется явно:

$$S_{y_{ab},a_i(\mathbf{z})}(f) = -\frac{c^2 S_0(f)}{\ell^2}\left[(x_a - z)_i K(\mathbf{x}_a,\mathbf{z}) - (x_b - z)_i K(\mathbf{x}_b,\mathbf{z})\right] \qquad (11.18)$$

Единица (11.18) - (м/с²)/Гц: первый канал безразмерен, второй является ускорением. Автоспектр ускорения имеет единицу (м/с²)²/Гц. Эти разные размерности следует сохранять при построении совместной матрицы; для численного обращения её удобно нормировать на характерные шумы каждого канала.

Расположим часы a при x = +d/2, часы b при x = −d/2, а гравиметр - при x = 0. Его положительное направление совпадает с положительным x. Тогда отрицательный знак взаимного спектра означает, что положительная разность потенциалов направляет ускорение в противоположную сторону. Три сигнальных элемента матрицы принимают простой вид:

$$S_{yy} = 2S_0\left(1 - e^{-d^2/(2\ell^2)}\right), \qquad S_{aa} = \frac{c^4 S_0}{\ell^2}, \qquad S_{ya} = -\frac{c^2 S_0 d}{\ell^2} e^{-d^2/(8\ell^2)} \qquad (11.19)$$

$$\gamma^2 = \frac{|S_{ya}|^2}{S_{yy} S_{aa}} = \frac{x}{\sinh x}, \qquad x = \frac{d^2}{4\ell^2} \qquad (11.20)$$

Это следствие выбранной ковариации. При d/ℓ → 0 когерентность стремится к единице, однако дисперсия часовой разности одновременно стремится к нулю. При d/ℓ ≫ 1 часы видят почти независимые потенциалы, а срединный гравиметр слабо связан с обоими. Между этими пределами нужно выбирать базу с учётом шумов, а не по одному максимальному значению γ². При d = ℓ идеальная когерентность равна 0,98966.

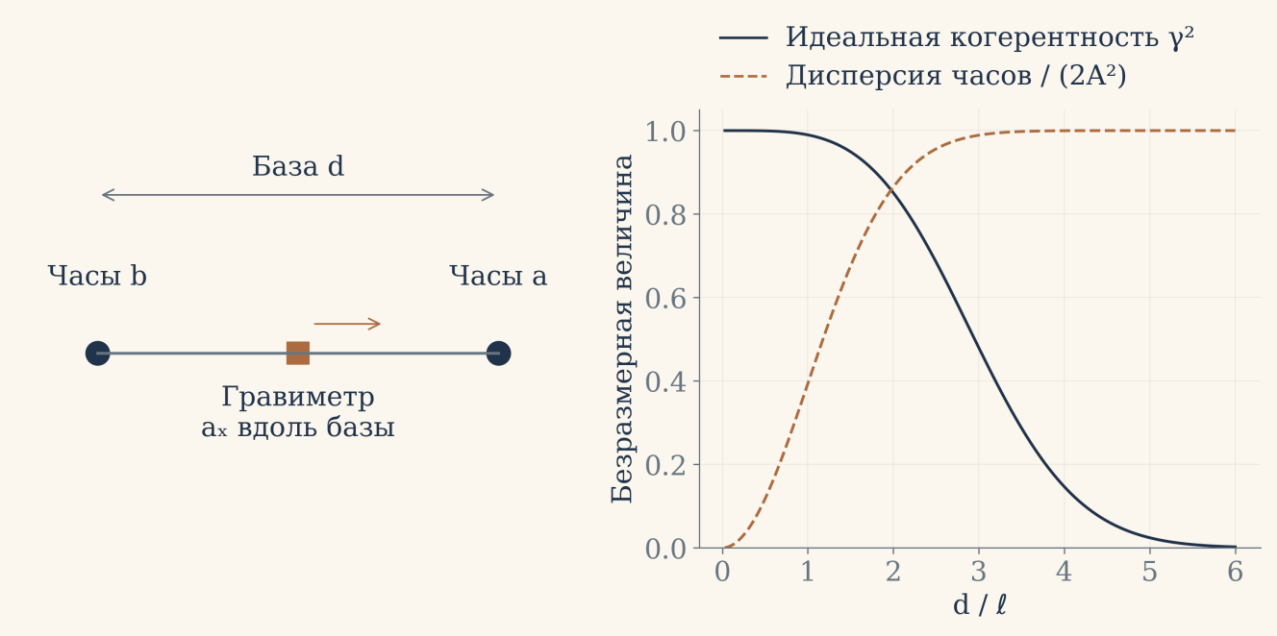


Рисунок 47. Два часа и центральный гравиметр. Положительное направление ускорения направлено от b к a. Справа показаны идеальная сигнальная когерентность и относительная дисперсия часового канала. Высокая когерентность при малой базе сопровождается малой амплитудой измеряемой разности.

Рисунок 47 объясняет, почему полезна серия баз. В длинноволновом пространственном режиме отношение сигналов в основном фиксирует градиент, а информация о самой длине корреляции слаба. Измерение около $d \simeq \ell$ и на большей базе меняет форму спектральной матрицы и помогает разделять A и ℓ. Это задача оценки параметров, которую нельзя решить одним увеличением времени на почти нулевой базе.

Общая полоса измерения

Теоретический спектр становится наблюдаемым только после прохождения через временное окно опроса, линию передачи и алгоритм обработки. Часы могут измерять усреднённую фазу или частоту в отдельных циклах. Гравиметр имеет собственную чувствительность к частоте, механический резонанс либо последовательность атомных импульсов. Перед совместным анализом каждому каналу сопоставляют комплексную передаточную функцию H(f), включающую амплитуду и фазу. Переход к общей полосе выполняют с учётом этих функций. Частоты, на которых отклик плохо известен или почти равен нулю, нельзя восстанавливать бесконтрольным делением: такая операция усиливает шум и создаёт видимость структуры там, где данные не содержат информации.

$$S_{ab}^{\mathrm{obs}}(f) = H_a(f) H_b^*(f) S_{ab}^{\mathrm{field}}(f) + S_{ab}^{\mathrm{noise}}(f) \qquad (11.21)$$

Квазистатическая формула частотной разности требует, в частности, чтобы характерное время изменения поля было значительно больше времени распространения света по базе: произведение $2\pi f d/c$ должно быть мало в используемой полосе. При более быстрых изменениях вклад пути сигнала, движение концов линии и выбор сравниваемых событий необходимо вычислять полностью. Это не поправка, которую можно автоматически свести к

дополнительному шуму. Она изменяет сам физический прогноз. Даже в медленном режиме движение платформ, изменение высоты, температурное удлинение линии и остаточная ошибка передачи частоты способны имитировать часть сигнала. Поэтому время, геометрия и калибровка должны записываться вместе с основными данными.

Для идеального прямоугольного частотного окна между f_min и f_max доля дисперсии выбранного лоренцева процесса выражается через разность арктангенсов. Эта формула удобна для предварительного бюджета: она сразу показывает, какую часть предполагаемого поля прибор вообще наблюдает. Если τ_c очень велико по сравнению с длительностью эксперимента, процесс выглядит почти постоянным дрейфом. Если оно слишком мало по сравнению с интервалом опроса, большая часть мощности остаётся вне полосы и может давать наложение частот при недостаточной фильтрации. Значит, отсутствие видимого сигнала имеет смысл только вместе с указанным диапазоном τ_c и с моделью отбора данных.

$$B(f_{\min}, f_{\max}) = \frac{2}{\pi}[\arctan(2\pi f_{\max}\tau_c) - \arctan(2\pi f_{\min}\tau_c)], \qquad \mathrm{Var}_{\mathrm{band}}(q) = A^2 B \qquad (11.22)$$

Синтетический опыт с общей помехой и перестановкой часов

Рассмотрим один полностью определённый случай с известными ℓ = 1000 м и τ_c = 10 с. База равна 1000 м, частота спектральной ячейки f_0 = 0,01 Гц, вносимая амплитуда A = 10^{-20}. Выходной шум часов задан величиной n_y = $10^{-18}/\sqrt{\text{Гц}}$, а шум гравиметра - n_a = 10^{-7} м/с²/√Гц. Эти значения являются входными условиями расчёта. Они не сообщают о построенной сети с такой точностью.

Внесённое A соответствует полному среднеквадратичному ускорению одной компоненты 8,99 × 10^{-7} м/с². Оно выбрано для вычислительного опыта, а не как установленная допустимая область нового космологического поля. Совместимость такого поля со всеми уже существующими измерениями здесь не заявляется. Ньютоновская интерпретация выше показывает, насколько сильным материальным фоном мог бы сопровождаться этот шаблон.

Часовая частота усредняется одну секунду с временной меткой в середине окна; H_y = sinc(πfT_y), где sinc(z) = sin(z)/z. Для гравиметра выбрана калиброванная однополюсная функция H_a = 1/(1 − if/f_c) с f_c = 0,1 Гц и принятым знаком Фурье-амплитуд. В выходной шум включена положительная общая корреляция ρ_n = 0,3. На каждой частоте наблюдаемая матрица равна

$$\mathbf{S}^{\mathrm{obs}} = \mathbf{H}\mathbf{S}^{\mathrm{field}}\mathbf{H}^{\dagger} + \mathbf{N}, \qquad \mathbf{H} = \mathrm{diag}\left(H_y, H_a\right), \qquad (11.23)$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_y^2 & \rho_n n_y n_a \\ \rho_n n_y n_a & n_a^2 \end{pmatrix}, \qquad |\rho_n| \le 1 \qquad (11.24)$$

Матрица помех (11.24) неотрицательно определена. Фильтрация также сохраняет положительность сигнальной матрицы, поэтому комплексные гауссовы наблюдения можно генерировать через разложение Холецкого нормированной суммы. В программе используется

seed 20261113 и 4096 независимых спектральных реализаций на каждую конфигурацию. Получаемые значения являются синтетическими данными с известной ковариацией.

Во второй конфигурации часы меняются местами, а гравиметр и электронные каналы сохраняются. Идентичности a и b относятся к приборам: перестановка меняет знак полевого S_ya, тогда как выбранная общая электронная помеха остаётся прежней. Такое поведение помехи является проверяемым предположением протокола. Если перестановка меняет саму электронику или её связь с вибрацией, потребуется отдельная модель этого изменения.

Идентичность часов, фиксированное направление гравиметра и сохранение электронных каналов при перестановке показаны на рисунке 48.

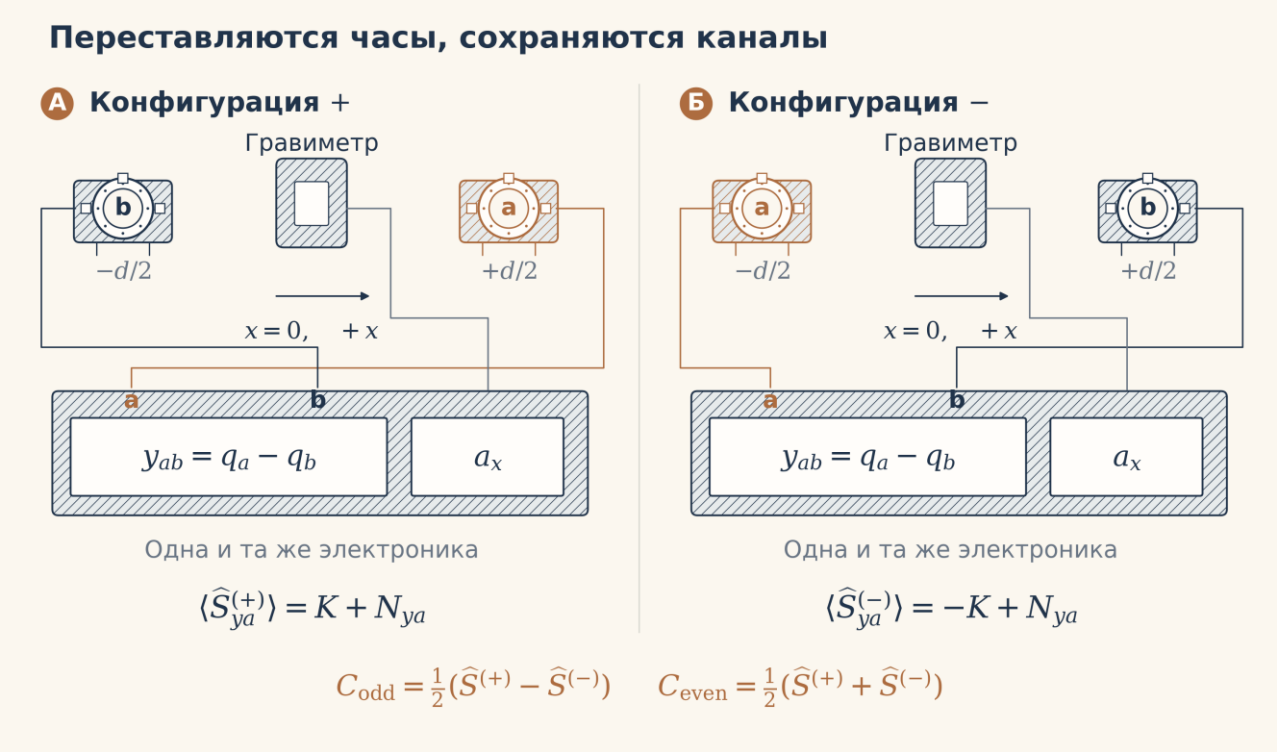


Рисунок 48. В первой конфигурации часы a находятся при +d/2, часы b - при −d/2; во второй меняются только их физические положения. Электронное сравнение сохраняет определение y_ab = q_a − q_b, гравиметр остаётся в центре и не меняет положительную ось. Здесь K обозначает отфильтрованный полевой взаимный спектр. Выбранная общая электронная помеха N_ya считается чётной относительно вмешательства. Это проверяемое предположение конкретного опыта: обычный пространственный гравитационный вклад также меняет знак и автоматически не исключается.

$$C_{\text{odd}} = \frac{\hat{S}^{(+)}_{ya} - \hat{S}^{(-)}_{ya}}{2}, \qquad C_{\text{even}} = \frac{\hat{S}^{(+)}_{ya} + \hat{S}^{(-)}_{ya}}{2} \qquad (11.25)$$

В среднем нечётная часть содержит H_yH_a* S_ya поля, а чётная часть - N_ya общей помехи. Положим K = H_yH_a* S_ya(A = 1). Оценка квадратной амплитуды до ограничения неотрицательности равна Re(K* C_odd)/|K|². Отрицательное значение на шумовых данных следует сохранять при проверке смещения оценки, а при сообщении физического предела отдельно учитывать границу A² ≥ 0.

Величина	Результат данного расчёта
Идеальная сигнальная γ^2	0,98966
Наблюдаемая γ^2 в первой конфигурации	0,001678
Внесённое A^2	$1{,}0000 \times 10^{-40}$
Восстановленное A^2	$1{,}2252 \times 10^{-40}$
Стандартная ошибка A^2 по заданной ковариации	$1{,}6575 \times 10^{-41}$
Восстановленное A	$1{,}1069 \times 10^{-20}$
Оценка A^2 в отдельном опыте только с общей помехой	0,157 стандартной ошибки от нуля

Падение наблюдаемой когерентности почти в 590 раз показывает роль часового шума. Тем не менее накопление заданного числа независимых реализаций позволяет выделить нечётный взаимный спектр. Номинальный интервал $A^2 \pm 2\sigma$ равен $[8{,}94 \times 10^{-41}; 1{,}56 \times 10^{-40}]$ и содержит внесённое значение. Он рассчитан при фиксированных ℓ, τ_c, передаточных функциях и ковариации; совместная подгонка этих параметров расширит неопределённость.

В контрольном запуске поле выключено, но общая помеха сохранена. Чётная часть даёт $3{,}102 \times 10^{-26}$ (м/с²)/Гц при ожидаемых $3{,}000 \times 10^{-26}$, а нечётная оценка A^2 отклоняется от нуля лишь на 0,157 стандартной ошибки. Один такой запуск проверяет логику данного вмешательства. Частоту ложных решений необходимо определять отдельной серией с новыми шумами и с теми классами общих причин, которые реально присутствуют в установке.

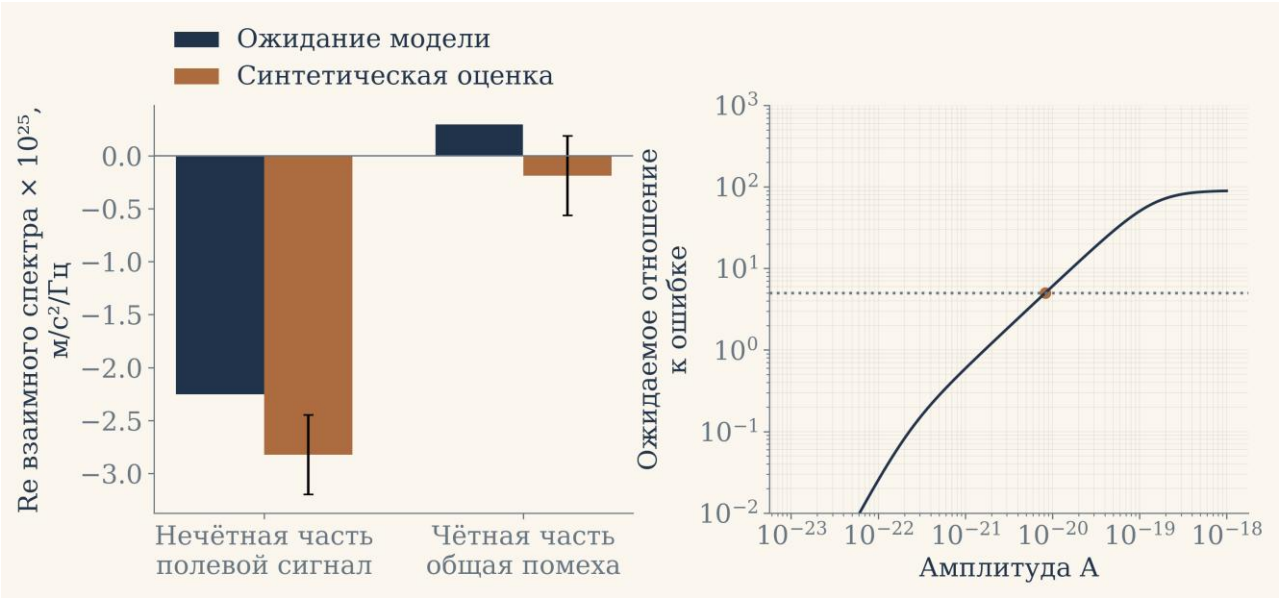


Рисунок 49. Синтетический совместный опыт. Слева ожидаемые и полученные действительные части взаимного спектра; отрезки показывают одну стандартную ошибку при заданной модели. Справа ожидаемое отношение нечётного полевого сигнала к его ошибке при изменении A и неизменных остальных параметрах.

По правой панели рисунка 49 значение отношения ожидаемого сигнала к ошибке, равное пяти, достигается при $A \approx 8{,}28 \times 10^{-21}$. Это условный порог чувствительности к фиксированному шаблону, а не универсальная значимость открытия. При $A = 10^{-20}$ ожидаемое отношение равно 6,03. Если эффективная ширина независимой спектральной ячейки равна 0,001 Гц, простая оценка $T \approx 2M/\Delta f$ даёт около 94,8 суток на обе конфигурации ещё до учёта перерывов. Такой срок сразу предъявляет требования к стабильности помех и калибровки.

Перестановка различает поле и конкретную неизменную электронную связь. Обычное пространственное гравитационное поле изменит знак вместе с гипотетическим. Поэтому опыт устанавливает общий градиентный сигнал и проверяет его статистическую форму; он не определяет автоматически его квантовое происхождение. Для этого нужны внешние сведения об источниках и дополнительные конфигурации.

Как отделить поле от общей причины в аппаратуре

Два прибора на одном столе имеют множество общих причин для корреляции. Их объединяют опора, питание, температура, опорный генератор и программная обработка. Даже независимые измерители могут реагировать на одно обычное гравитационное возмущение: движение массы, изменение давления или перераспределение воды. Поэтому физическая сеть должна включать служебные каналы и управляемые изменения конфигурации. Полезно переставлять часы между точками, менять длину базы при сохранении части электроники, сравнивать разные виды часовых переходов и проводить слепые внесения известного сигнала. Каждое вмешательство выбирается потому, что предполагаемое поле и конкретная помеха дают при нём различные предсказания.

Следует избегать проверки, которая выполняется по определению. Если три относительные частоты вычислены из одних и тех же локальных частот, сумма y_ab + y_bc + y_ca равна нулю алгебраически. Успешное замыкание такого треугольника не подтверждает новую геометрию. Оно может проверять согласованность независимых каналов передачи, если они действительно независимы, но смысл результата тогда приборный. Аналогично высокая корреляция между всеми парами не является самостоятельным свидетельством универсального поля: общая ошибка эталона способна создать матрицу с тем же низким рангом. Геометрический вывод требует реакции на пространственные перестройки, которую нельзя воспроизвести неизменной общей электроникой.

Результат полного физического поиска должен содержать область допустимых A, ℓ и τ_c вместе с параметрами фона. Выполненный пример показывает обработку одного сечения этой задачи при известных ℓ и τ_c. Несколько баз и частотных полос нужны для восстановления остальных параметров; приливной контроль нужен для вывода о кривизне. Если разные каналы требуют несовместимых параметров, отвергается именно выбранное ядро. Если они согласуются, следующим объектом исследования становится источник общего поля. В интерферометрической главе тот же принцип будет применён к завершённому световому пути.

Глава 12
Что способен услышать интерферометр

Свет измеряет завершённый путь

Интерферометр сравнивает фазы световых волн, прошедших разные пути и вновь встретившихся у детектора. Его часто изображают как линейку исключительной точности. Для исследования пространства такое представление полезно только в первом приближении. Показание зависит от движения зеркал, распространения света, фазового эталона и способа считывания. Если теория меняет метрику, все эти элементы могут измениться согласованно. Нельзя сначала объявить, что пространство растянулось на некоторую величину, а затем без расчёта приписать такую же величину выходу прибора. Требуется определить, какие события сравниваются и какая физическая фаза возвращается к месту измерения.

В обычном режиме небольшое изменение разности длин плеч связано с фазовым сдвигом. Для простого прохода туда и обратно коэффициент содержит 4π/λ_laser, где λ_laser - длина волны лазера. Однако эта формула относится к конкретной геометрии и низким частотам механического изменения. При наличии резонаторов свет многократно проходит плечо, а при быстрых возмущениях разные участки пути испытывают разные значения поля. Передаточная функция приобретает частотные нули и фазовые задержки. Увеличение оптической мощности улучшает часть шумового бюджета, но не восстанавливает физический сигнал на частоте, к которой выбранная конфигурация нечувствительна.

$$\delta\varphi \simeq \frac{4\pi}{\lambda_{\mathrm{laser}}}\,\delta L_{\mathrm{diff}} \qquad \text{для простого двухпроходного низкочастотного режима} \qquad (12.1)$$

Поэтому при проектировании геометрического зонда сначала задаётся модель возмущения, затем вычисляется полный отклик, и лишь после этого выбираются длина плеч, частотная полоса и способ регистрации. В некоторых случаях оптимальна широкая полоса, позволяющая различить форму спектра. В других важнее узкая область максимального ожидаемого сигнала. Работа Шармилы, Вермеулена и Датты, опубликованная в томе Nature Communications за 2026 год, систематически связывает несколько классов корреляций предполагаемых флуктуаций с частотными и масштабными признаками выхода интерферометров. Она подтверждает продуктивность такой последовательности, но не сообщает об обнаружении квантовой структуры пространства. [33]

Координаты не должны становиться сигналом

Метрику слабого возмущённого пространства можно записать как сумму фоновой метрики и малого поля h_μν. Однако сами компоненты h зависят от выбора координат. При малом преобразовании координат они изменяются на производные функции преобразования. Если вычисленный сигнал меняется только потому, что исследователь переименовал координаты, такой сигнал не соответствует показанию прибора. В расчёте должны согласованно

преобразовываться траектории света, мировые линии зеркал и события сравнения фаз. Инвариантным результатом служит физически определённая фаза или собственное время, а не произвольно выбранная компонента возмущения. Это требование особенно важно для гипотез, в которых необычное поведение пространства представлено единственной скалярной функцией.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \qquad (12.2)$$

Простой пример показывает, как легко получить ложный прогноз. В длинноволновом приближении стандартный равноплечий интерферометр чувствителен к определённой тензорной комбинации пространственного возмущения. Если единичные направления плеч обозначить u и v, его геометрический тензор равен половине разности u_i u_j и v_i v_j. След этого тензора равен нулю. Следовательно, чистая одинаковая изотропная деформация пространственных длин сокращается в такой дифференциальной комбинации. Это не универсальный запрет на регистрацию любого скалярного поля: другие компоненты метрики, движение зеркал, неодинаковые плечи и конечная длина волны требуют отдельного расчёта. Но автоматическое отождествление скалярного шума с разностью плеч уже оказывается неверным.

$$D^{ij} = \frac{1}{2}\left(u^i u^j - v^i v^j\right), \qquad D^{ij}\delta_{ij} = 0, \qquad h_{ij} \propto \delta_{ij} \;\Rightarrow\; D^{ij} h_{ij} = 0 \qquad (12.3)$$

Для общей линейной модели удобно представить выход каждого датчика как свёртку поля с ядром отклика. Это ядро включает пространственный путь, задержки, поляризационную чувствительность и перевод в выбранные единицы показания. Затем взаимная спектральная плотность датчиков получается применением двух таких ядер к корреляции поля. Схематическая запись ниже подчёркивает структуру расчёта; она не подменяет конкретное выражение для выбранной теории. До появления этого выражения нельзя заявлять, что прибор достиг чувствительности к амплитуде h, поскольку даже связь между h и измеряемым напряжением ещё может оставаться неопределённой.

$$s_A(f) = \int d^3k \; R_A^{\mu\nu}(\mathbf{k}, f) h_{\mu\nu}(\mathbf{k}, f) + n_A(f) \qquad (12.4)$$

Полный контрольный пример с поперечной волной

Для законченного расчёта выбрана известная физическая модель: слабая плоская поперечная бесследная гравитационная волна в линейном приближении. Она даёт строгий эталон перевода метрического возмущения в фазу. Любая новая гипотеза, сводящаяся в данной полосе к такому же тензорному сектору, использует полученную функцию отклика; гипотезе с другой структурой поля понадобится собственный расчёт. Сам контрольный пример не объявляется новым механизмом квантовой геометрии.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \left[\delta_{ij} + e_{ij} h\left(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{c}\right)\right] dx^i dx^j, \qquad (12.5)$$

Вектор n задаёт направление распространения, e_ij - выбранный тензор поляризации, h - безразмерную малую амплитуду. Простой равноплечий интерферометр имеет плечи длиной L

вдоль единичных векторов u и v. Делитель расположен в начале координат, дальние зеркала - в точках Lu и Lv. В поперечной бесследной системе свободно падающие зеркала с нулевой начальной координатной скоростью сохраняют эти координаты в первом порядке. Время на делителе совпадает с его собственным временем.

Последнее условие завершает модель движения концов. Добавлять к фиксированным здесь зеркалам ещё одно вручную назначенное «растяжение» означало бы дважды учесть один эффект. Если зеркала жёстко удерживаются или входят в область механических резонансов подвеса, их мировые линии изменятся и в ответ надо включить измеренную механическую функцию. Далее рассматривается свободная масса в рабочей полосе выше существенных механических резонансов и оптическая схема без полостей Фабри-Перо.

Пусть t - время возвращения света на делитель, T = L/c и μ = n·u. Из условия $ds^2 = 0$ следует, что малое добавочное время пути равно половине интеграла h_ij u_i u_j вдоль невозмущённого луча, делённой на c. Для пути туда и обратно значения аргумента поля различаются:

$$I_-(t) = \int_0^L h\left(t - 2T + \frac{(1-\mu)l}{c}\right) dl, \qquad (12.6)$$

$$I_+(t) = \int_0^L h\left(t - T(1+\mu) + \frac{(1+\mu)l}{c}\right) dl, \qquad (12.7)$$

$$\delta T_u(t) = \frac{u^i e_{ij} u^j}{2c}\left[I_-(t) + I_+(t)\right] \qquad (12.8)$$

В первом интеграле фотон движется от делителя, а во втором - от дальнего зеркала. Поправку к самой траектории внутри уже малого h в этом порядке учитывать не требуется: она даёт следующий порядок. Два луча сравниваются после возвращения к одному событию на делителе, поэтому результат относится к завершённому измерению. Точный отклик через время полного светового пути и его отличие от длинноволнового приближения подробно обсуждаются в первичной работе Рахманова, Романо и Уилана. [44]

Замкнутый световой путь простого интерферометра и три события одного прохода туда и обратно показаны на рисунке 50.

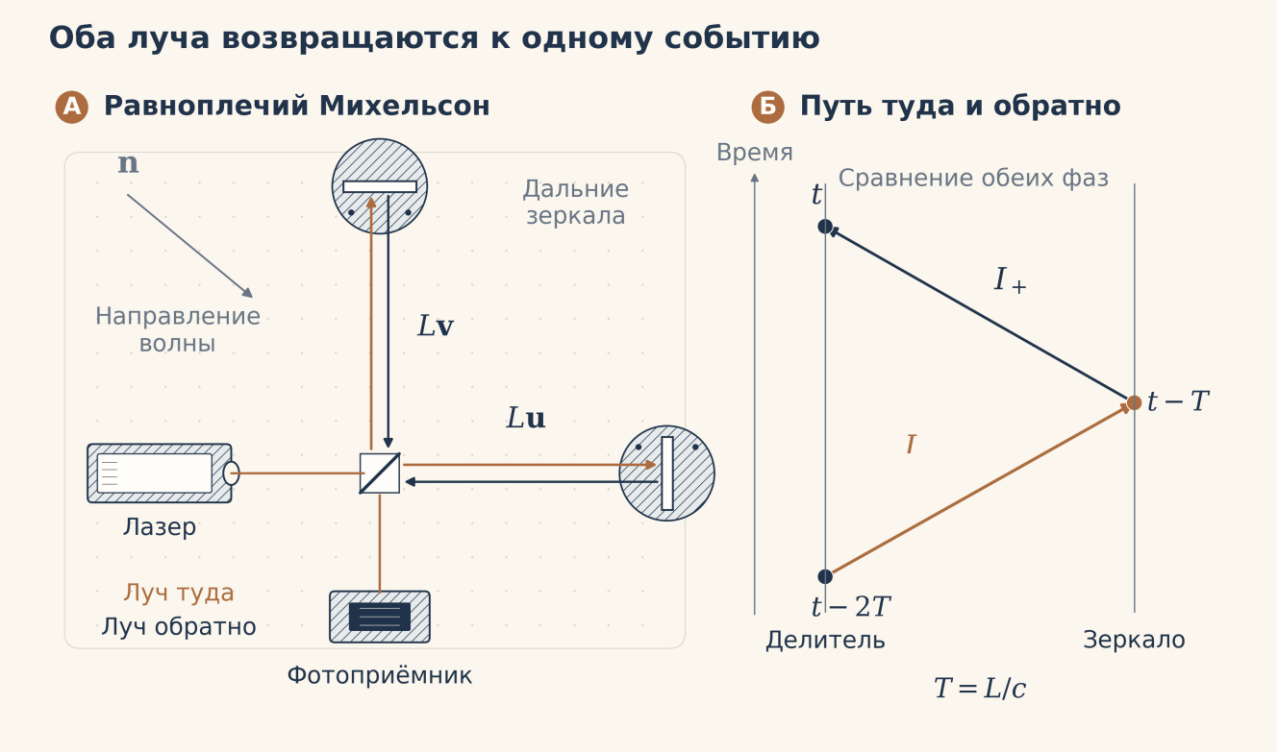


Рисунок 50. В простом равноплечем Михельсоне каждый луч проходит расстояние L к дальнему зеркалу и L обратно. Медный и синий участки разделяют прямой и обратный ход; на чертеже они слегка разнесены для читаемости. Правый рисунок фиксирует отправление, отражение и возвращение к общему событию сравнения фаз. Условия движения зеркал соответствуют свободным массам в выбранной TT-модели. Полости Фабри-Перо отсутствуют. Для наклонной волны разные аргументы поля вдоль I_- и I_+ сохраняются в интегралах, а не заменяются одним временем.

Частота и направление входят в измеренный отклик

Подставим h(t) = h_ω exp(−iωt). Каждый интеграл (12.6) и (12.7) является интегралом экспоненты по конечному отрезку. Введём Ω = ωL/c и sinc(z) = sin(z)/z с непрерывным значением sinc(0) = 1. Тогда

$$\delta T_u = T\left(u^i e_{ij} u^j\right) \mathcal{T}(\Omega, \mu) h_\omega e^{-i\omega t}, \qquad \mathcal{T} = \frac{t_- + t_+}{2}, \tag{12.9}$$

$$t_- = e^{i\Omega(3+\mu)/2} \operatorname{sinc} \frac{\Omega(1-\mu)}{2}, \qquad t_+ = e^{i\Omega(1+\mu)/2} \operatorname{sinc} \frac{\Omega(1+\mu)}{2} \tag{12.10}$$

Положительные фазовые множители отражают то, что поле по пути наблюдалось раньше возвращения света; знак соответствует принятому exp(−iωt). При Ω → 0 оба множителя стремятся к единице. Определим положительный фазовый лаг как ω_laser(δT_u − δT_v). Разность плеч даёт

$$\widehat{\delta\varphi} = \frac{4\pi L}{\lambda_{\text{laser}}} \mathcal{F}(\omega, \mathbf{n}, e) h_\omega, \tag{12.11}$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\left[\left(u^i e_{ij} u^j\right)\mathcal{T}(\Omega, \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}) - \left(v^i e_{ij} v^j\right)\mathcal{T}(\Omega, \mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\right] \qquad (12.12)$$

Здесь учтены световой путь, тензорная чувствительность и выбранное движение зеркал. Функция F безразмерна. При нормальном падении на плоскость ортогональных плеч и поляризации e_xx = 1, e_yy = −1 она сокращается до особенно простой формы:

$$\mathcal{F}_\perp = e^{i\Omega}\mathrm{sinc}(\Omega), \qquad f_{\mathrm{null},1} = \frac{c}{2L} \qquad (12.13)$$

Первый нуль возникает, когда разные участки полного светового пути компенсируют друг друга. Для L = 40 м это 3,7474 МГц. На этой частоте выбранная нормальная плоская волна не создаёт дифференциальной фазы первого порядка, хотя само поле ненулевое. Наклон изменяет фазу вдоль плеч, поэтому нули и амплитуды других направлений оказываются иными. В программе нормальный предел сверяется с общей формулой; на расчётной сетке расхождение не превышает $4{,}1 \times 10^{-16}$ по безразмерной амплитуде.

Механизм первого нуля функции передачи можно увидеть как компенсацию вкладов полного пути на рисунке 51.

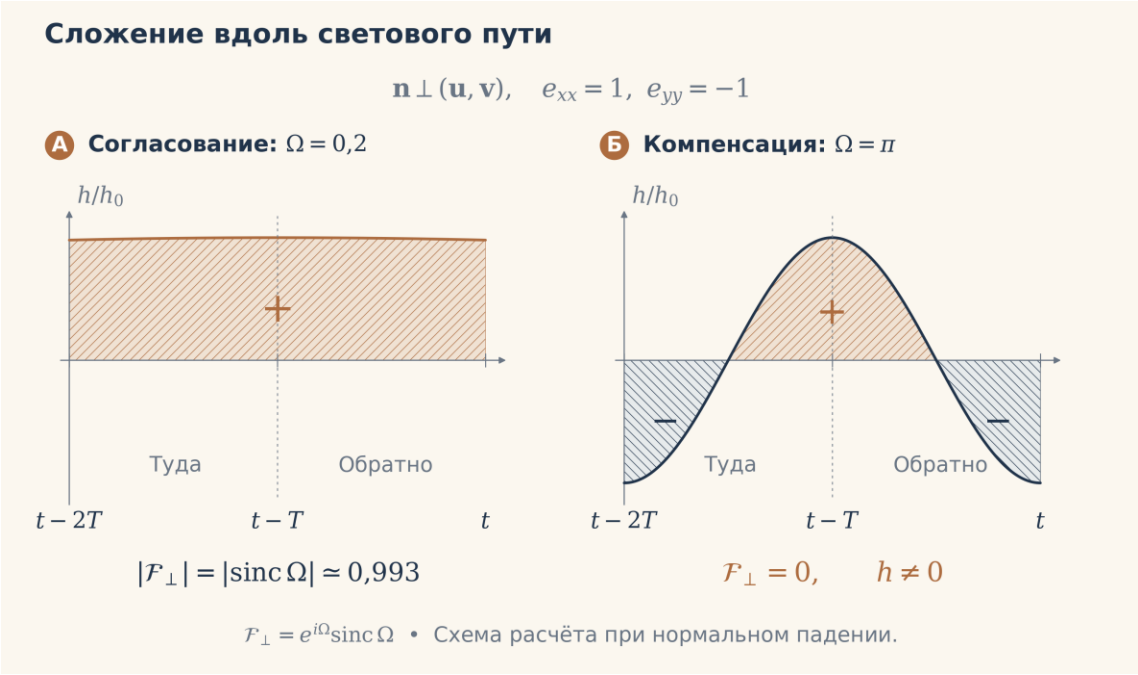


Рисунок 51. Показана реальная квадратура гармонической TT-волны при нормальном падении и поляризации e_xx = 1, e_yy = −1. Фазовый ноль выбран в середине полного пути: интегранд пропорционален cos[Ω(t′ − t + T)/T]. При Ω = 0,2 вклады почти согласованы; при Ω = π положительные и отрицательные площади взаимно уничтожаются. Нечётная квадратура также интегрируется в нуль. Поэтому F⊥ = 0 при ненулевом поле. Это схема точного расчёта, не запись детектора; для других направлений нули изменяются.

Если амплитуда h является стационарным случайным процессом одного заданного направления и поляризации, его спектр переводится в S_φ умножением на |4πLF/λ_laser|². Для распределения направлений и поляризаций потребуется соответствующий интеграл, а для пары установок - также пространственная фаза между ними. Таким образом, рассчитанный

ответ относится к точно названному сектору модели; он не служит универсальным преобразователем любой скалярной или «голографической» флуктуации в шум длины.

Условный численный бюджет простого интерферометра

Возьмём L = 40 м, длину волны лазера 1064 нм, оптическую мощность на входе считывающих фотоприёмников 10 мВт и квантовую эффективность η = 0,8. Для идеализированного сбалансированного считывания в квадратуре зададим одностороннюю фазовую плотность пуассоновского шума S_φ,shot = 2/Ṅ, где Ṅ = ηP/(hν) - эффективный поток зарегистрированных фотонов. Мощность здесь относится к считыванию, а не автоматически к мощности в длинных плечах или внутри резонатора.

$$\dot{N} = \frac{\eta P \lambda_{\mathrm{laser}}}{hc}, \qquad \sqrt{S_{\varphi,\mathrm{shot}}} = \sqrt{\frac{2}{\dot{N}}} \qquad (12.14)$$

Дополнительно назначим независимые технический и электронный фазовые шумы 10^{-8} и 3×10^{-9} рад/√Гц. Это условные постоянные уровни в рассматриваемой полосе. Квадратичное сложение даёт общий фазовый шум. В реальном приборе шумы могут быть окрашенными и коррелированными, а их измеренные передаточные функции заменят эти простые числа.

Квадратный корень из спектральной плотности мощности называют амплитудной спектральной плотностью (ASD). Для фазового шума её единица — радиан на квадратный корень из герца. В таблице ниже все шумовые составляющие приведены к одной такой величине.

Компонент	Принятое или рассчитанное значение
Эффективный поток фотонов	$4{,}2850 \times 10^{16}$ с$^{-1}$
Пуассоновский фазовый ASD	$6{,}8318 \times 10^{-9}$ рад/√Гц
Технический фазовый ASD	$1{,}0000 \times 10^{-8}$ рад/√Гц
Электронный фазовый ASD	$3{,}0000 \times 10^{-9}$ рад/√Гц
Суммарный фазовый ASD	$1{,}2477 \times 10^{-8}$ рад/√Гц
Фазовый коэффициент при F = 1	$4{,}7242 \times 10^{8}$ рад на единицу h

$$\sqrt{S_h^{\mathrm{equiv}}(f)} = \frac{\sqrt{S_{\varphi,\mathrm{total}}(f)}}{\left|4\pi L \mathcal{F}(f)/\lambda_{\mathrm{laser}}\right|} \qquad (12.15)$$

В низкочастотном пределе нормального падения эквивалентный шум деформации равен $2{,}6411 \times 10^{-17}$/√Гц. На 1 МГц он равен $2{,}9778 \times 10^{-17}$/√Гц, на 3 МГц - $1{,}1328 \times 10^{-16}$/√Гц, а на 10 МГц - $2{,}5653 \times 10^{-16}$/√Гц. Это не зарегистрированный результат установки. Различие чисел возникает при неизменном фазовом шуме только из-за вычисленной зависимости отклика от частоты.

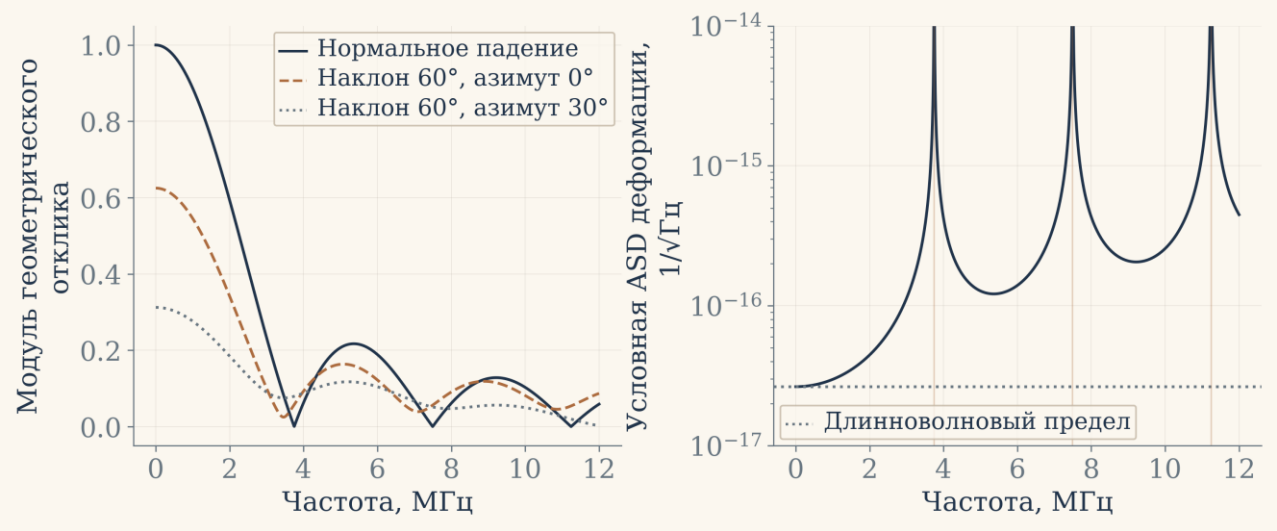


Рисунок 52. Отклик простого 40-метрового интерферометра на выбранную TT-поляризацию. Слева нормальное и два наклонных направления; справа эквивалентный шум деформации для нормального падения при заданном фазовом бюджете. Вертикали отмечают геометрические нули. Вблизи нулей перевод фазы в h становится неустойчивым.

Рисунок 52 показывает, почему оптимизация должна учитывать форму гипотезы. Увеличение мощности снижает пуассоновский вклад, но не убирает геометрический нуль. Изменение длины или направления добавляет информацию, которой в нечувствительном режиме нет. Для условного стохастического TT-поля таблица позволяет задать спектр в полосе и вычислить ожидаемые данные; для нового механизма флуктуаций сначала нужно проверить, действительно ли его поле принадлежит этому сектору.

Простой бюджет не включает полости, давление излучения, сжатый свет и технические потери сложного оптического тракта. Их следует добавлять при выборе соответствующей реализации, сохраняя вычисленный смысл фазы. Здесь задача завершена на выбранном уровне: поле, световой путь, свободные концы, функция отклика и все числа назначенного шумового примера связаны одной цепочкой.

Корреляция должна быть математически допустимой

Сеть интерферометров полезна тем, что гипотетическое поле может создавать согласованные сигналы, тогда как часть собственных шумов приборов независима. Но произвольная таблица желаемых корреляций не обязательно описывает возможный случайный процесс. На каждой частоте спектральная матрица должна быть эрмитовой и неотрицательно определённой. Для пары каналов отсюда следует знакомое ограничение: квадрат модуля взаимного спектра не превышает произведения собственных спектров. Если модель нарушает это условие, никакое увеличение времени измерения не сделает её физически осмысленной. Проверка положительности должна выполняться для всей матрицы сети, поскольку допустимость отдельных пар ещё не гарантирует допустимость общей совокупности.

$$\mathbf{S}(f) = \mathbf{S}^{\dagger}(f), \qquad \mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{S}(f)\mathbf{z} \geq 0, \qquad |S_{AB}(f)|^2 \leq S_{AA}(f)S_{BB}(f) \tag{12.16}$$

Для проверки алгоритмов можно использовать заведомо допустимый шаблон выходных корреляций. Пусть $S_0(f)$ - неотрицательная спектральная плотность некоторого скалярного процесса, а пространственное ядро равно экспоненте минус квадрат расстояния. Умножение ядра на комплексные коэффициенты отклика R_i и их сопряжения сохраняет положительность. Такой шаблон удобен для слепых цифровых внесений, оценки разделения независимого и общего шума и планирования баз. Он описывает возможную статистику сигналов, но ещё не доказывает, что эти сигналы способны породить физически согласованные флуктуации метрики. Переход от шаблона к гравитационной интерпретации требует предыдущего расчёта световых путей.

$$S_{ij}^{\mathrm{template}}(f) = R_i(f) R_j^*(f) S_0(f) \exp\left(-\frac{d_{ij}^2}{2\ell_c^2}\right), \qquad S_0(f) \geq 0 \qquad (12.17)$$

По той же причине нельзя назначить дополнительный произвольный коэффициент для каждого угла и расстояния, а затем назвать удачную подгонку открытием геометрии. Поворот прибора должен изменять его отклик согласно общей модели поля. Разнесение приборов должно менять корреляцию согласованно с той же пространственной структурой. Если поворот одновременно меняет проводку, натяжение волокна и условия охлаждения, наблюдаемая разница не является чистой геометрической проверкой. Конструкция серии опытов должна обеспечивать несколько разных вмешательств: одни преимущественно меняют предполагаемый физический отклик, другие - конкретные пути приборной связи. Лишь сравнение таких серий позволяет различать причины общего сигнала.

Что показал Holometer

Fermilab Holometer был специально создан для регистрации быстрых коррелированных изменений дифференциального положения. В описании установки 2017 года приведены два расположенных рядом независимых интерферометра с плечами около 40 метров и корреляционным считыванием до десятков мегагерц. В работе 2021 года использовалась конфигурация с изгибом одного плеча каждого 39-метрового интерферометра для чувствительности к определённым вращательным возмущениям. Полученные данные ограничили конкретную модель пространственно согласованных вращательных флуктуаций. Эти эксперименты показывают, что необычная гипотеза может быть превращена в проверяемый спектральный прогноз. Они не означают, что любые возможные квантовые свойства пространства исключены. [31] [32]

Особенно осторожно следует читать сравнение спектральной плотности деформации с планковским временем. Деформация безразмерна, поэтому её спектральная плотность имеет размерность времени; сравнение единиц здесь корректно. Но чувствительность спектральной плотности не равна мгновенной ошибке измерения расстояния, выраженной в метрах. Для перехода к дисперсии нужно интегрировать спектр в указанной полосе и учесть пространственный отклик. Для перехода к параметрам квантовой модели нужны дополнительные предположения о нормировке и корреляциях. Фраза о планковской

чувствительности без этих уточнений легко создаёт ошибочное представление, будто аппарат напрямую различает отдельные отрезки планковской длины.

Практический урок состоит также в ограниченности каждого отрицательного результата. Конфигурация, чувствительная к одной симметрии возмущения, может почти не реагировать на другую. Если теория меняет свою форму после каждого исключения, необходимо открыто фиксировать, какой прежний вариант отвергнут и какое новое предположение добавлено. Для будущей программы полезнее заранее составить набор действительно разных моделей и вычислить отклик каждой на несколько конфигураций. Тогда новый эксперимент уменьшает пространство объяснений определённым образом. Без такого учёта даже высокая точность рискует остаться числом, которое трудно перевести в знание об устройстве пространства.

QUEST и GQuEST как разные измерительные стратегии

В первой опубликованной серии QUEST два настольных интерферометра использовались для поиска коррелированных флуктуаций длины. Патра и соавторы сообщили ограничения в области от 13 до 80 мегагерц; накопление длилось 10^4 секунд, а приведённая чувствительность по деформации на 40 мегагерцах составила 3×10^{-20} на квадратный корень из герца. В той же работе указана проектная чувствительность отдельного интерферометра 2×10^{-19} метра на квадратный корень из герца в более широкой полосе. Это разные величины с разными единицами и статусом: проект, измеренный результат и результат корреляционного усреднения нельзя подменять друг другом. [34]

Отдельное направление развития QUEST связано со сжатым светом. Бергамин и соавторы в работе 2025 года исследовали источник, предназначенный для такого применения, и зарегистрировали до 6,8 децибела сжатия; не менее 3 децибел сохранялось на исследованной полосе 100 мегагерц. Эти значения характеризуют конкретный оптический источник и процедуру измерения. После включения в большой прибор часть преимущества может теряться из-за оптических потерь, фазового шума и несовпадения мод. Поэтому характеристику источника нельзя автоматически записать в паспорт готового интерферометра. Это пример поэтапного подтверждения: сначала компонент, затем подсистема, затем полный научный канал. [35]

GQuEST использует другую идею считывания: выделение и подсчёт фотонов, связанных с предполагаемым возмущением, вместо обычной регистрации малой фазы на фоне сильного оптического поля. В статье Вермеулена и соавторов 2025 года представлен реализуемый проект и оценено его преимущество для выбранных моделей геонтропных флуктуаций. Это исследование проекта и ожидаемой информации, не сообщение о регистрации квантовой гравитации. Метод требует своей оценки фоновых фотонов, эффективности детектирования, фильтрации и потерь. Утверждение о преодолении ограничения определённого способа интерферометрического считывания не означает отмены всех квантовых и технических ограничений измерения. [36]

Эти направления показывают, почему нельзя выбирать прибор по одному рекордному числу. Корреляционная схема, сжатый свет и счёт фотонов решают разные задачи и имеют разные слабые места. Для собственной гипотезы следует рассчитать ожидаемую статистику

выходных данных и сравнить методы при одинаковом физическом сигнале, времени и реалистичных потерях. Если один подход даёт более узкую полосу, его выигрыш в амплитуде может сопровождаться потерей информации о форме корреляции. Если другой сохраняет широкий спектр, именно форма сигнала способна помочь отличить гипотезу от фона. Критерием становится способность различать объяснения, а не отдельная цифра чувствительности.

Различие трёх операций над измерительным сигналом показано на рисунке 53.

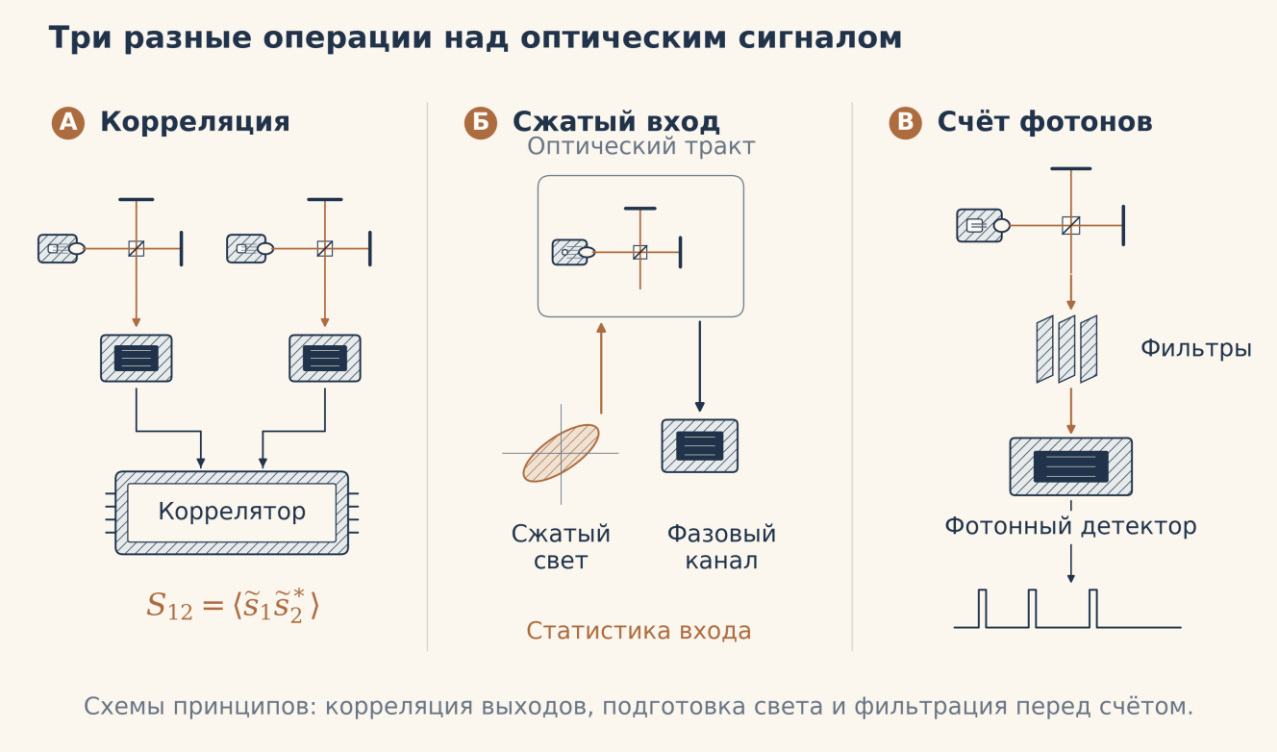


Рисунок 53. Слева два независимых интерферометрических выхода поступают в оценку взаимного спектра. В центре подготовленный сжатый свет меняет квантовую статистику отдельного оптического входа; условные стрелки обозначают операции, а не полную карту портов. Справа оптическая фильтрация предшествует регистрации отдельных фотонов. Показаны принципы трёх стратегий, а не точные монтажные схемы Holometer, QUEST или GQuEST. Выигрыш каждого подхода требует собственной оценки потерь, полосы, фона и статистики выходных данных.

Почему усреднение не заменяет контроль

При независимом шуме средний взаимный спектр двух каналов стремится к нулю, а случайная ошибка его оценки уменьшается с числом независимых выборок. В приближении слабого сигнала и гауссовых независимых шумов дисперсия действительной части оценки имеет порядок произведения собственных спектров, делённого на удвоенное число усреднений. Отсюда возникает важное различие: порог спектральной мощности улучшается примерно как обратный квадратный корень из времени, а порог амплитудной спектральной плотности стохастического сигнала - как величина, обратная корню четвёртой степени из времени. Это не закон для всех методов измерения, а следствие указанной корреляционной

процедуры. Методы оптимальной корреляции и роль общего шума подробно развиты в работе Аллена и Романо. [37]

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{Re}\hat{S}_{12}\right] \simeq \frac{S_{11}S_{22}}{2M}, \qquad M \sim T\,\Delta f \quad \text{при независимых эффективных усреднениях} \tag{12.18}$$

Общая помеха не исчезает при таком накоплении. Наоборот, её оценка становится всё точнее, и статистическая уверенность в наличии корреляции растёт. Поэтому каждому обещанию улучшить чувствительность временем должен сопутствовать вопрос о пределе систематической ошибки. Полезны независимые опорные генераторы, перестановка каналов, контроль электрической наводки, измерение с перекрытым оптическим путём и намеренное воздействие на предполагаемые источники шума. Однако ни один контроль не универсален: перекрытие света меняет режим детектора, а перестановка электроники может оставить общую механическую связь. Убедительность возникает из согласованного набора проверок, выбранных под конкретные альтернативные объяснения.

Для научного результата требуется карта зависимости выходных данных от частоты, длины и конфигурации. Выполненный ТТ-пример показывает, как получить такую карту из физического поля и как обнаружить слепые режимы установки ещё до сборки. Корреляционные поиски проверяют более широкие статистические модели, но используют ту же последовательность: вычисленный отклик, измеренный шум и заранее выбранные различия между объяснениями. Следующая глава переводит этот подход в инженерные досье и в полный практикум на доступной RC-сети.

Глава 13
Три прибора и путь от сигнала к выводу

Измеряемая величина задаёт проект

Геометрическую гипотезу приходится переводить на язык выходных сигналов: напряжения, угла, отношения частот. У каждого такого перевода есть собственная цена в точности. Ошибка подготовки начального состояния в электрической сети способна выглядеть как иное распространение. Небольшое перемещение источника массы меняет рассчитанную силу. Общий генератор может связать показания часов, которые считались независимыми. Поэтому проект прибора начинается с определения того, какие данные он выдаёт и какая часть вывода опирается на отдельно измеренные параметры.

В этой главе рассматриваются три уровня исследования. Электрическая сеть позволяет испытывать восстановление связности в системе, устройство которой можно преднамеренно менять. Механический датчик проверяет закон взаимодействия материальных тел. Сеть часов и гравиметров сравнивает потенциальный и градиентный каналы в общей полосе. Их объединяет процедура: задать модель, рассчитать показания, получить калибровку и проверить конкурирующее объяснение. Переход к следующему уровню требует собственных данных.

Проект	Непосредственные данные	Проверяемый результат
RC-сеть	Напряжения узлов после известной подготовки	Различимость дополнительных и обычных связей в искусственной системе
Механический датчик	Угол или смещение и фаза гармонического отклика	Ограничение выбранного закона силы при известной геометрии
Часы и гравиметр	Отношения частот и ускорение в общей полосе	Совместимость двух каналов с заданным общим полем

Электрический уровень ниже доведён до исполнимого практикума: приложены исходные записи и программа их обработки. Все эти записи синтетические. Для двух других направлений приведены расчётные бюджеты и условия переноса к реальной установке. Это позволяет отделить уже выполненный численный опыт от аппаратных характеристик, которые ещё предстоит измерить.

Электрический спектрометр связности

Узел электрического макета состоит из конденсатора относительно общего провода. Между узлами стоят резисторы. Напряжения выравниваются со скоростями, определяемыми проводимостями связей и ёмкостями узлов. После отключения внешних источников цепь реализует линейное распространение, удобное для проверки обратной задачи. Сетевой

подход имеет предшественников: Ноккала, Пиило и Бьянкони исследовали определение спектральной размерности через низкочастотные моды сети квантовых осцилляторов. RC-макет использует классическую динамику и решает собственную измерительную задачу. [38]

$$C_i \frac{dV_i}{dt} = \sum_j g_{ij}\left(V_j - V_i\right) - g_{i0} V_i + I_i(t), \qquad \mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{K}\mathbf{V} + \mathbf{I} \tag{13.1}$$

Проводимость g имеет единицы сименса, ёмкость C - фарада, а отношение g/C - обратной секунды. При равных ёмкостях C_0 и отсутствии утечки оператор $L=K/C_0$ симметричен. Подготовка напряжения только в узле j и последующее наблюдение узла i дают элемент матричной экспоненты. Полный набор подготовок раскрывает матрицу распространения; несколько доступных портов дают лишь её наблюдаемый блок.

$$\mathbf{V}(t) = e^{-t\mathbf{L}}\mathbf{V}(0), \qquad \mathbf{G}(s) = (s\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{-t\mathbf{L}}\, dt \tag{13.2}$$

Простейший законченный пример состоит из четырёх узлов, соединённых в цепь. У каждого стоит конденсатор 100 нФ, между соседями - резистор 100 кОм. Номинальное время одного звена равно 10 мс, интенсивность связи - 100 $с^{-1}$. Для контрольного опыта между концами цепи устанавливается дополнительный резистор 500 кОм, то есть связь интенсивностью 20 $с^{-1}$. Эти значения определяют расчётный макет; точность готовых компонентов и измерителей из них не следует.

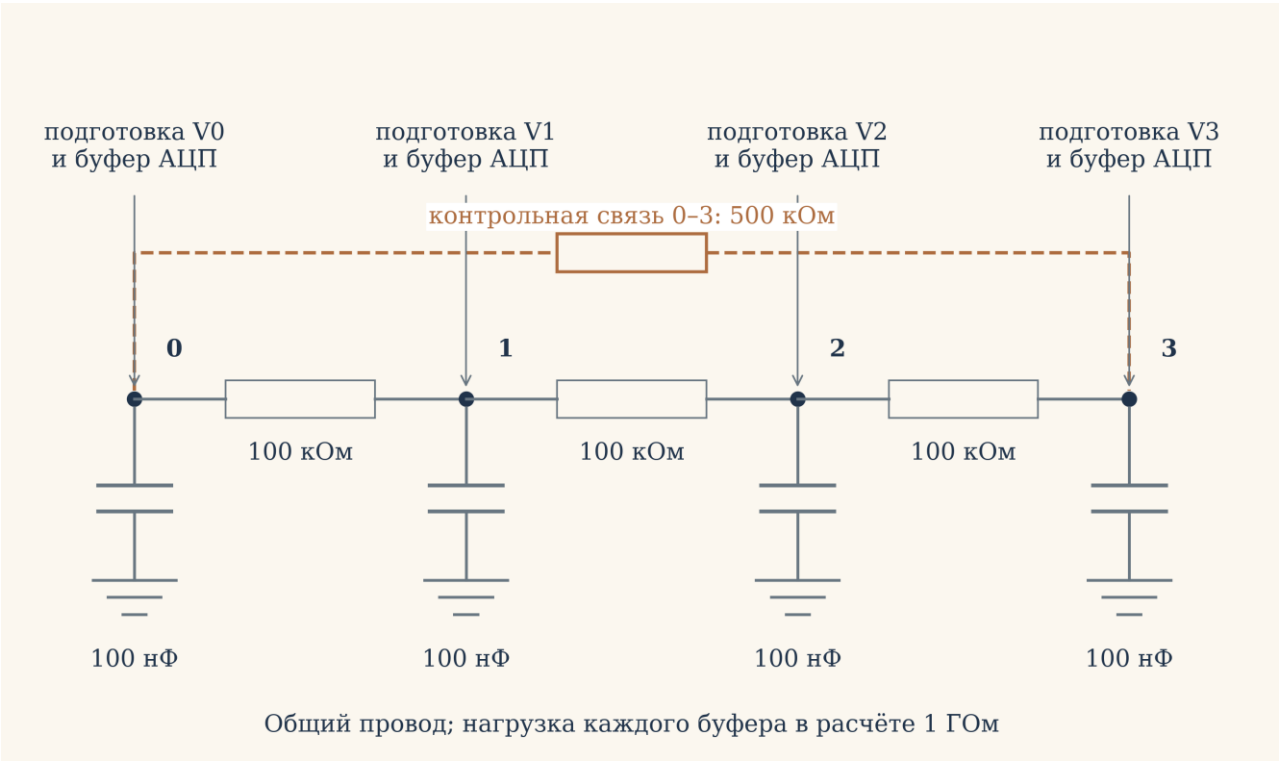


Рисунок 54. Четырёхузловой RC-макет. Обычные связи имеют номинал 100 кОм, каждый узел - 100 нФ относительно общего провода. Оранжевым показана дополнительная связь 0-3 через 500 кОм. Стрелки обозначают каналы подготовки и высокоомного считывания; пересечения без узловых точек не образуют электрических соединений. В численном примере нагрузка каждого входа равна 1 ГОм.

На рисунке 54 видна причина выбора малого макета: известны все узлы, можно подготовить четыре независимых состояния и измерить весь отклик. В большой сети из главы 8 такой доступ отсутствует. Малый опыт сначала проверяет нормировку и статистику измерений; после этого число портов можно уменьшать и наблюдать, какие различия перестают быть доступными.

Связь с токовым методом также однозначна. При нулевом начальном состоянии передаточная матрица от тока к напряжению равна $H V I(s)=(sC+K)^{-1}$. Для одинаковых ёмкостей $G(s)=C_0 H V I(s)$. Первая матрица измеряется в омах, вторая - в секундах. Поэтому численный шум в G нельзя напрямую объявлять требованием к точности вольтметра. Нужно учесть возбуждение, ёмкость, время записи и способ оценки интеграла.

Сквозной опыт с закрытой разметкой

Практикум «От напряжения к восстановлению связи» использует четыре начальные подготовки около 1 В. Подготовки слегка смешаны: небольшое напряжение присутствует и в соседних узлах. Их фактическая матрица заранее включена в калибровку. Считывание имеет известную одинаковую утечку, соответствующую входному сопротивлению 1 ГОм. В каждый отсчёт добавлен независимый гауссов шум со стандартным отклонением 0,2 мВ. Такой шум описывает принятый цифровой пример, а не обещанную характеристику конкретного аналого-цифрового преобразователя (АЦП).

Для каждой подготовки получена запись длительностью 0,25 с с шагом 50 мкс. Обработка восстанавливает нормированный отклик при $s=20$, 60 и 200 $с^{-1}$, учитывая смешение начальных состояний, нагрузку и общий конечный интервал. Поскольку три интеграла вычислены из одних записей, их ошибки коррелированы. Например, корреляция для первых двух значений s равна 0,866. В подгонку передаётся полная ковариация, а не три независимые оценки.

До анализа выбран один контраст между концами цепи. Он даёт скалярное показание $z=a^{T}G(20)a$, где $a=(1,0,0,-1)/\sqrt{2}$. Для любой комбинации обычных проводимостей в пределах ±2% известна строгая оболочка его возможных значений. В данном макете она простирается от 11,10052 до 11,43981 мс. К ней добавляется вычисленный запас на шум, конечный хвост и численное интегрирование. Правило не требует перебирать все возможные рисунки дрейфа.

Запись	Контраст при s=20, мс	Результат правила	Разметка после анализа
A	7,75782	Ограниченная локальная модель отвергнута	Дрейф и связь 0-3
B	11,26718	Допустимая локальная модель совместима	Эталонная цепь
C	11,23150	Допустимая локальная модель совместима	Дрейф обычных связей

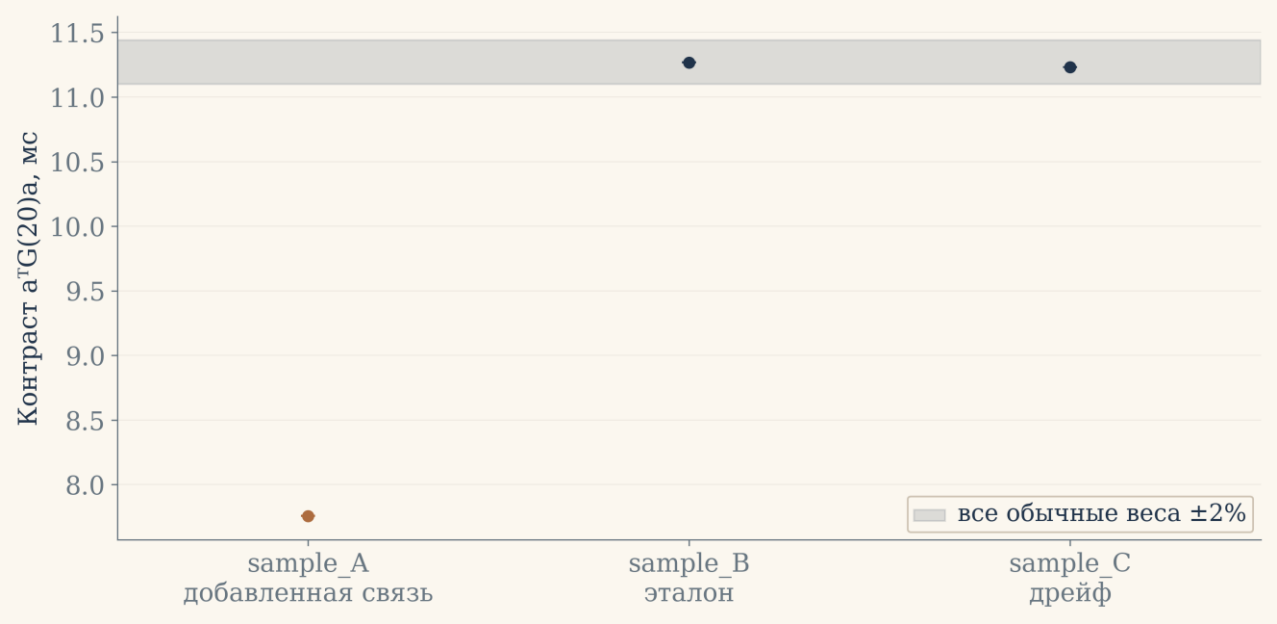


Рисунок 55. Синтетическая проверка трёх записей. Полоса содержит возможные контрасты всех обычных проводимостей в пределах ±2%. Планки включают пять стандартных ошибок, границу хвоста и квадратуры; при данном масштабе они малы. Разметка под буквами раскрыта после выполнения анализа. Программа анализа не читает файл, содержащий истинные параметры.

На рисунке 55 дополнительная связь выбрана достаточно сильной, чтобы её эффект уверенно вышел за допустимый калибровочный интервал. Подгонка расширенной модели определила пару 0-3 и интенсивность 19,9974 c^{-1} при внесённых 20 c^{-1}. Отношение χ^2 к 48 скалярным наблюдениям равно 0,871. В двух других случаях дополнительное ребро для объяснения данных не требуется. Это не равнозначно доказательству отсутствия любой сколь угодно слабой связи.

Различимость здесь существенно лучше, чем в трудном примере большой сети. Все четыре узла наблюдаемы, начальные состояния известны, а добавленная проводимость составляет 20% обычной. Практикум показывает работу всей измерительной цепочки в выбранном режиме. Он не измеряет универсальную точность восстановления и не отменяет калибровочный контрпример главы 8. Следующий шаг - намеренно сократить доступ к узлам или ослабить связь и проследить границу применимости того же правила.

Компоненты и измеритель входят в оператор

В собранной цепи равенство ёмкостей придётся проверить. Для неодинаковых C_i матрица $C^{-1}K$ обычно несимметрична в координатах напряжения. Симметричный оператор появляется после замены $u=C^{1/2}V$. Скалярные произведения и нормировки зондов должны соответствовать этой замене. Полный след при преобразовании подобия сохраняется: нормированные диагональные напряженческие отклики по-прежнему дают след экспоненты, но оператор и проектор стационарной моды нужно вычислять с фактическими ёмкостями. Если продолжать подгонять модель равных ёмкостей, различия компонентов будут ошибочно отнесены к связям.

$$\mathbf{L}_{\mathrm{sym}} = \mathbf{C}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{C}^{-1/2}, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{C}^{1/2}\mathbf{V} \qquad (13.3)$$

Входное сопротивление и собственные утечки конденсаторов добавляют связи на общий провод. Для одинаковой утечки L превращается в L+γI. Тогда возвратный сигнал получает множитель exp(−γt), а оценка спектральной размерности увеличивается на 2γt. В расчётном макете γ=0,01 с⁻¹ известна заранее и удаляется при обработке. Неодинаковую неизвестную утечку такой скалярной поправкой исправить нельзя: она должна войти в матрицу измерительного оператора.

$$\widetilde{P}(t) = e^{-\gamma t}P(t), \qquad \tilde{d}_s(t) = d_s(t) + 2\gamma t \qquad (13.4)$$

Подготовка тоже требует калибровки. Низкоомные источники удерживают четыре заданных напряжения, после чего размыкаются одновременно. Сопротивление ключей, неодинаковое время размыкания и выброс заряда меняют начальный вектор. В практикуме вместо идеального единичного вектора используется измерительная матрица подготовок W. Если она обратима и хорошо обусловлена, распространение восстанавливается умножением зарегистрированных напряжений на W⁻¹. Здесь число обусловленности равно 1,0049, поэтому операция почти не усиливает шум. При почти одинаковых подготовках обращение стало бы ненадёжным.

На рисунке 56 физическая сеть включена в полный тракт подготовки и высокоомной цифровой регистрации.

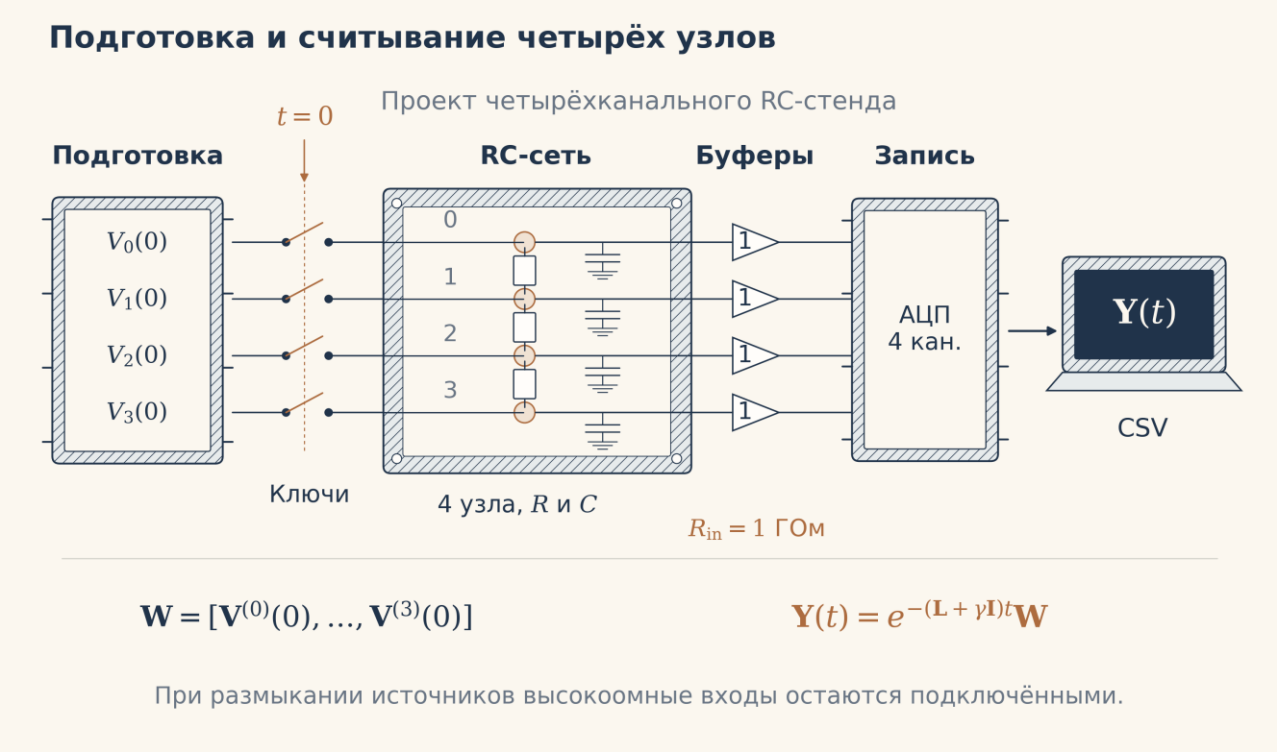


Рисунок 56. Четыре источника удерживают полный начальный вектор, затем четыре ключа размыкаются одним событием. Наблюдение продолжается через отдельные высокоомные буферы и АЦП. Значение R_in = 1 ГОм относится к входной нагрузке расчётного примера; оно не означает отсутствия утечки. Матрица W содержит фактически подготовленные состояния, а Y(t) - зарегистрированные напряжения. Плата показана как современный проект стенда; точная топология и конденсаторы раскрыты отдельно в принципиальной схеме. Подключение низкоомного входа непосредственно к узлам изменило бы оператор.

Тепловой шум резисторов связан с диссипацией. Для отдельного сопротивления в классическом режиме односторонняя плотность напряжения равна 4kBTR. В сети собственные токовые шумы проходят через общий оператор и создают корреляции между узлами. Измерения NIST по шумовой термометрии показывают, насколько существенны сопоставление частотных характеристик, перекрёстные помехи и отделение шума считывания. [46] [47]

Бюджет макета должен отдельно учитывать неопределённость W, ёмкостей, утечки, усиления и временной шкалы. Случайную часть можно переносить через ковариацию. Систематическую неопределённость следует включать в допустимый класс моделей или оценивать интервально. В приложенных данных эти калибровочные величины заданы точно, а ±2% относятся только к обычным проводимостям. Чтобы применить ту же оболочку к физической цепи, остальные ошибки должны быть независимо ограничены и добавлены к запасу.

Механическое досье и условный бюджет момента

Контролируемый источник массы создаёт меняющийся момент, а чувствительный элемент, например крутильный осциллятор, превращает его в угол. Для малых колебаний используются момент инерции I, жёсткость к и коэффициент вязкого затухания b. Амплитуда и фаза механической восприимчивости определяют перевод оптического показания в момент. Их проверяют в рабочем диапазоне с известным воздействием.

Рисунок 57 связывает компоновку крутильного датчика с последовательностью преобразования момента в измеряемый сигнал.

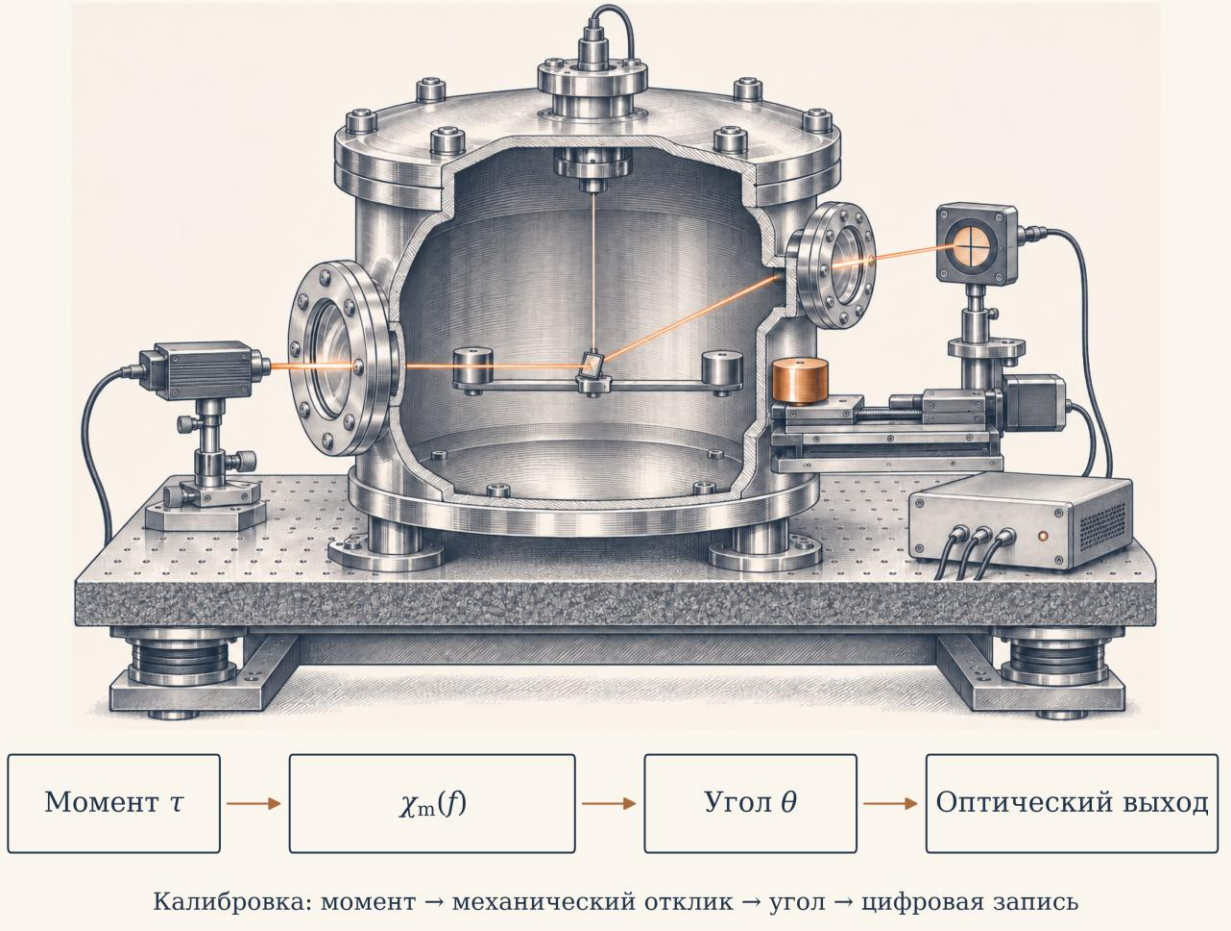


Рисунок 57. Концепция современного крутильного датчика. Чувствительная балка подвешена на тонкой нити в вакуумном корпусе; управляемая масса создаёт момент, а лазерное считывание регистрирует угол. Нижняя цепочка разделяет момент, механическую восприимчивость, угол и выход регистратора. Это иллюстрация возможной компоновки: размеры, экранирование и чувствительность построенного прибора здесь не заявлены. Условный низкочастотный бюджет в тексте не переносится на двухдисковый опыт главы 10.

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \kappa\theta = \tau(t), \qquad \chi_{\theta\tau}(\omega) = \frac{1}{\kappa - I\omega^2 + ib\omega} \tag{13.5}$$

Ниже выбран низкочастотный эталон для расчёта, а не паспорт существующего оборудования. Пусть $I=10^{-6}$ кг·м², собственная частота $f_0=0{,}01$ Гц, добротность $Q=1000$, температура 300 К. Источник модулируется при $f=0{,}005$ Гц, а шум оптического считывания

принят равным 10^{-8} рад/√Гц. При вязком затухании $к=I(2\pi f_0)^2$ и $b=I2\pi f_0/Q$. Эти предположения замыкают расчёт простой модели.

$$S_\tau^{\mathrm{th}} = 4k_B T b, \qquad S_\tau^{\mathrm{ro}}(f) = \frac{S_\theta^{\mathrm{ro}}(f)}{|\chi_{\theta\tau}(2\pi f)|^2} \qquad (13.6)$$

Величина	Расчётное значение
Крутильная жёсткость к	$3{,}948 \times 10^{-9}$ Н·м/рад
Коэффициент b	$6{,}283 \times 10^{-11}$ Н·м·с/рад
Модуль восприимчивости при 0,005 Гц	$3{,}377 \times 10^{8}$ рад/(Н·м)
Тепловая ASD момента	$1{,}020 \times 10^{-15}$ Н·м/√Гц
ASD считывания в единицах момента	$2{,}961 \times 10^{-17}$ Н·м/√Гц
Ошибка амплитуды за 10^5 с при известной фазе	$3{,}228 \times 10^{-18}$ Н·м

Последняя строка получена для оценки амплитуды $2T^{-1}\int\tau(t)\cos(2\pi ft)dt$ при многих периодах и стационарном белом шуме момента. Для принятой односторонней плотности её дисперсия приблизительно равна $S\tau(f)/T$. Если неизвестны обе квадратуры, распределение модуля и правило обнаружения меняются. При плече 1 см указанная ошибка момента соответствует ошибке гармоники силы около $3{,}23 \times 10^{-16}$ Н.

Этот расчёт помогает оценить расстояние между простым механическим макетом и требованием конкретного поиска. Условный силовой пример главы 10 задаёт свою геометрию, частоту модуляции и требуемую ошибку. Низкочастотный крутильный эталон не получает эти характеристики автоматически: для переноса нужно заново вычислить восприимчивость, связь силы с моментом и полную ошибку. Более высокая частота источника может резко ослабить его угловой отклик.

Вязкое затухание выбрано здесь как явно определённая модель. При внутреннем структурном трении частотный закон теплового шума отличается; соответствующее различие подробно рассмотрено Саулсоном. Поэтому измеренная добротность на одной частоте ещё не определяет весь спектр. [48]

Главная часть реального бюджета может оказаться систематической. Ошибка зазора δd меняет предсказанный момент на $(\partial\tau/\partial d)\delta d$; для короткодействующей поправки это изменение способно имитировать искомый эффект. Отдельно проверяются движение экрана, поверхностные потенциалы, вибрации, плотность и размеры источника. В расчёт таблицы они не включены. Первое аппаратное испытание должно воспроизвести известное воздействие и внесённое малое изменение в нескольких геометриях. После этого измеренный спектр и допустимые ошибки используются в интеграле по телам из главы 10.

Часовая сеть с общим гравиметрическим каналом

В главе 11 выбрана геометрия из двух часов и гравиметра на середине базы. Совместный спектр связывает потенциальную разность с направленной производной того же поля. Для проверки пространственного закона нужны несколько баз или изменение геометрии. Если все расстояния много меньше длины корреляции, преобладает комбинация A/ℓ, и отдельные параметры определяются плохо. Пространственный масштаб выбирается по изменению предсказаний, а не только по удобству размещения приборов.

Численный пример главы 11 использует базу 1000 м, длину корреляции 1000 м, время корреляции 10 с и амплитуду безразмерного поля $A=10^{-20}$. Для приборных шумов заданы условные выходные ASD $10^{-18}/\sqrt{\text{Гц}}$ в часовом канале и 10^{-7} м/с²/√Гц в канале ускорения. Там же включена общая шумовая компонента и проверка сменой знака пространственного отклика. Эти числа задают синтетический опыт, а конкретная лаборатория должна предоставить собственные спектры и функции чувствительности.

До объединения записей фиксируют общую временную шкалу, задержки, частотные фильтры и ориентацию чувствительной оси гравиметра. Часовые сравнения и ускорения переводятся в одну полосу. В журнал входят расположение атомных образцов, движение опор, температура, магнитное поле, давление и перемещения ближайших значительных масс. Согласование каналов проводится по независимо измеренному отклику; свободно подстраиваемая фазовая поправка может скрыть аппаратную причину корреляции.

Число каналов само по себе не обеспечивает независимости. Одна линия передачи, общий оптический генератор или общая система синхронизации могут связывать разные частотные сравнения. Поэтому паспорт сети содержит как локальные спектры, так и перекрёстные элементы помех. Полезен отдельный контроль, у которого сохраняется аппаратная связь, но меняется знак или подавляется пространственный полевой отклик. Именно эту роль выполняет геометрическая перестановка, разобранная в главе 11.

$$\delta y \simeq \frac{g\,\delta h}{c^2}, \qquad \delta h = 1\ \text{mm} \ \Rightarrow\ \delta y \simeq 1.09 \times 10^{-19} \tag{13.7}$$

Оценка (13.7) при g≈9,81 м/с² показывает, почему измерение высоты становится частью частотного опыта. Тепловое расширение опоры или смещение образца на миллиметр создаёт заметный для выбранного масштаба частотный эффект. Это следствие слабополевой формулы, а не характеристика нового датчика. Калибровка с перемещаемой массой также требует предварительного расчёта: величина ΔΦ/с² может оказаться слишком малой для часового канала, хотя ускорение уже видно гравиметром.

Инженерный вывод следует ограничить наблюдаемой величиной. Согласование потенциального и градиентного каналов проверяет принятую модель общего поля. Вывод о кривизне дополнительно требует кинематического и приливного контроля, описанного в главе 11. Эти измерения включаются в конфигурацию установки до поиска необычного остатка.

Что означает готовность к измерению

У каждого проекта должен быть исполнимый вариант модели известной системы. В него входят не только исследуемый объект, но и подготовка, считывание, полоса, геометрия и калибровка. После добавления гипотетического эффекта проверяется, какие признаки остаются различимыми при допустимых изменениях остальных параметров. Набор таких признаков определяет полезный диапазон прибора.

RC-практикум завершает эту цепочку на малой синтетической системе: от вольтов в CSV до нормированного отклика и обоснованного решения о выбранном локальном классе. Перенос к лабораторному макету начинается с измерения тех параметров, которые в файле калибровки пока заданы точно. Механическое и часовое досье используют ту же логику, но требуют иной техники и независимого подтверждения шумового бюджета.

Приёмка включает как обнаружение внесённого эффекта, так и работу при его отсутствии или неразличимости. Сохранённые исходные записи позволяют повторить анализ с другой моделью помех и проверить, какой шаг изменил вывод. Следующая глава формализует эту процедуру: как выбирать контрольные случаи, сравнивать объяснения и сообщать результат, когда данные не определяют единственный ответ.

Глава 14
Как отличить открытие от убедительной ошибки

Утверждение должно опережать результат

Проверяемое утверждение фиксирует объект, класс моделей, данные и правило решения. После просмотра результата можно сформулировать новое предположение и спроектировать следующий опыт. Важно сохранить последовательность: исследование, подсказавшее вопрос, и записи, на которых его проверяли, выполняют разные роли. В приведённом примере именно так устроен переход от гибридной пары к контрольным портам.

В предлагаемой программе основной объект проверки - различимость геометрии и динамики. Операционная размерность может измениться из-за связности, способа переноса, частотной дисперсии, утечек или неверной калибровки. Поэтому нулевая модель не должна быть карикатурно простой. Вместе с ней задают несколько содержательных альтернатив: обычную геометрию с неоднородными параметрами, новое поле без дополнительного измерения и инструментальный общий процесс. Если необычная гипотеза сравнивается только с заведомо неполным описанием, победа в таком сравнении мало сообщает о мире. Научная задача состоит в выигрыше у наиболее сильных разумных объяснений, а не у специально ослабленного соперника.

Перед началом дорогостоящего этапа полезно составить таблицу предсказаний для нескольких вмешательств. Например, изменение расстояния, смена материала, поворот датчика и перестановка электроники действуют на модели по-разному. Если две гипотезы дают одинаковые прогнозы для всех доступных вмешательств, увеличение точности того же измерения может не разрешить спор. Потребуется новый наблюдаемый канал. Такой вывод можно получить ещё до постройки прибора и тем самым избежать длительного накопления данных, которые принципиально не отвечают на поставленный вопрос. Предварительное вычисление различимости становится самостоятельным исследовательским результатом, поскольку определяет необходимые условия будущего открытия.

Слепая проверка как часть конструкции

Слепой анализ ограничивает возможность непреднамеренно подгонять обработку под ожидаемый ответ. В данных может присутствовать неизвестное аналитикам смещение, скрытая перестановка меток или заранее внесённый сигнал. Правила отбора, калибровки и оценки неопределённости фиксируются до раскрытия. Важно выбирать способ ослепления так, чтобы он не мешал обнаруживать реальные неисправности. Например, абсолютный масштаб можно скрыть, сохранив диагностические связи между каналами. Слепая процедура уже применялась в лабораторной проверке гравитационного красного смещения Чжэна и

соавторов. Здесь предлагается перенести сам принцип на проверку операционной размерности, не выдавая ещё не проведённое испытание за состоявшийся опыт. [30]

Для электрического прототипа удобно подготовить несколько скрытых сетей. Оператор измеряет их по одному протоколу, аналитик получает временные ряды без схем соединения, а ответственное за метки лицо сохраняет истинную структуру до окончания расчёта. В часть наборов вводят обычные неоднородности сопротивлений и утечки, способные имитировать необычную связность. В другие добавляют настоящий дополнительный путь тока. Оценивать нужно одновременно долю правильных восстановлений, частоту ложных открытий и способность распознавать неопределённость. Алгоритм, всегда уверенно называющий одну структуру, может выглядеть успешным на удобном наборе, но провалиться на специально выбранных вырожденных примерах.

Аппаратное внесение и цифровая добавка решают разные задачи. Цифровой сигнал проверяет математическую обработку после места внесения. Движение калибровочного зеркала проверяет оптику и считывание, но не обязательно воспроизводит предполагаемую метрику вдоль светового пути. Изменение массы проверяет механическую и гравитационную модель, но может одновременно создавать вибрацию. Поэтому каждое внесение сопровождается указанием, какой участок измерительной цепи оно испытало. Полезно иметь несколько независимых способов внесения и контрольные записи без внесения. Успешное прохождение такой программы подтверждает пригодность прибора к определённому классу сигналов, сохраняя открытым вопрос об их природе.

Порядок доступа к структуре, записям и ключу в предлагаемом слепом испытании показан на рисунке 58.

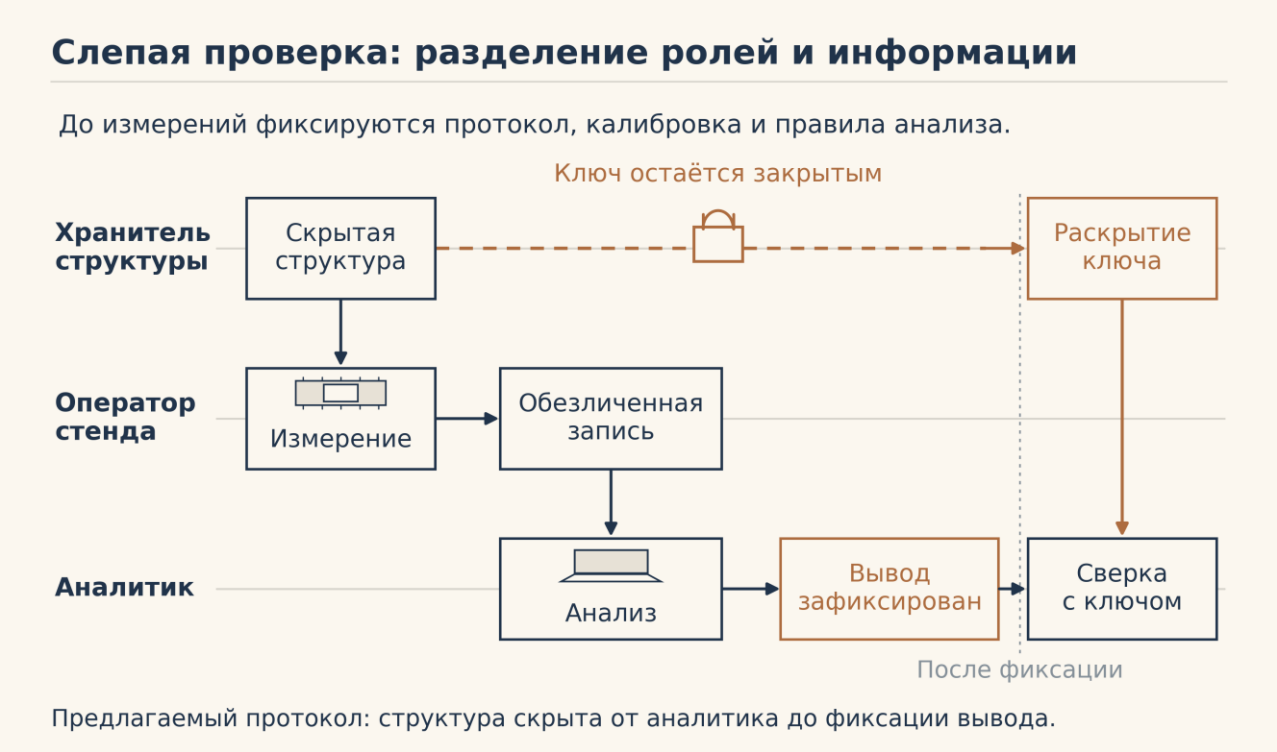


Рисунок 58. Предлагаемое разделение ролей в слепом испытании. Хранитель сохраняет истинную структуру и ключ меток, оператор выполняет измерения по заранее зафиксированному протоколу, аналитик получает обезличенные записи. Вывод фиксируется до раскрытия ключа; только затем выполняется сверка с известной структурой. Схема показывает порядок доступа к информации, а не состоявшийся опыт. Она должна сочетаться с доступной диагностикой неисправностей и явным указанием участка, проверяемого каждым внесённым сигналом.

Вероятностный вывод и параметры помех

Статистическая модель должна описывать не только среднее ожидаемое значение, но и корреляции ошибок. Для вещественного вектора данных при гауссовом приближении используется квадратичная форма с обратной ковариационной матрицей. Если сама ковариация зависит от параметров гипотезы, необходимо сохранять и член с её определителем. Удаление этого члена способно поощрять модель, которая просто увеличивает объявленный шум. Формула ниже задаёт условное правдоподобие при параметрах физики θ и параметрах калибровки η. При существенной негауссовости, малом числе усреднений или иной статистике счётчика распределение следует менять; привычность гауссовой формы не является обоснованием её применения.

$$-2\ln\mathcal{L} = (\mathbf{d}-\boldsymbol{\mu})^{T}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\mu}) + \ln\det\mathbf{C} + N\ln(2\pi), \qquad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\theta,\eta), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}(\theta,\eta) \tag{14.1}$$

Калибровочные параметры нельзя просто подставить в виде удобных точных чисел, если их ошибка сопоставима с предполагаемым эффектом. Их ограничивают независимыми

измерениями, а затем либо профилируют, либо интегрируют с явно указанными распределениями неопределённости. Разные статистические подходы отвечают на разные вопросы, и результаты следует называть соответственно. Доверительная область не является вероятностью истинности теории, а байесовское отношение свидетельств зависит от заданных семейств моделей и распределений параметров. Вместо единственного впечатляющего показателя полезно публиковать остатки, устойчивость к альтернативным моделям шума и предсказания для отложенных данных. Это делает вывод проверяемым за пределами выбранного способа статистического представления.

Причину неразличимости можно увидеть уже в линейном приближении. Малое изменение ожидаемого сигнала складывается из вкладов геометрических и калибровочных параметров. Если направление изменения, приписанное геометрии, совпадает с комбинацией направлений калибровочных ошибок, данные не умеют разделять эти причины без внешней информации. Матрицы чувствительности в формуле содержат производные сигнала по соответствующим параметрам. Их близкая линейная зависимость означает не слабость вычислительного алгоритма, а недостаток информации в эксперименте. Увеличение числа знаков после запятой в оптимизаторе не устраняет эту проблему. Нужны другая конфигурация, независимая калибровка или новое наблюдаемое.

$$\delta \mathbf{\mu} = \mathbf{J}_{\mathrm{geom}} \delta \mathbf{\theta} + \mathbf{J}_{\mathrm{cal}} \delta \mathbf{\eta} \qquad (14.2)$$

При переборе большого числа длин корреляции, частотных интервалов или возможных скрытых связей повышается вероятность найти случайно интересную комбинацию. Поэтому порог обнаружения калибруют для всей процедуры поиска, включая выбор лучшего результата. Подходящий способ - многократные симуляции нулевой модели с тем же поиском и теми же правилами остановки. Однако такая калибровка действительна лишь настолько, насколько нулевая симуляция воспроизводит существенные свойства реального шума. Неучтённая общая помеха способна сделать формально редкое событие обычным. Именно поэтому корреляционный поиск должен соединять статистическое усреднение с проверкой физических источников общего сигнала, а не рассматривать эти задачи отдельно.

Одновременные интервалы для ограниченной сети

В протоколе главы 8 каждое скалярное наблюдение имеет вид $z_j = a_j^{T} G_{\text{набл}} a_j$. При независимо приобретённых направленных элементах матрицы с одинаковой дисперсией σ^2 и норме a_j, равной единице, дисперсия z_j также равна σ^2. Сами контрасты зависимы: два вектора могут использовать одни и те же элементы. Для общей ковариации c_j обозначает вектор коэффициентов линейной комбинации записанных данных.

$$\sigma_j^2 = c_j^{\mathsf{T}} C c_j, \qquad c_j = \mathrm{vec}\left(a_j a_j^{\mathsf{T}}\right) \qquad (14.3)$$

Пусть до проверочной серии выбраны M контрастов. При гауссовых маргинальных ошибках с известными дисперсиями зададим каждому двухсторонний интервал с вероятностью промаха не более β/M. Объединение событий промаха тогда имеет вероятность

не более β независимо от корреляции контрастов. Для β = 0,01 используется следующий множитель:

$$k = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\beta}{2M}\right), \qquad I_j = \left[z_j - k\sigma_j,\ z_j + k\sigma_j\right] \qquad (14.4)$$

Для двух исходных зондов M = 216 и k = 4,07358. После добавления двух контрольных записей по 36 контрастов M = 288; множитель вычисляется заново для всего окончательного набора. Если истинные веса лежат в объявленной коробке и модель маргинального шума верна, её отклик с вероятностью не ниже 1 − β попадает во все интервалы. На этом событии внешние матричные оболочки сохраняют истинные параметры.

Перебор 2016 пар не требует ещё одного множителя 2016 в этой конструкции. Сначала строится одна одновременная область для всех заранее выбранных наблюдений, затем она обращается на пространство параметров. Какой бы ни была истинная пара из заданного класса, она не отсекается на событии общего покрытия. Это другой способ контроля ошибки, чем поиск максимального улучшения χ² и эмпирическая калибровка его порога.

Уровень 1 процент относится к ошибочному исключению истинного параметра этим правилом оболочек при его предпосылках. Он не является вероятностью истинности оставшейся пары и не охватывает пропущенные физические причины. Если дисперсии оцениваются по малому числу записей, имеют негауссовые хвосты или меняются после выбора интересного канала, формулу необходимо заменить либо дополнить. Для общей временной записи сначала вычисляется правильная ковариация преобразованных данных.

Свидетельство совместимости и доказательство исключения

Эти два действия имеют разную вычислительную цену. Чтобы показать совместимость модели, достаточно предъявить один допустимый набор параметров, чей прямой отклик лежит в выбранной области ошибок. Для исключения требуется убедиться, что таких наборов нет. Локальный оптимизатор способен помочь первому действию, но его остановка на большом остатке не доказывает второе.

В книге ограниченный поиск точного отклика использует аналитический якобиан и пределы весов ±2 процента. Для двух зондов поиск свидетельства дополнительно рассматривает общий относительный дрейф. Это более узкий подкласс, чем разрешённые в оболочках отдельные дрейфы; найденная точка принадлежит и широкому классу. Неудача в узком подклассе не исключала бы широкий. Все значения остатка вычисляются повторной прямой подстановкой параметров.

$$\chi^2(\theta) = \left(d - \mu(\theta)\right)^{\mathsf{T}} C^{-1}\left(d - \mu(\theta)\right) \le q_{0.99,N} \qquad (14.5)$$

В этой диагностической проверке $q_{0.99,n}$ - квантиль χ² для N известных независимых нормированных ошибок. Число N не уменьшается на количество найденных параметров: проверяется существование точки в шаре данных, а не стандартная асимптотическая статистика остатка после оценки. Малый минимум при 144 калибровочных переменных не

является доказательством предпочтительности столь гибкой модели; он показывает, что её нельзя отвергнуть данными в выбранной области.

Шар полного остатка и семейство скалярных интервалов - разные диагностические конструкции. В программе строгие исключения производятся только оболочками; отсутствие найденного свидетельства переводит результат в неопределённый статус. Поэтому отдельный 99-процентный шар не выдаётся за новый общий уровень всей процедуры. Если будущий протокол будет отвергать модели по нескольким правилам сразу, его совокупную ошибку потребуется контролировать отдельно.

Наблюдаемая ситуация	Допустимый вывод
Найдена ограниченная калибровка без ребра	Обычная калибровка совместима; добавление не установлено
Калибровка исключена оболочками; есть свидетельство для общей пары	Общая пара совместима внутри заданного класса; проверяются раздельные и аппаратные причины
Все общие пары исключены; раздельная модель имеет свидетельство	Данный вариант общей односвязной модели отвергнут
Оболочки допускают пары, но свидетельство не найдено	Неопределённость вычисления или модели; утверждения об исключении нет
Общий сигнал сохраняется в независимом аппаратном контроле	Есть основание исследовать соответствующий участок тракта регистрации

Чему учит численный опыт из этой книги

Первая серия установила работоспособность односвязного восстановления в известной малошумной сети и его уязвимость к ошибке эталона. Ограниченный контрпример главы 8 показал более опасную ситуацию: даже хороший остаток не отделяет новую связь от небольшого специально подобранного дрейфа. Включение калибровки в класс объяснений позволило предъявить обычную причину этих данных.

Затем два зонда сократили множество возможных пар. Но контроль раздельных структур создал ложное согласие, которое прошло и ограниченную подгонку. Дополнительные порты были выбраны после изучения этого случая, а затем зафиксированы до новой серии. Именно они позволили исключить все общие пары у заданного контрпримера. Здесь завершена конкретная исследовательская цепочка, включая неудачу промежуточного критерия.

Приведённые 96 новых реализаций проверяют выбранный протокол при объявленных диапазонах и шумах. Они не оценивают вероятность произвольной природной аномалии. В частности, результат для пары 5-58 и нескольких специально заданных альтернатив не переносится автоматически на весь набор пар. Для масштабирования метода нужны отдельные ансамбли по геометрии, дополнительные физические ошибки и независимые аппаратные записи.

Ступени физического доказательства

Для сохранения ясности полезно различать несколько уровней результата. Сначала проверяется математическая непротиворечивость модели и правильность расчёта отклика. Затем метод проходит испытание на искусственной системе с известными свойствами. Следующий уровень - воспроизводимое отклонение в физическом эксперименте. После него устанавливается конкретная общая причина и только затем обсуждается геометрическая интерпретация. Наконец, квантовое происхождение потребует признаков, которые нельзя объяснить подходящей классической случайной моделью в пределах принятых предположений. Эти уровни не обязаны занимать одинаковое время, но перепрыгивание между ними делает вывод сильнее имеющихся данных и разрушает возможность честной проверки.

Уровень	Что установлено	Чего пока нельзя утверждать
Расчёт	Модель и отклик согласованы с заданными предположениями	Что модель реализована природой
Контролируемый аналог	Метод распознаёт свойства искусственной сети	Что изменена размерность свободного пространства
Воспроизводимый остаток	Исходная модель данных недостаточна	Что причина обязательно геометрическая
Общий физический механизм	Несколько наблюдений объясняются одной проверенной причиной	Что механизм имеет единственную интерпретацию
Геометрическая гипотеза	Её отличительные предсказания выдерживают независимые проверки	Что автоматически доказана квантовая природа
Квантовая интерпретация	Проверены признаки, отличающие заданные квантовые и классические объяснения	Что исключены все мыслимые альтернативы

Независимое воспроизведение должно менять хотя бы часть путей возможной ошибки. Повтор на том же приборе полезен для устойчивости, но сохраняет его систематические особенности. Повтор другой группой на копии схемы уменьшает одни риски и оставляет другие. Особенно убедителен опыт с иным физическим принципом считывания, если обе установки проверяют количественно связанную величину. При этом несовпадение результатов не следует сразу объяснять новой зависимостью эффекта от каждого различия условий. Сначала необходимо установить, сравниваются ли одинаковые режимы и корректно ли перенесены параметры. Новое условие в теории допустимо, но должно создавать новое проверяемое предсказание.

Нулевая регистрация тоже может быть сильным результатом, если заранее показано, какую область параметров опыт способен испытать. Публикация должна включать ограничения при разных допущениях о шуме, открытый расчёт отклика и описание исключённых интервалов данных. Если прибор не достиг требуемого уровня из-за выявленной систематики, это следует назвать инженерным ограничением, а не пределом природы. Такой отчёт сохраняет возможность улучшения: следующая группа понимает, что

именно необходимо изменить. Если же чувствительность достигнута и модельный сигнал отсутствует, теория получает реальное ограничение. Именно эти различия делают исследовательскую программу накопительной, а не последовательностью несопоставимых заявлений.

Переход от выполненного расчёта к следующему опыту

Вычислительный этап теперь имеет законченный ограниченный результат: заданы классы моделей, выведена консервативная оболочка, найдены совместимые параметры, построены трудные отрицательные случаи и проверен различающий режим. Следующий содержательный шаг - перенести именно эти условия в электрический практикум. Нужно измерить пределы весов, ёмкости, нагрузку считывания, временное окно и ковариацию, а затем определить, какие предпосылки численного примера выдерживают реальную запись.

После проверки электрического прототипа можно выбирать более сложную установку под конкретную физическую гипотезу. Для такого перехода нужен рассчитанный сигнал в геометрии выбранного прибора, сравнение с измеренным фоном и вмешательство, различающее основные объяснения. Успех сетевого протокола даёт проверенный метод работы с ограниченными классами, но не задаёт автоматически взаимодействие вакуума с часами, массами или светом. Эти связи выведены в физических главах для отдельных условных моделей.

Третий результат - независимая проверка согласованного семейства предсказаний. Для компактной геометрии это могут быть связанные дальности и спектральные масштабы в полностью заданной модели связи с веществом. Для слабого случайного потенциала - совместная пространственная и временная структура часов и гравиметров. Для интерферометрической гипотезы - зависимость от светового пути, ориентации и частоты, рассчитанная до наблюдения. На любом этапе программа может опровергнуть собственную исходную идею. При этом останутся проверенные методы, ограничения и приборные знания. Именно такая конструкция работы создаёт шанс на качественный скачок: необычная гипотеза получает возможность оказаться правильной, а эксперимент сохраняет право показать, что пространство устроено иначе.

Глава 15
Что установлено и как продолжить проверку

Результаты, которые можно повторить

Книга начиналась с вопроса о восстановлении устройства пространства по доступным наблюдениям. В завершённых примерах этот вопрос получил несколько разных ответов. Одно усреднённое измерение иногда теряет различающую информацию полностью. При более богатых данных структура может восстанавливаться, но ошибка эталона способна изменить смысл результата. Дополнительный зонд помогает только в той мере, в какой обращается к потерянной информации.

Первый точный пример дают две трёхузловые сети главы 2. Их спектры совпадают, поэтому совпадает и весь тепловой след. Локальное возбуждение различает сети уже в одном заранее названном узле. Этот результат не зависит от численной оптимизации: он проверяется диагонализацией двух небольших матриц и вычислением их экспонент.

В большом опыте обнаружена более практическая неоднозначность. Коррелированный дрейф 144 обычных весов в пределах ±2% имитирует слабую дополнительную связь. Односвязная модель относительно неизменного эталона выбирает пару 5-58, даёт улучшение χ^2 около 85,69 и благополучные остатки. После включения допустимого дрейфа найдено объяснение без дополнительной связи с $\chi^2/192 \approx 0{,}6105$. Это свидетельство совместимости данных с калибровкой; основание для положительного вывода о новой связи исчезает.

Ограничение ±2% имеет здесь самостоятельный смысл. Оно задаёт проверяемый класс исходных моделей. Для реального прибора такой интервал должен опираться на калибровочные измерения. Сужение интервала делает исключение проще, но научно допустимо только тогда, когда точность компонентов действительно известна лучше.

Матричные оболочки главы 7 дают иной вид результата, чем локальная подгонка. Выход измерительного контраста за одновременную границу исключает весь ограниченный калибровочный класс при принятых статистических предпосылках. Попадание внутрь оболочки сохраняет возможность модели, но не доказывает существование общего набора весов. Для совместимости дополнительно предъявляется допустимая точка точного прямого расчёта. Неудача локального оптимизатора остаётся вычислительным фактом и не заменяет исключающую границу.

Что прибавил второй зонд

Новый двухзондовый пример использует разные известные базовые операторы и доступ к противоположным граням сети. Отдельные наборы данных оставляют 52 и 48 допустимых пары; совместные необходимые условия оставляют одну пару 5-58. Ограниченная подгонка общего случая даёт $g \approx 0{,}3053\ c^{-1}$ при внесённом значении $0{,}3\ c^{-1}$ и $\chi^2/384 \approx 0{,}7669$. Это

результат для заданного класса из одной неотрицательной связи, известной регистрации узлов и определённой связи силы сигнала между зондами.

Масштабированная копия первого канала даёт значительно меньше новой структурной информации. В шумном контрольном опыте остаётся 51 пара. Без шума исходный канал и его масштабированный дубль сохраняют одинаковые 44 пары. Независимое повторение полезно для точности, но изменение единиц времени и амплитуды не создаёт отсутствующей пространственной информации.

Самый трудный контроль возник при разных истинных парах у двух зондов: 5-58 и 6-57. Совместный анализ исходных портов оставляет ложную гибридную пару 5-57. Даже точная подгонка общей модели укладывается в шум. Следовательно, одна оставшаяся пара в конечном наборе данных ещё не подтверждает физическое предположение об общей структуре.

После изучения этого конструктивного примера выбрана дополнительная схема портов и зафиксирована до новой серии шумов. Она включает узлы 0, 5, 6, 15, 48, 57, 58 и 63 при $s = 0{,}3\ c^{-1}$ для обоих зондов. Такой контроль сохраняет истинный общий случай и исключает общий односвязный класс в гибридном примере. Происхождение схемы существенно: это проверка спроектированного протокола на новых данных, а не слепая проверка дизайна, выбранного до знакомства с трудным примером.

Класс новой серии	Число реализаций	Результат после дополнительного контроля
Ограниченный дрейф без дополнительной связи	24	Калибровочная модель не исключена в 24 случаях
Одна истинная общая связь	24	Истинная пара сохранена в 24 случаях
Разные истинные пары двух зондов	24	Общий односвязный класс исключён в 24 случаях
Заданный общий электронный паразитный канал	24	Общий односвязный класс исключён в 24 случаях

Эти 96 реализаций относятся к четырём заданным конструкциям и новым значениям генератора шума. Они не определяют частоту ошибок для произвольных сетей, неизвестных типов помех или другой калибровочной неопределённости. Их назначение - проверить воспроизводимость конкретной последовательности решений, включая отказ от ошибочного согласия.

От временной записи к структуре

RC-практикум завершает отдельный путь от измерительного сигнала к модели. Четыре узла и три скрыто заданных случая порождают двенадцать файлов временных записей. Обработка учитывает начальное состояние, нормировку напряжений, входную нагрузку,

конечное окно и совместную ковариацию лапласовских оценок. Анализ работает с файлами наблюдений; ключ генератора используется отдельно для проверки решения.

Для выбранного контраста и интервала локальных проводимостей ±2% калибровочная оболочка равна примерно 11,1005-11,4398 мс. Эталонный случай и случай дрейфа попадают в эту область. Внесённая связь 0-3 даёт около 7,7578 мс и исключает локальный класс. Её интенсивность восстановлена как 19,9974 $с^{-1}$ при истинных 20 $с^{-1}$. Здесь различие намеренно достаточно велико, чтобы на простой схеме можно было проверить всю обработку.

Практикум остаётся синтетическим стендом. Его законченный результат - согласованность уравнений, единиц, файлов и алгоритма. Следующий физический опыт должен выяснить, насколько принятые модели нагрузки, шума и калибровки описывают собранную схему. При расхождении следует сначала расширить измерительную модель и повторить контрольные случаи.

Физические модели получили измеряемые следствия

Компактная ветвь теперь связывает спектр мод со статическим и динамическим откликом выбранного скалярного зонда. В статическом примере учтены конечные размеры источника и детектора, затем вычислена гармоника силы при модуляции зазора. Динамический расчёт показывает пороги распространения. Он позволяет проверить, какие особенности действительно следуют из компактности, а какие требуют дополнительного резонатора или закона связи с прибором.

В часовом примере выведены все блоки совместного сигнального спектра, включая смешанный канал с гравиметром. Внесённый сигнал и заданная чётная электронная помеха разделены физической перестановкой положения часовых датчиков при сохранении каналов считывания. Этот контроль опирается на свойства выбранной помехи. Пространственная средовая причина с той же симметрией потребует собственного измерения.

Пример Риндлера ограничивает геометрическую интерпретацию: градиент хода часов и показания ускоренного прибора возможны при нулевом тензоре кривизны. Поэтому согласованный часовой и ускорительный сигнал сначала проверяет общую модель наблюдения. Для вывода о кривизне требуется учёт движения системы отсчёта и приливная информация.

Интерферометрическая ветвь доведена до точной функции отклика в выбранном секторе поперечной бесследовой плоской волны и условном режиме свободных зеркал. Низкочастотное приближение сопоставлено с конечным временем пролёта. Провалы чувствительности при определённых частотах показывают, почему спектр поля нельзя напрямую назвать спектром измеренной фазы. Численный бюджет задаёт требования к выбранной схеме; он не заменяет измеренный шум реально построенной установки.

Во всех трёх случаях получено больше, чем название прибора: имеется вычисляемый путь от параметров модели к показанию. Проверка физической допустимости параметров, независимая калибровка и поиск сигналов природы образуют следующую экспериментальную задачу.

Область собственного результата

Изложение использует известные матричные тождества, теорию линейного отклика, спектральные методы и физические модели, указанные в библиографии. Совместное восстановление сетей и геометрические интерпретации корреляций также имеют предшествующую литературу. Само сочетание нескольких зондов не устанавливает научного приоритета.

Конкретное содержание выполненной программы состоит в согласованной постановке ограниченного опыта: калибровочный класс задан явно, неоднозначность предъявлена данными, исключающие оболочки отделены от подгонки, ложное двухзондовое согласие проверено отдельным воздействием, а измерительная процедура доведена до временных записей. Эти элементы можно воспроизводить и сравнивать с другими алгоритмами на одинаковых входных данных.

Для самостоятельной исследовательской публикации потребуется более узкий вопрос. Например, насколько конкретный выбор портов уменьшает наихудшую калибровочную неоднозначность при фиксированном числе измерений? Или какие дополнительные контрасты гарантированно разделяют два заранее определённых класса связности? На такие вопросы можно отвечать теоремой, контрпримером или воспроизводимым численным сравнением. Их формулировка задаёт проверяемый предмет новизны.

Следующий физический опыт

Первый практический шаг - собрать малую RC-сеть и воспроизвести процедуру приложения Д. До раскрытия контрольных изменений следует измерить исходные ёмкости, проводимости, нагрузку и шум, затем зафиксировать модель ошибок и правило решения. После этого проверяются эталон, допустимый дрейф и дополнительная связь. Расчётная точность должна сопоставляться с действительным разбросом повторных записей.

Переход к большей сети оправдан после проверки всей цепочки на малой. Число портов, их расположение и режимы возбуждения тогда выбираются по способности различать конкурирующие модели. Снижение шума полезно, пока измеряется нужное различие; если два класса дают одинаковые доступные данные, требуется изменить сам опыт.

Для компактной, часовой и интерферометрической ветвей следующий шаг определяется соответствующим бюджетом. Нужно измерить те передаточные функции и помехи, которые в расчёте были заданы. Затем полезно вводить известный контрольный сигнал и проверять восстановление его амплитуды, пространственного рисунка и временной зависимости. Успех такого ввода проверяет тракт регистрации и анализ, сохраняя отдельным вопрос о происхождении возможного естественного сигнала.

Открытые вопросы физики пространства

За пределами завершённых примеров остаются неизвестная топология эталона, неограниченные скрытые узлы, несколько слабых связей, неизвестные законы связи зондов с

общим объектом и неполная калибровка. В этих условиях потребуется заново определить класс альтернатив. Приведённые формулы помогают поставить задачу, но не дают автоматического решения для любого устройства.

Ещё глубже лежит переход от эффективного оператора к фундаментальной геометрии. Для него нужны динамика, согласование разных полей, причинность и наблюдаемые следствия, которые выдерживают сравнение с уже известными физическими механизмами. Обнаруженная связь в электрическом аналоге устанавливает свойство аналога. Утверждение об устройстве пространства требует соответствующего физического эксперимента.

Продвижение начинается там, где вопрос становится достаточно точным для сопротивления данных. Одна измерительная схема теряет различие между двумя сетями; другая возвращает его. Одна модель ошибочно приписывает дрейф новой связи; расширенный контроль обнаруживает эту ошибку. Такой переход от предположения к различающему опыту и составляет рабочую основу дальнейшего исследования пространства.

Приложение A
Математические соглашения

Обозначения и единицы

Одинаковое обозначение в разных областях физики иногда имеет разные значения. В этой книге оператор сети обозначается буквой L, а физическая длина плеча интерферометра - символом $\mathscr{L}$ либо явно названной длиной. Параметр s относится к преобразованию Лапласа; частота f измеряется в герцах, угловая частота ω равна 2πf. Диффузионный параметр σ в континуальном тепловом ядре может иметь размерность квадрата длины, тогда как время t в электрическом аналоге измеряется в секундах. Отождествлять их без коэффициента нормировки нельзя.

Обозначение	Смысл	Единицы в используемой модели
L	Лапласиан нормированной диффузионной сети	$с^{-1}$
g	Интенсивность связи	$с^{-1}$
G(s)	Нормированная матрица отклика	с
s	Параметр преобразования Лапласа	$с^{-1}$
K	Матрица электрических проводимостей	сименс
C	Ёмкость узла или матрица ёмкостей в электрической модели	фарад
R	Радиус компактного направления	м
q_n	Обратный пространственный масштаб моды	$м^{-1}$
q	Флуктуация потенциала $\delta\Phi/c^2$ в модели часов	1
A	Среднеквадратичная амплитуда поля q в модели часов	1
ℓ и τ_c	Длина и время корреляции часовой модели	м и с
S(f)	Спектральная плотность мощности	квадрат единиц сигнала на Гц
$\tau = b^{T}G_0 b$	Скаляр изменения связи в главе 7; зависит от пары и s	с
C в статистическом критерии	Ковариационная матрица ошибок измерения	квадрат единиц измеряемого сигнала

Обозначение	Смысл	Единицы в используемой модели
$A_0 = L_0 + sI$	Матрица сетевого уравнения в главе 7	c^{-1}
σ регистрационного шума	Стандартное отклонение ошибок матричного отклика	с
δ_e и ε	Относительное изменение веса и граница его модуля	1
η_a	Известный множитель связи общего параметра g с зондом a	1
$a^T G(s) a$	Измерительный контраст при нормированном a	с
α статистического семейства	Допустимая вероятность выхода хотя бы за одну совместную границу при данной модели шума	1
α юкавовского вклада и β башни мод	Относительные амплитуды взаимодействий; определяются отдельно от статистического α	1
$K(t) = \exp(-Lt)$	Импульсный отклик нормированной сети; отличается от электрической матрицы K	1
HVI(s)	Передача от тока к напряжению	ом
Hφ(f)	Передача от выбранной амплитуды поля к фазе	рад на единицу поля

Графовый скаляр $\tau = b^T G_0 b$ имеет единицы времени. Часовой $q = \delta\Phi/c^2$ безразмерен. Разные значения буквы K также указаны локально: электрическая матрица проводимостей измеряется в сименсах, а импульсный отклик K(t) нормированной сети безразмерен. При переходе между главами определение величины важнее совпадения буквы.

Квадратная матрица действует на вектор измеряемых величин. Для сети напряжений такой вектор содержит напряжения всех узлов. Матрица отклика связывает вектор возбуждений с вектором ответов при фиксированном значении параметра s. Её диагональный элемент описывает ответ на том же узле, где приложено воздействие; внедиагональный - ответ на другом узле. Транспонирование обозначено верхним индексом T, а эрмитово сопряжение комплексной матрицы - звёздочкой вместе с транспонированием или знаком † по контексту. В реальных симметричных сетевых моделях эти различия упрощаются.

Норма Фробениуса матрицы равна квадратному корню из суммы квадратов модулей её элементов. Относительная ошибка относится к явно указанному объекту: интенсивности связи, изменению отклика или полному отклику. В основном 64-узловом опыте анализируется изменение ΔG относительно эталона. В RC-практикуме отдельно показана точность полного G, а решение о связи принимается по различающему контрасту и

сравнению моделей. Маленькая ошибка полного отклика может скрывать большую относительную ошибку слабой добавочной составляющей.

$$\| M \|_F = \left(\sum_{i,j} |M_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \qquad \varepsilon_M = \frac{\| M_{\text{pred}} - M_{\text{true}} \|_F}{\| M_{\text{true}} \|_F} \tag{A.1}$$

О вероятностях и спектрах

Положительный лапласиан сети с неотрицательными весами соседних связей порождает сохраняющую вероятность диффузию. Для конечной связной сети нормированный тепловой след стремится к единице при нулевом времени и к обратному числу узлов при больших временах. Это означает, что спектральная размерность, вычисленная по логарифмической производной, стремится к нулю на обоих концах диапазона. Возможное плато размерности нужно искать между этими режимами, проверяя, сохраняется ли оно при увеличении сети и изменении разрешения.

Квантовое унитарное распространение и обычная диффузия используют разные операторы эволюции. Вероятность выживания квантового состояния нельзя без вывода подставлять вместо теплового следа. Аналогично спектральная плотность мощности и её квадратный корень имеют разные единицы. Для безразмерной деформации первая измеряется в $Гц^{-1}$, а вторая - в $Гц^{-1/2}$. Сравнение чувствительности приборов требует также одинаковых соглашений об одностороннем или двустороннем спектре, длительности накопления и частотной полосе.

$$P(t) = \frac{1}{N} \operatorname{Tr} e^{-tL}, \qquad P(0) = 1, \qquad \lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{1}{N} \tag{A.2}$$

Порядок матриц и область совместимости

Запись $A \preccurlyeq B$ означает, что для любого вещественного вектора v выполняется $v^T(B - A)v \geq 0$. Это порядок Лёвнера для симметричных матриц. При положительной определённости обращение меняет направление порядка. В сетевом опыте положительный s обеспечивает обратимость даже при наличии нулевой моды лапласиана.

$$0 \prec A \preccurlyeq B \quad \Rightarrow \quad B^{-1} \preccurlyeq A^{-1} \tag{A.3}$$

Набор индивидуально допустимых контрастов задаёт внешнюю область возможных данных. Не всякая точка этой области порождается одним общим вектором проводимостей. Поэтому оставшийся кандидат получает статус не исключённого оболочкой. Конкретный допустимый набор параметров, рассчитанный через точную прямую модель, служит дополнительным численным свидетельством совместимости.

Значения χ^2/N в таблицах означают сумму нормированных квадратов остатков на число записей. Здесь N не заменён на число степеней свободы после подбора параметров и выбора структуры. Эти величины удобны для сравнения масштаба остатка, но сами по себе не являются готовой вероятностью открытия.

Приложение Б
Повторение вычислительных опытов

Состав комплекта

Исходные данные и программы вычислительных опытов приведены в сопроводительном комплекте. Программы используют относительные пути, поэтому структуру каталогов следует сохранять. Численные графики воспроизводятся по тем же формулам и данным; предметные гравюры отмечены как концептуальные.

Программа	Что воспроизводится	Основной результат
revision2/code/foundations.py	Три узла, изоспектральная пара и сфера	results/foundations.json
revision2/code/math_revision.py	Ограниченная калибровка, два зонда, трудные контроли и 96 новых реализаций	results/math_revision.json
revision2/code/physics_revision.py	Компактный отклик, смешанный часовой спектр и интерферометр	results/physics_revision.json
revision2/code/rc_practicum.py	Генерация и обработка временных записей малого RC-стенда	data/rc и results/rc_analysis.json

Названия результатов в третьем столбце отсчитываются от каталога revision2. Программы создают данные математических моделей; наличие CSV-файла не превращает синтетическую запись в лабораторную. Команды запуска и требования к программному окружению приведены в сопроводительной инструкции к расчётам.

Программы повторяют вычислительные опыты и сохраняют результаты в соответствующих файлах. Отдельная программа book/study_v02.py воспроизводит серию из 460 реализаций; её запуск занимает больше времени.

Точность повторения и проверка поиска

Начальные состояния генераторов, параметры шума и порядок получения данных записаны в программах. При другом окружении последние цифры линейной алгебры и оптимизации могут отличаться. Поэтому проверка должна сопоставлять выбранную пару, физические единицы, границы ограничений и указанную численную точность, сохраняя исходный результат для сравнения.

Отдельная проверка поиска воспроизводит исходные три набора данных по сохранённым seed и порядку генерации. Проверяются все 2016 пар с ограниченной скалярной минимизацией на [0; 3] и обоими концами интервала. Выбранные пары совпадают с быстрым поиском; различие оценок силы меньше 10^{-7} $с^{-1}$. Две записи совпали с прежними численными разностями до приведённых цифр, в первой последние цифры изменились. Оба результата сохраняются с указанием условий численного расчёта.

Проверка касается названных данных. Она не является доказательством глобальной оптимальности поиска для любой возможной шумовой реализации. В новых исключающих выводах используются матричные границы, а локальная подгонка отдельно предоставляет допустимые численные примеры.

Повторный анализ временных файлов

Режим generate создаёт записи и отдельный ключ истины. Режим analyse обрабатывает существующие файлы и общую калибровочную информацию без чтения ключа. Полный режим all заново генерирует синтетические CSV, выполняет анализ, затем раскрывает разметку и строит рисунки. Поэтому для собственных записей следует использовать analyse и отдельно указанный каталог данных; режим all предназначен для повторения демонстрации. Формат и аппаратную ковариацию собственных записей необходимо определить по приложению Д.

В физическом эксперименте один seed не обеспечивает воспроизводимость. Потребуются схема соединений, версии прошивки, режимы возбуждения, исходные калибровки, временные метки и неизменённые записи. Приложение Д описывает достаточный набор для первого малого стенда. Файлы синтетического комплекта служат образцом обработки и формата.

Приложение В
Карта проверяемых утверждений

Результат и условие его применения

Таблица связывает основные результаты с их статусом и данными, которые способны изменить вывод. Она предназначена для повторного чтения. Подробные предпосылки, нормировки и схемы опыта находятся в соответствующих главах.

Утверждение	Статус и предпосылка	Проверка или ограничение
Спектральный показатель не определяет структуру однозначно	Точный трёхузловой пример главы 2	Одинаковые спектры и разные K_{11} вычисляются непосредственно
Дрейф способен имитировать слабую новую связь	Построенный пример при ±2% и заданном шуме	Предъявлены все веса и допустимая подгонка Hcal
Калибровочный класс можно исключить без глобальной подгонки	Матричные оболочки и одновременные интервалы при заданных границах и распределении ошибок	Изменение калибровочного интервала или ковариации требует пересчёта
Второй зонд способен уменьшить множество пар	Два известных оператора, регистрация узлов и заданная связь амплитуд	Масштабированный дубль и разные истинные пары проверяются отдельно
Ложное согласие выявляется дополнительным контролем	Зафиксированная после разработки схема; четыре условных класса по 24 реализации	Другие пары и помехи требуют новой проверки, универсальная частота не оценена
Отклик RC-сети извлекается из временных файлов	Синтетический стенд с заданной нагрузкой и ковариацией	Физическая сборка должна проверить модель считывания и дрейфа
Компактная модель предсказывает лестницу статических и динамических вкладов	Выбранный скалярный оператор и связь с источниками	Обычный посредник и экспериментальные пределы сравниваются в тех же параметрах
Смешанный часовой сигнал имеет вычисляемую геометрию	Заданное пространственное ядро, полоса и фильтры	Совпадение с полем и средовой помехой может требовать дополнительного канала
Часовой градиент не определяет кривизну	Точный пример Риндлера	Тензор кривизны равен нулю при ненулевом градиенте хода часов
Интерферометр обладает частотными провалами	Выбранная плоская TT-волна и режим свободных зеркал	Иная оптика или механика требует другой передаточной функции

Геометрическая интерпретация сигнала требует определённой физической модели и проверки доступных альтернатив.

Приложение Г
Словарь основных понятий

Понятия для повторного чтения

Внутренняя геометрия. Описание расстояний, углов и кривизны средствами самого исследуемого пространства. Оно не требует предполагать внешнее пространство, внутри которого данная геометрия якобы расположена.

Геодезическая. Локально выделенная линия геометрии, определяемая метрикой и соответствующим уравнением движения. На сфере геодезическими служат дуги больших окружностей; геодезическая не обязана быть глобально кратчайшим путём между любыми двумя её точками.

Кривизна. Характеристика отклонения геометрии от локально плоской структуры на конечных областях. Её можно исследовать через перенос направлений, поведение геодезических и измерение расстояний, не рассматривая изгиб поверхности извне.

Топология. Свойства связности и глобального устройства пространства, сохраняющиеся при непрерывных деформациях подходящего типа. Топология отличается от конкретных значений расстояний и углов.

Компактное направление. Пространственное направление, описываемое компактным многообразием. В простейшей рассматриваемой модели оно замыкается в окружность конечного радиуса. Малый радиус способен сделать её дополнительные моды недоступными низкоэнергетическому наблюдению.

Синтетическое измерение. Организованный набор внутренних состояний или управляемых параметров, в котором взаимодействия воспроизводят математическую структуру дополнительного направления. Его реализация в приборе сама по себе не увеличивает число координат окружающего пространства.

Спектральная размерность. Показатель масштабирования теплового следа или другого строго определённого спектрального объекта. Его значение зависит от геометрии, оператора распространения и выбранного диапазона масштабов.

Лапласиан сети. Матрица, составленная из интенсивностей связей между узлами. Для симметричной сети с положительными весами она описывает диффузионный обмен, имеет неотрицательный спектр и сохраняет однородный режим.

Резольвента. Обратная матрица или оператор вида $(L+sI)^{-1}$. Она связывает структуру динамического оператора с измеряемым преобразованным откликом.

Ранг. Число линейно независимых направлений в образе матрицы. В рассматриваемой модели ограниченное число независимых добавлений задаёт верхнюю границу ранга изменения отклика. Обратный вывод в общем случае неверен: малый наблюдаемый ранг не устанавливает число скрытых возмущений и не равен числу физических измерений.

Редукция Крона. Исключение внутренних узлов линейной сети посредством дополнения Шура. Снаружи редуцированная сеть может иметь связи, которые не соответствуют непосредственным соединениям исходной системы.

Изоспектральность. Совпадение спектров двух операторов или геометрических объектов. Разные формы могут быть изоспектральны, поэтому набор резонансов не всегда определяет геометрию однозначно.

Идентифицируемость. Возможность однозначно определить свойство или параметр внутри указанного класса моделей по доступным данным. Она зависит от измерительной схемы и предпосылок, а не только от точности численного алгоритма.

Калибровка. Определение связи между зарегистрированными величинами и физическим воздействием, включая неопределённости этой связи. Неизвестная ошибка калибровки может имитировать изменение исследуемой системы.

Нулевая модель. Описание, относительно которого проверяется необходимость дополнительного эффекта. Она должна включать релевантные известные сигналы и шумы, а не только идеализированное отсутствие любого движения.

Спектральная плотность. Распределение мощности или ковариации сигнала по частоте при выбранном соглашении о преобразовании. Её нельзя сравнивать с амплитудой без учёта единиц и частотной полосы.

Ретардированный отклик. Изменение наблюдаемой величины после приложенного воздействия с учётом причинного порядка. Оно отличается от корреляции двух величин в подготовленном состоянии.

Пассивность. Свойство системы, которая не выдаёт больше энергии, чем получила или имела в запасе, при оговорённых входах и выходах. В аналоговом приборе она помогает исключить самовозбуждение как источник ложного сигнала.

Фальсифицируемость. Наличие результатов наблюдения, несовместимых с утверждением при заранее обозначенных условиях. Возможность объяснить любой исход добавлением свободных параметров ослабляет проверяемость.

Область применимости. Набор масштабов, состояний и режимов, в которых используемое описание обосновано. Удачная модель внутри этой области не получает автоматически права описывать всю природу.

Измерительный контраст. Заранее заданное сочетание показаний, выбранное для проверки конкретного различия моделей. В матричном опыте $a^{T}Ga$ соответствует возбуждению и считыванию по одному нормированному пространственному профилю.

Порядок Лёвнера. Сравнение симметричных матриц по знаку всех их квадратичных форм. Позволяет ограничивать целый класс операторов и их обратных матриц без перебора каждого допустимого веса.

Внешняя область совместимости. Набор необходимых условий, содержащий все данные заданного класса при принятых ошибках. Попадание в эту область не гарантирует существования одной модели, которая одновременно воспроизводит все её координаты.

Численное свидетельство совместимости. Конкретные параметры внутри допустимых границ, для которых точный прямой расчёт согласуется с данными по установленному правилу. Отсутствие такого результата у локального оптимизатора не является доказательством отсутствия решения.

Когерентность. Нормированная величина, построенная из смешанного спектра двух сигналов и их автоспектров. Характеризует согласованность в выбранной частотной полосе. Высокое значение не определяет физическую причину и не заменяет оценку амплитуды сигнала.

Совместная ковариация. Матрица ошибок нескольких оценок с учётом их взаимной зависимости. Особенно существенна, когда разные преобразования рассчитаны из одной временной записи.

Отложенное измерение. Данные, которые не использовались для определения проверяемых параметров. Его значение зависит от чувствительности к различию конкурирующих предсказаний, а не только от независимости шума.

Слепой контроль. Организация опыта, при которой проверяемое изменение скрыто от процедуры принятия решения до фиксации результата. Синтетическое разделение генератора и анализа проверяет логику обработки; аппаратный слепой опыт дополнительно требует независимого назначения изменений.

Приложение Д
Практикум от напряжения к восстановлению связи

Задача и файлы измерения

Задача практикума - по временны́м записям четырёхузловой электрической цепи проверить, достаточно ли обычных связей с допустимым дрейфом. Даны три набора напряжений с буквенными метками. Анализ использует одинаковые заранее записанные правила. После его завершения отдельный файл раскрывает конфигурацию, породившую каждую запись. Это программное разделение данных и разметки; все сигналы сгенерированы, физическая установка в данном опыте не использовалась.

Проводимости обычных рёбер 0-1, 1-2 и 2-3 выражены как w_e/R_0, где R_0=100 кОм и $0{,}98 \le w_e \le 1{,}02$. Равные ёмкости C_0=100 нФ дают номинальную интенсивность $\kappa = 1/(R_0 C_0) = 100$ $с^{-1}$. Под дополнительной связью понимается одно из рёбер 0-2, 0-3 или 1-3. Его интенсивность допускается в пределах от 0 до 60 $с^{-1}$. В контрольной конфигурации внесена связь 0-3 интенсивностью 20 $с^{-1}$.

Файл или каталог	Содержание
revision2/data/rc/calibration.json	Номиналы, матрица начальных напряжений, нагрузка, шаг, окно, шум и правило решения
sample_A_source_0.csv и аналогичные	Время и четыре напряжения для одной начальной подготовки
revision2/data/rc/truth_key.json	Истинные параметры и seeds; анализ этот файл не читает
revision2/results/rc_analysis.json	Оценки G, полная ковариация, подгонки и решение без разметки
revision2/results/rc_validation.json	Сравнение с истинным откликом после раскрытия разметки

Всего представлены 12 CSV: три набора по четыре подготовки. Заголовок каждого файла одинаков: time_s,v0_V,v1_V,v2_V,v3_V. В нём 5001 строка отсчётов от 0 до 0,25 с с шагом 0,00005 с. Номер source означает подготовленное состояние, номер v - наблюдаемый узел. Такое разделение предотвращает путаницу между строкой и столбцом матрицы отклика.

Матрица W в калибровке измеряется в вольтах. Её j-й столбец равен фактическому начальному вектору для подготовки j. Диагональные элементы близки к 1 В; соседние элементы равны 0,0015 В. Остальные равны нулю. Небольшое смешение намеренно включено в задачу, чтобы обработка не зависела от предположения об идеальном одиночном заряде.

Подготовка и физическая схема

Для аппаратного исполнения используются четыре конденсатора относительно общего провода и три сменных резистора, как на рисунке 54. Каждый узел имеет отдельный канал напряжения. Желателен одновременный отсчёт; если применяется мультиплексор, его задержки входят в временную сетку каждого канала и учитываются до интегрирования. Входные сопротивления и паразитные ёмкости измеряются вместе с подключёнными кабелями.

Перед записью низкоомные источники удерживают заданные напряжения четырёх узлов. Затем все источники отсоединяются общим событием запуска, а высокоомные измерители продолжают наблюдение. Начальные напряжения следует определять повторной калибровкой в том же режиме переключения. Идеальное состояние e_j не требуется: достаточно четырёх хорошо различимых столбцов W. Важна воспроизводимость этих столбцов и независимая оценка их ошибки.

Прямое соединение только одного узла с источником при оставленной свободной сети не создаёт требуемое начальное состояние: напряжение успевает перейти на соседей. Поэтому выбирается либо синхронное удержание всех узлов, либо измерение фактически получившегося полного вектора. Размыкание ключей должно быть быстрее существенной сетевой динамики, а переходный выброс - записан или включён в W. Если запись начинается позже, новое начало отсчёта и соответствующее W определяются согласованно.

Восстановление между опытами выполняется активным сбросом всех узлов к общему проводу. Естественного ожидания здесь недостаточно: у идеальной незаземлённой сети сохраняется общий заряд, а нагрузка 1 ГОм даёт время утечки около 100 с. Перед следующей подготовкой проверяют остаточные напряжения. После каждой серии возвращаются к исходной конфигурации, чтобы отделить изменение соединения от медленного дрейфа.

Последовательность переключений и непрерывность высокоомного наблюдения показаны на рисунке 59.

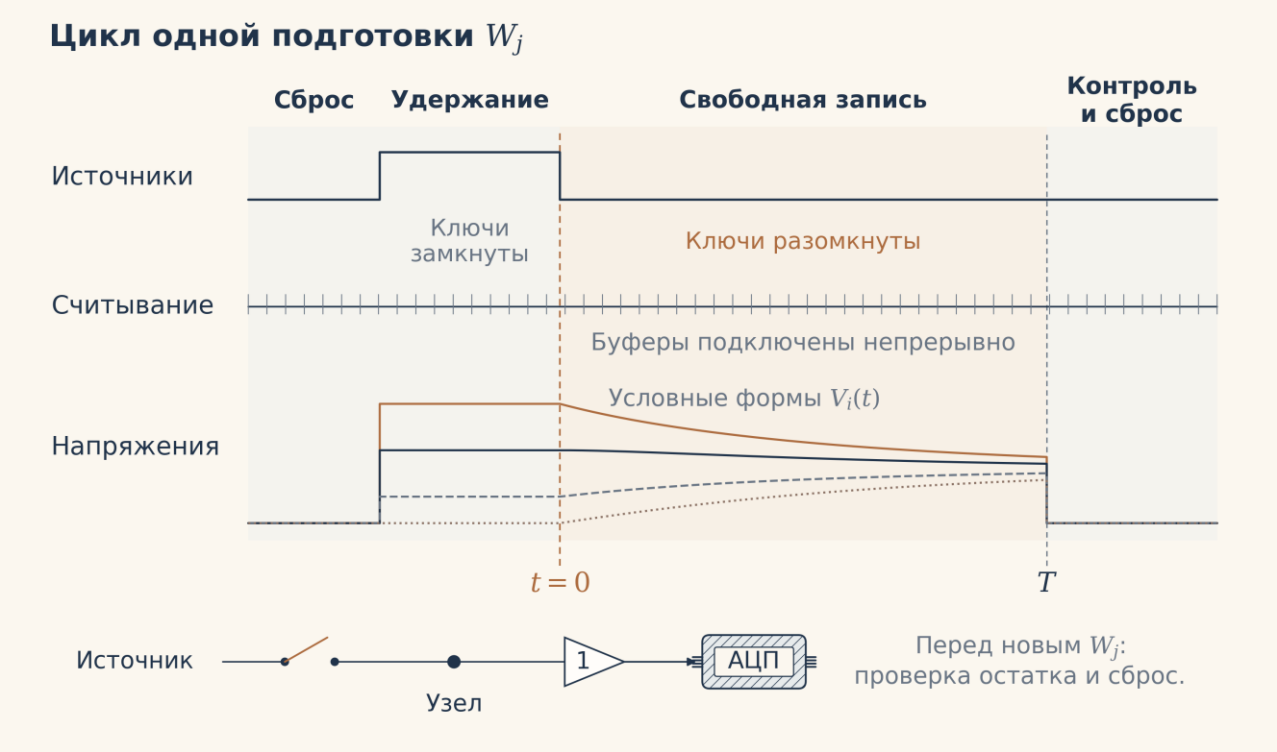


Рисунок 59. Цикл включает активный сброс, одновременное удержание четырёх начальных напряжений, общее отсоединение источников при t = 0 и запись свободной динамики. Буферы и АЦП остаются подключёнными. Затем проверяют остаточные напряжения и сбрасывают все узлы перед следующей подготовкой. Формы V_i(t) условны: они рассчитаны для иллюстративного начального вектора номинальной цепи и не подменяют приложенные CSV. Продолжительность подготовки и сброса не задана численно. Естественное ожидание не заменяет активного удаления общего заряда.

Параметр	**В данном расчёте**	**Что требуется при физическом переносе**
R_0 и C_0	100 кОм и 100 нФ	Измеренные значения и их неопределённости
Нагрузка входа	1 ГОм в каждом узле	Проверка сопротивления, смещения и входной ёмкости
Матрица подготовок W	Задана точно, cond(W)=1,0049	Повторная оценка после переключения
Шаг и окно	50 мкс и 0,25 с	Калибровка временной шкалы и задержек
Случайная ошибка отсчёта	0,2 мВ, независимый гауссов шум	Измерение спектра и межканальной ковариации

Если фактические ёмкости заметно различаются, следует использовать оператор $C^{-1}K$ и его симметричную форму из (13.3). Одной смены числа C_0 в программе недостаточно. Для данного практикума равенство ёмкостей является проверяемой предпосылкой: файл расчёта

задаёт её точно, а аппаратный протокол обязан либо подтвердить её с нужной погрешностью, либо расширить модель.

От матрицы напряжений к нормированному отклику

Обозначим через Y(t) матрицу зарегистрированных напряжений: её столбцы соответствуют четырём подготовкам. При известной одинаковой нагрузке γ и без случайной ошибки Y(t)=exp[−(L+γI)t]W. Умножение справа на W^{-1} удаляет смешение подготовок; множитель exp(γt) возвращает незагруженную сетевую динамику. В численном примере γ=1/(RinC$_0$)=0,01 $с^{-1}$.

$$\widehat{\mathbf{E}}(t) = e^{\gamma t}\mathbf{Y}(t)\mathbf{W}^{-1}, \qquad \mathbb{E}\widehat{\mathbf{E}}(t) = e^{-t\mathbf{L}} \qquad (Д.1)$$

Нормированный отклик E безразмерен. Его интеграл с весом exp(−st) имеет единицы времени. Параметр s здесь вещественный и положительный; он задаёт затухание веса интеграла и не является частотой синусоидального возбуждения в герцах. Для токового измерения при нулевых начальных условиях та же связь имеет вид:

$$\mathbf{H}_{VI}(s) = (s\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}, \qquad \mathbf{G}(s) = C_0\mathbf{H}_{VI}(s), \qquad [H_{VI}] = \Omega,\ [G] = \text{s} \qquad (Д.2)$$

В этой формуле K относится к выбранной незагруженной сети. Если токовый отклик измерен с одинаковой входной нагрузкой γ, то HVI,meas(s)=G(s+γ)/C$_0$. Для восстановления исходного G требуется сдвиг аргумента: G(s)=C$_0$HVI,meas(s−γ), при используемых здесь s>γ. В методе начального состояния этот же сдвиг реализован весом exp[−(s−γ)t].

Если оператор учебной сети записан с единичной интенсивностью обычного ребра, а физический макет имеет интенсивность κ, то Lphys=κLunit. Вместе с ним масштабируются s и вся матрица отклика. Например, числу sunit=0,2 соответствует 20 $с^{-1}$ при κ=100 $с^{-1}$; физический G в сто раз меньше значения, вычисленного в единицах времени исходной сети.

$$\mathbf{L}_{\text{phys}} = \kappa\mathbf{L}_{\text{unit}}, \qquad s_{\text{phys}} = \kappa s_{\text{unit}}, \qquad \mathbf{G}_{\text{phys}}(\kappa s) = \kappa^{-1}\mathbf{G}_{\text{unit}}(s) \qquad (Д.3)$$

Нормировка на эталон также требует дисциплины. Здесь G оценивается по абсолютным напряжениям, а номинальная матрица G$_0$ вычисляется по калибровочной модели. Поэтому ΔG=G−G$_0$ имеет ту же ковариацию случайной ошибки, что G. Если G$_0$ получено отдельной шумной записью, её ковариация добавляется; при общих калибровочных параметрах появляются перекрёстные члены. Неопределённость эталона нельзя убрать простым вычитанием.

Полная последовательность обработки и отделённая от неё ветвь раскрытия контрольного ключа приведены на рисунке 60.

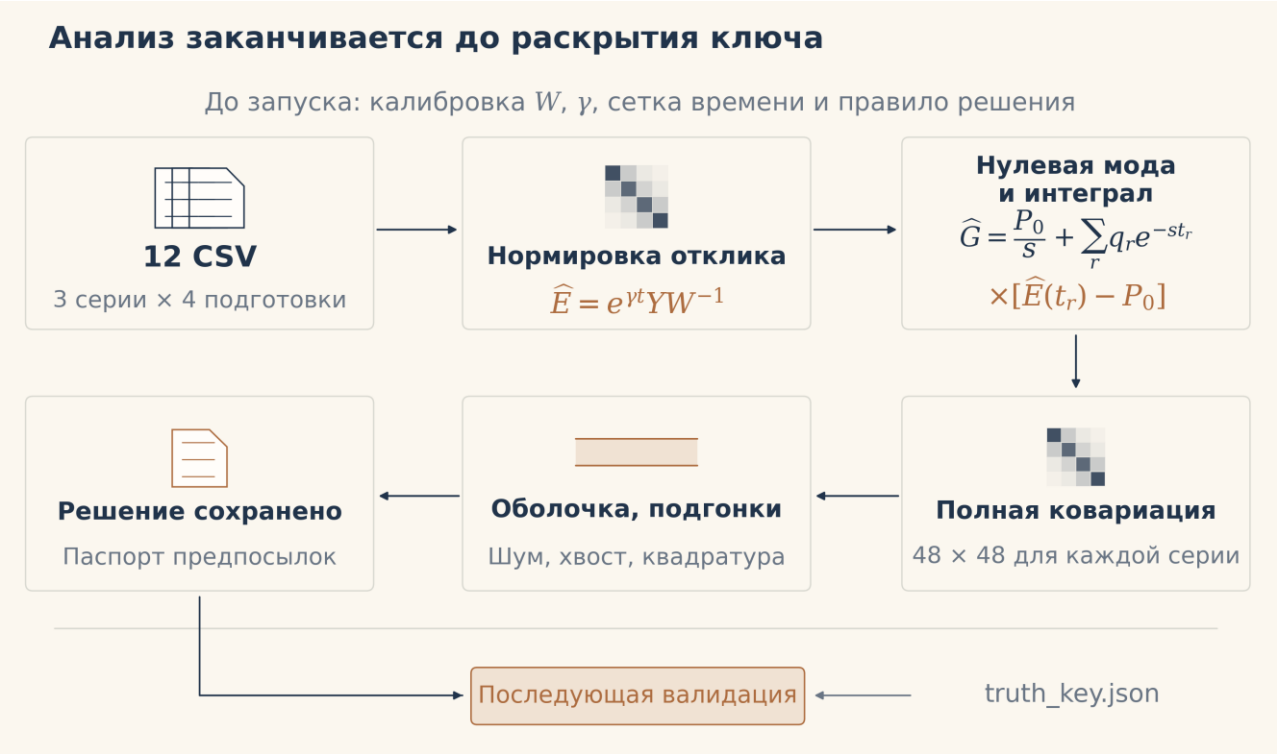


Рисунок 60. Калибровка и правило решения задаются до анализа двенадцати CSV. Из напряжений восстанавливают нормированный отклик, вычитают известную нулевую моду перед численным интегрированием и возвращают её аналитически как P_0/s. Полная ковариация связывает матричные элементы и три значения s из одних записей. Затем проверяют калибровочную оболочку, учитывают хвост и квадратуру, выполняют диагностические подгонки и сохраняют решение. Файл truth_key.json поступает только в последующую валидацию; обратного пути в анализ нет.

Почему конечного окна достаточно

Интеграл до конечного T отличается от резольвенты. Для известного линейного оператора смещение имеет точную форму:

$$\mathbf{G}_T(s) = \int_0^T e^{-st}\, e^{-t\mathbf{L}}\, dt = \mathbf{G}(s)\left[\mathbf{I} - e^{-(s\mathbf{I}+\mathbf{L})T}\right] \qquad (Д.4)$$

У связного незаземлённого графа есть известная нулевая мода: одинаковое напряжение во всех узлах. Её проектор $P_0=11^T/4$ не затухает. Поэтому полное напряжение не следует просто обрезать в конце короткого окна. В данном опыте общий компонент вычитается перед интегрированием и добавляется обратно аналитически как P_0/s. Интегрировать остаются только затухающие неоднородные моды.

$$\widehat{\mathbf{G}}(s) = \frac{\mathbf{P}_0}{s} + \sum_{r=0}^{M} q_r\, e^{-st_r}\left[\widehat{\mathbf{E}}(t_r) - \mathbf{P}_0\right] \qquad (Д.5)$$

Веса q_r - веса составной формулы Симпсона: h/3 на концах, 4h/3 на нечётных внутренних узлах и 2h/3 на чётных. Число интервалов равно 5000. Первый ненулевой собственный

показатель номинальной цепи равен 58,5786 с⁻¹, наибольший - 341,4214 с⁻¹. Если обычные веса ограничены снизу числом 0,98, затухание неравномерных мод гарантировано не медленнее 57,4071 с⁻¹.

Для выбранного контраста с единичной нормой и нулевой суммой компонент абсолютный хвост при гипотезе обычных связей ограничен exp[−(s+0,98λ₂)T]/(s+0,98λ₂). При s=20 с⁻¹ он не превышает 5,10 × 10⁻¹¹ с. Консервативная граница ошибки формулы Симпсона составляет 1,60 × 10⁻¹⁰ с. Обе величины намного меньше стандартной случайной ошибки контраста 2,36 × 10⁻⁷ с.

$$\varepsilon_{\mathrm{tail}} \le \frac{e^{-(s+0.98\lambda_2)T}}{s+0.98\lambda_2}, \qquad \varepsilon_{\mathrm{quad}} \le \frac{Th^4}{180}(s+1.02\lambda_{\max})^4 \qquad (Д.6)$$

Граница квадратуры относится к нулевой гипотезе с ограниченными обычными проводимостями: её скалярный интегранд является положительной смесью затухающих экспонент. Ошибки хвоста и квадратуры добавляются к допуску при проверке этой гипотезы. Для конкретной внесённой связи программа дополнительно сравнивает обработку чистой записи с точной обратной матрицей. Норма детерминированной ошибки там составляет около 6,9 × 10⁻¹² с.

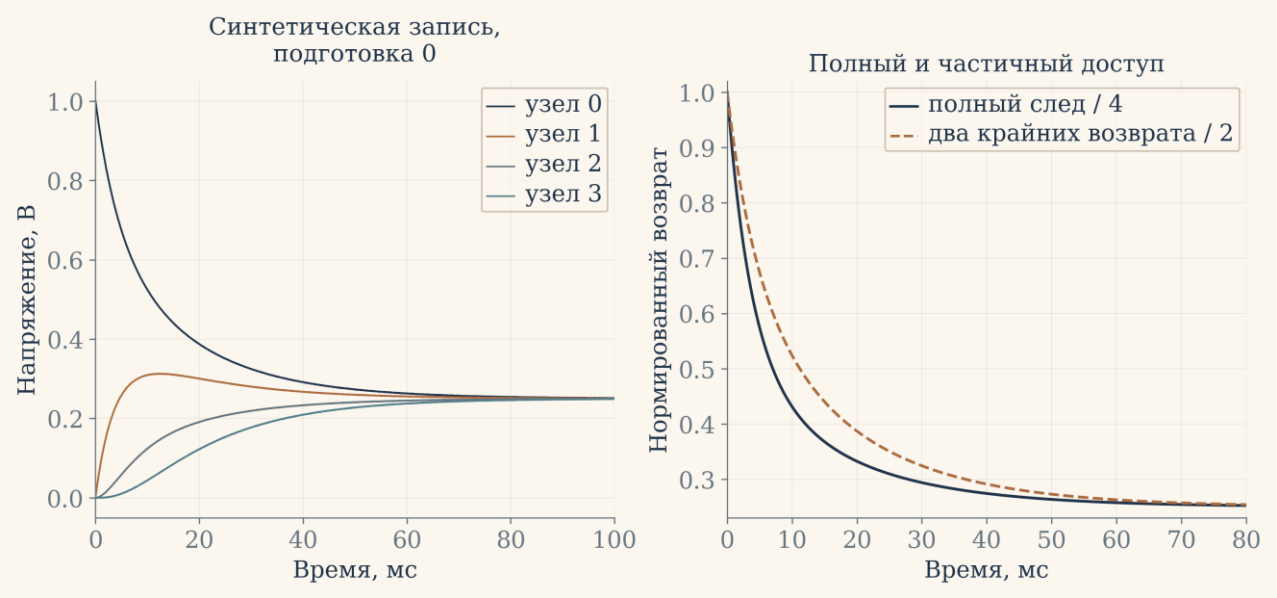


Рисунок 61. Слева - синтетические напряжения четырёх узлов после подготовки 0 в эталонной цепи. Справа - полный нормированный тепловой след и среднее двух крайних возвратов для чистого незагруженного оператора. Частичное наблюдение даёт другую функцию, хотя в обоих случаях используется та же сеть.

На левой панели рисунка 61 напряжения приближаются к общей компоненте около четверти вольта. Восстановление G сохраняет её аналитический вклад. На правой панели видно, почему два доступных возврата нельзя называть полным тепловым следом. В эталонной цепи максимальное абсолютное различие этих функций около 0,102; оно вызвано неполным доступом, а не шумом.

Ковариация из одной временной записи

Пусть каждая исходная ошибка напряжения независима по времени, каналу и подготовке и имеет дисперсию σV^2. После обращения W ошибки разных восстановленных столбцов связаны, а после интегрирования связаны также разные s. Чтобы сохранить обе зависимости, удобно обозначить $M=W^{-1}$ и $a_r(s)=q_r\exp[-(s-\gamma)t_r]$. Тогда ковариация отдельных элементов имеет вид:

$$\operatorname{Cov}\left[\hat{G}_{ij}(s),\hat{G}_{kl}(s')\right]=\delta_{ik}\sigma_V^2\left(\mathbf{M}^{\mathsf{T}}\mathbf{M}\right)_{jl}\sum_r a_r(s)a_r(s') \qquad (Д.7)$$

Вектор наблюдений содержит 48 элементов: три значения s по 16 направленным элементам матрицы. Программа строит ковариацию размера 48×48 в порядке «s, наблюдаемый узел, подготовка». Она положительно определена для данного набора весов и обратимой W. Для расчёта χ^2 используется разложение Холецкого, так что остаток сравнивается с шумом в согласованных единицах.

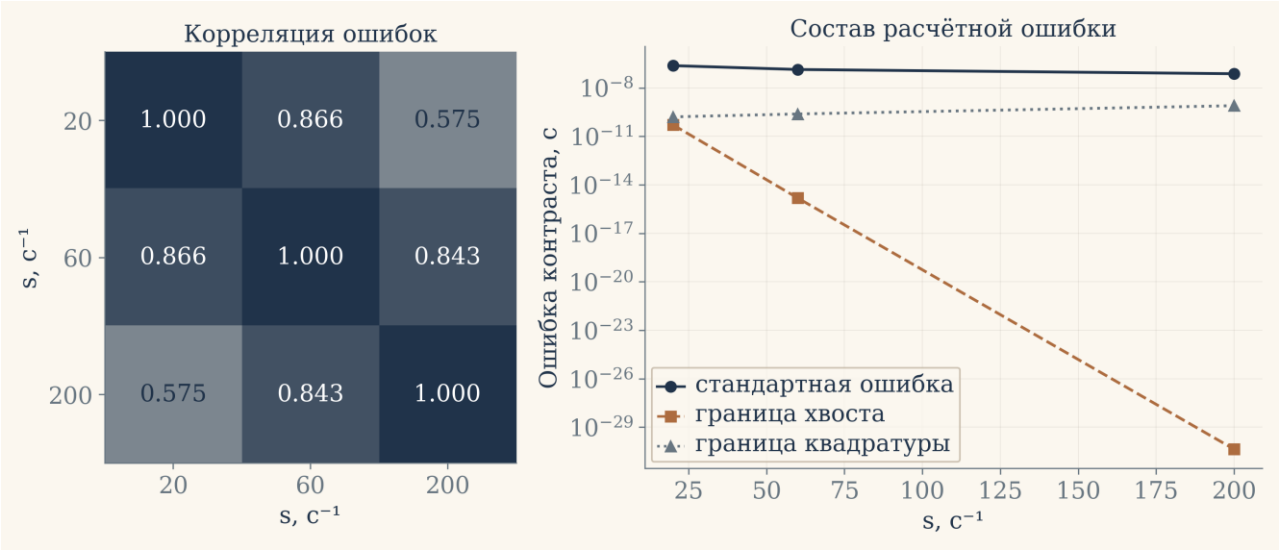


Рисунок 62. Слева - корреляции случайных ошибок лапласовских интегралов из одной записи при s=20,60,200 $с^{-1}$. Справа - стандартная ошибка выбранного контраста, консервативные границы хвоста и квадратуры. Последние рассчитаны при гипотезе обычных проводимостей в пределах ±2%.

Корреляция на рисунке 62 остаётся высокой даже для разнесённых значений s. Если удалить недиагональные элементы, прежние записи будут ошибочно считаться более независимыми. Разделение интегралов одной осциллограммы на «обучающие» и «проверочные» само по себе не создаёт независимых шумов. Для такой проверки нужна отдельная запись либо условное распределение с учётом полной ковариации.

Для реальной окрашенной помехи формула (Д.7) заменяется переносом измеренной ковариации исходных отсчётов через тот же линейный оператор. Если W, γ или коэффициенты усиления тоже оцениваются с ошибкой, они добавляют отдельные члены или становятся параметрами допустимой модели. Приложенная программа фиксирует их точно, чтобы отдельно проверить вычисление и использование корреляций одного временного ряда.

Предварительно заданная калибровочная оболочка

Нулевая гипотеза Hcal допускает любую комбинацию трёх обычных весов в пределах 0,98-1,02. Она не требует независимости их дрейфа. Поскольку каждое ребро добавляет положительную полуопределённую матрицу, из границ весов следует порядок операторов. Обращение положительно определённых матриц меняет направление неравенства:

$$0.98\mathbf{L}_0 \preccurlyeq \mathbf{L} \preccurlyeq 1.02\mathbf{L}_0 \quad \Rightarrow \quad (s\mathbf{I} + 1.02\mathbf{L}_0)^{-1} \preccurlyeq \mathbf{G}(s) \preccurlyeq (s\mathbf{I} + 0.98\mathbf{L}_0)^{-1} \qquad (Д.8)$$

Для заранее выбранного a=(1,0,0,−1)/√2 матричное неравенство даёт интервал для z=a^{T}Ga. При s=20 $с^{-1}$ границы равны 0,01110051757 и 0,01143981347 с. Они покрывают весь допустимый класс обычных проводимостей, включая согласованный дрейф всех трёх рёбер. В этом состоит отличие такой проверки от неудачи одного численного оптимизатора.

Ошибка z вычисляется из той же полной ковариации. В данном наборе σz=2,3572 × 10^{-7} с. К интервалу с каждой стороны добавлены 5σz и две детерминированные границы (Д.6); общий запас равен 1,1788 × 10^{-6} с. Для одного заранее выбранного гауссова контраста запас в пять стандартных отклонений имеет известный хвостовой смысл. Здесь он служит определённым правилом учебного опыта, а не заявлением об уровне значимости широкого поиска по множеству геометрий.

Выход за расширенный интервал отвергает Hcal при заданных предпосылках. Он не доказывает единственность дополнительного ребра среди всех возможных физических причин: неизвестная ёмкость, нелинейность, неправильная временная шкала или неучтённая нагрузка относятся к другим альтернативам. Поэтому решение сопровождается паспортом включённых параметров. Попадание внутрь интервала означает только, что данная оболочка не отвергла класс. Для совместимости всех наблюдений дополнительно требуется найти один общий допустимый вектор весов. В записях B и C такой вектор найден; абсолютное отсутствие новых связей из этого не следует.

Подгонка и раскрытие контрольных конфигураций

Дополнительно выполняется нелинейная подгонка Hcal по всем 48 значениям и по три подгонки Hcal+edge для кандидатов 0-2, 0-3, 1-3. Обычные веса в обоих классах имеют одинаковые границы. Интенсивность дополнительного ребра неотрицательна. В качестве целевой функции используется квадрат нормы остатка, отбелённого полной ковариацией. Успешная подгонка демонстрирует совместимость найденных параметров; глобальное исключение локального класса опирается на оболочку, а не на статус решателя.

$$\chi^2(\theta) = (\widehat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta))^{\mathsf{T}} \mathbf{C}_G^{-1} \big(\widehat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta)\big) \qquad (Д.9)$$

Для найденного вектора параметров проверяется попадание в совместный 99-процентный шумовой эллипсоид размерности 48. Из числа измерений не вычитаются подогнанные параметры: здесь строится область допустимого вектора среднего, а не тест улучшения расширенной модели. Радиус равен корню из соответствующего квантиля χ^2 с 48 степенями

свободы плюс консервативная граница отбелённого смещения интеграла. Для локального класса получается около 8,64, для разрешённого добавочного ребра - 8,72. Наличие такой точки является вычисленным свидетельством совместимости. Если решатель её не нашёл, это само по себе не доказывает, что её нет.

Для записи A локальная модель достигает $\chi^2/48 \approx 5{,}87 \times 10^6$, а модель со связью 0-3 даёт 0,871. Обычные веса в расширенной подгонке равны примерно 1,010048; 0,990024; 1,005033. Оценка дополнительной интенсивности составляет 19,9974 $с^{-1}$. После раскрытия разметки выясняется, что внесены веса 1,01; 0,99; 1,005 и интенсивность 20 $с^{-1}$. Пример намеренно выбран хорошо различимым.

Запись B получена от номинальных весов 1;1;1. Её локальная подгонка даёт $\chi^2/48=1{,}028$. В записи C внесены веса 1,015;0,985;1,01 без нового ребра; значение $\chi^2/48=1{,}149$. В обоих случаях малое дополнительное положительное ребро иногда слегка уменьшает остаток, но правило не объявляет его необходимым. Это показывает, почему всегда выбирать расширенную модель только по меньшему χ^2 было бы неверной процедурой.

Проверка после раскрытия	**A**	**B**	**C**
Относительная ошибка всей G по норме Фробениуса	0,00186%	0,00222%	0,00197%
Максимальная абсолютная ошибка элемента G	$4{,}61 \times 10^{-7}$ с	$4{,}35 \times 10^{-7}$ с	$4{,}41 \times 10^{-7}$ с
$\chi^2/48$ лучшей модели с дополнительным ребром	0,871	1,027	1,149
Глобальная оболочка Hcal	Нарушена	Соблюдена	Соблюдена

Это три проверочные реализации, а не статистическая оценка частоты ошибок всего алгоритма. Seeds и полные исходные параметры сохранены, чтобы повторить конкретный расчёт. Для оценки рабочего диапазона следует заранее задать серии по амплитуде связи, неопределённости ёмкостей, загрузке и шуму. Граница такого диапазона будет свойством выбранного макета и процедуры измерения.

Полный след и наблюдаемые порты

Тепловой след полного N-узлового оператора равен среднему N диагональных возвратов. Для его прямого измерения требуется подготовить и наблюдать каждый узел либо применить отдельно обоснованный метод оценки следа. В четырёхузловом практикуме полный доступ существует, поэтому обе функции на правой панели рисунка 61 вычисляются однозначно.

$$P(t) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} E_{ii}\,(t), \qquad P_{\{0,3\}}(t) = \frac{1}{2}\left[E_{00}(t) + E_{33}(t)\right] \qquad (Д.10)$$

Если доступны только крайние порты, измеряется вторая функция. Она сильнее взвешивает моды, заметные на концах цепи, и потому имеет другую временную зависимость. Её логарифмический наклон можно описывать как показатель выбранного наблюдаемого возврата, но без дополнительного обоснования он не равен спектральной размерности полного оператора.

Даже полный след четырёх узлов не обеспечивает широкого степенного диапазона. При очень малом времени проявляется дискретность, при большом остаётся нулевая мода и $P \to 1/4$. Главная задача малого опыта - восстановить известную динамику и проверить измерительные преобразования. Переход к 64 узлам с восемью портами сохраняет матричную процедуру наблюдаемого блока, но не даёт автоматически всего теплового следа.

Порядок калибровки и независимые повторения

Сначала проверяется одна RC-цепь: постоянная времени, полярность, масштаб напряжения и ошибка времени. Затем подключаются четыре узла без дополнительного ребра. Измеряются фактические ёмкости с учётом входов, проводимости и токи утечки. Несколько повторений подготовки дают среднюю W и её изменчивость. Если калибровочная ошибка сопоставима с искомым эффектом, она включается в допустимую модель до обработки контрольных конфигураций.

Следующий проход выполняется с неподвижной схемой и нулевым возбуждением, чтобы оценить собственные смещения, шумовую полосу и общие помехи каналов. Затем записывается эталон при нормальной подготовке. Изменение полярности и амплитуды позволяет проверить линейность. Для каждого такого воздействия сравнивается именно предсказанный нормированный отклик; произвольная перенастройка коэффициентов после результата лишает проверку независимости.

Контрольная связь устанавливается оператором, который сохраняет разметку отдельно от анализатора. После серии полезно повторить исходное соединение. Если эталон изменился, последовательность сама показывает дрейф и даёт возможность ограничить его величину. Проверка на новом временном ряде использует новую подготовку и новую запись; дополнительные интегралы прежнего ряда остаются коррелированными данными.

При аппаратной приёмке к трём исполненным конфигурациям добавляются небольшое изменение одной ёмкости и увеличение входной нагрузки. Эти два дополнительных контроля специально выходят за узкий Hcal данного исполнимого примера. Правильная реакция процедуры состоит в обнаружении несоответствия и расширении аппаратной модели, а не в автоматическом присвоении любой аномалии новому ребру.

Воспроизведение и повторный анализ

Сопроводительный комплект позволяет повторить весь расчёт: создать синтетические записи, выполнить анализ без доступа к ключу, затем отдельно раскрыть разметку и построить рисунки. Команды и требования к вычислительной среде приведены в инструкции к расчётам.

При анализе собственных записей используются калибровочные сведения и наблюдаемые напряжения; ключ истинной разметки в расчёт не поступает. Файлы должны соблюдать указанную схему и предпосылки. Для цветного шума или неодинаковых ёмкостей требуется изменить соответствующую модель ковариации или динамики.

Полученный результат замыкает конкретную задачу: из отсчётов напряжения восстановлен отклик в секундах, рассчитана его совместная погрешность, проверен ограниченный локальный класс и найдено совместимое объяснение сильного контрольного сигнала. Следующая ступень состоит в замене синтетической калибровки измеренными параметрами. Именно тогда становятся проверяемыми обещания о точности физического устройства.

Литература

[1] Albert Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. 1916. DOI 10.1002/andp.19163540702. https://doi.org/10.1002/andp.19163540702

[2] Hermann Weyl. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). 1912. DOI 10.1007/BF01456804.
https://link.springer.com/article/10.1007/BF01456804

[3] Jan Ambjørn, Jerzy Jurkiewicz, Renate Loll. The Spectral Dimension of the Universe is Scale Dependent. 2005. DOI 10.1103/PhysRevLett.95.171301.
https://arxiv.org/abs/hep-th/0505113

[4] Luca Bombelli, Joohan Lee, David Meyer, Rafael D. Sorkin. Space-time as a causal set. 1987. DOI 10.1103/PhysRevLett.59.521.
https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.59.521

[5] J. Abajian, Steven Carlip. Dimensional reduction in manifoldlike causal sets. 2018. DOI 10.1103/PhysRevD.97.066007.
https://arxiv.org/abs/1710.00938

[6] Petr Hořava. Spectral Dimension of the Universe in Quantum Gravity at a Lifshitz Point. 2009. DOI 10.1103/PhysRevLett.102.161301.
https://arxiv.org/abs/0902.3657

[7] Oliver Lauscher, Martin Reuter. Fractal Spacetime Structure in Asymptotically Safe Gravity. 2005. DOI 10.1088/1126-6708/2005/10/050.
https://arxiv.org/abs/hep-th/0508202

[8] Oskar Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. 1926. DOI 10.1007/BF01397481.
https://link.springer.com/article/10.1007/BF01397481

[9] Michael Lohse, Christian Schweizer, Hannah M. Price, Oded Zilberberg, Immanuel Bloch. Exploring 4D quantum Hall physics with a 2D topological charge pump. 2018. DOI 10.1038/nature25000.
https://arxiv.org/abs/1705.08371

[10] Juan M. Maldacena. The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. 1998. DOI 10.1023/A:1026654312961.
https://arxiv.org/abs/hep-th/9711200

[11] Shinsei Ryu, Tadashi Takayanagi. Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT. 2006. DOI 10.1103/PhysRevLett.96.181602.
https://arxiv.org/abs/hep-th/0603001

[12] Mark Van Raamsdonk. Building up spacetime with quantum entanglement. 2010. DOI 10.1007/s10714-010-1034-0.
https://arxiv.org/abs/1005.3035

[13] Ryogo Kubo. Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems. 1957. DOI 10.1143/JPSJ.12.570.
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jpsj1946/12/6/12_6_570/_article/-char/en

[14] Elliott H. Lieb, Derek W. Robinson. The finite group velocity of quantum spin systems. 1972. DOI 10.1007/BF01645779.
https://www-thphys.physics.ox.ac.uk/talks/CMTjournalclub/sources/LR.pdf

[15] Ji-Seong Chae. Covariant holographic entanglement entropy inversion to reconstruct bulk geometry. 2026. DOI 10.1007/JHEP09(2026)251.
https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP09(2026)251

[16] Carolyn Gordon, David L. Webb, Scott Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. 1992. DOI 10.48550/arXiv.math/9207215.
https://arxiv.org/abs/math/9207215

[17] Florian Dörfler, Francesco Bullo. Kron Reduction of Graphs With Applications to Electrical Networks. 2013. DOI 10.1109/TCSI.2012.2215780.
https://arxiv.org/abs/1102.2950

[18] John Sylvester, Gunther Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. 1987. DOI 10.2307/1971291.
https://annals.math.princeton.edu/1987/125-1/p04

[19] Jack Sherman, Winifred J. Morrison. Adjustment of an Inverse Matrix Corresponding to a Change in One Element of a Given Matrix. 1950. DOI 10.1214/aoms/1177729893.
https://www.jstor.org/stable/2236561

[20] Sina Y. Caliskan, Paulo Tabuada. Kron Reduction of Generalized Electrical Networks. 2012. DOI 10.48550/arXiv.1207.0563.
https://arxiv.org/abs/1207.0563

[21] Jari Kaipio, Erkki Somersalo. Statistical inverse problems: Discretization, model reduction and inverse crimes. 2007. DOI 10.1016/j.cam.2005.09.027.
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042705007296

[22] Jan C. Willems. Dissipative dynamical systems part I: General theory. 1972. DOI 10.1007/BF00276493.
https://link.springer.com/article/10.1007/BF00276493

[23] Allan Adams, Nima Arkani-Hamed, Sergei Dubovsky, Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi. Causality, Analyticity and an IR Obstruction to UV Completion. 2006. DOI 10.1088/1126-6708/2006/10/014.
https://arxiv.org/abs/hep-th/0602178

[24] Patrick M. Lenggenhager и соавторы. Simulating hyperbolic space on a circuit board. 2022. DOI 10.1038/s41467-022-32042-4.
https://arxiv.org/abs/2109.01148

[25] Gianluca Calcagni, Astrid Eichhorn, Frank Saueressig. Probing the quantum nature of spacetime by diffusion. 2013. DOI 10.1103/PhysRevD.87.124028.
https://arxiv.org/abs/1304.7247

[26] Nima Arkani-Hamed; Savas Dimopoulos; Gia Dvali. The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter. 1998. DOI 10.1016/S0370-2693(98)00466-3.
https://arxiv.org/abs/hep-ph/9803315

[27] J. G. Lee; E. G. Adelberger; T. S. Cook; S. M. Fleischer; B. R. Heckel. New Test of the Gravitational $1/r^2$ Law at Separations down to 52 μm. 2020. DOI 10.1103/PhysRevLett.124.101101.
https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.124.101101

[28] Wen-Hai Tan; An-Bin Du; Wen-Can Dong; Shan-Qing Yang; Cheng-Gang Shao; Sheng-Guo Guan; Qing-Lan Wang; Bi-Fu Zhan; Peng-Shun Luo; Liang-Cheng Tu; Jun Luo. Improvement for Testing the Gravitational Inverse-Square Law at the Submillimeter Range. 2020. DOI 10.1103/PhysRevLett.124.051301. https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.124.051301

[29] Tobias Bothwell; Colin J. Kennedy; Alexander Aeppli; Dhruv Kedar; John M. Robinson; Eric Oelker; Alexander Staron; Jun Ye. Resolving the gravitational redshift across a millimetre-scale atomic sample. 2022. DOI 10.1038/s41586-021-04349-7. https://www.nature.com/articles/s41586-021-04349-7

[30] Xin Zheng; Jonathan Dolde; Matthew C. Cambria; Hong Ming Lim; Shimon Kolkowitz. A lab-based test of the gravitational redshift with a miniature clock network. 2023. DOI 10.1038/s41467-023-40629-8. https://www.nature.com/articles/s41467-023-40629-8

[31] Aaron Chou; Henry Glass; H. Richard Gustafson; Craig Hogan; Brittany L. Kamai; Ohkyung Kwon; Robert Lanza; Lee McCuller; Stephan S. Meyer; Jonathan Richardson; Chris Stoughton; Ray Tomlin; Rainer Weiss. The Holometer: An Instrument to Probe Planckian Quantum Geometry. 2017. DOI 10.1088/1361-6382/aa5e5c. https://arxiv.org/abs/1611.08265

[32] Jonathan W. Richardson; Ohkyung Kwon; H. Richard Gustafson; Craig Hogan; Brittany L. Kamai; Lee P. McCuller; Stephan S. Meyer; Chris Stoughton; Raymond E. Tomlin; Rainer Weiss. Interferometric Constraints on Spacelike Coherent Rotational Fluctuations. 2021. DOI 10.1103/PhysRevLett.126.241301. https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.126.241301

[33] B. Sharmila; Sander M. Vermeulen; Animesh Datta. Signatures of correlation of spacetime fluctuations in laser interferometers. 2026. DOI 10.1038/s41467-025-67313-3. https://www.nature.com/articles/s41467-025-67313-3

[34] Abhinav Patra; Lorenzo Aiello; Aldo Ejlli; William L. Griffiths; Alasdair L. James; Nikitha Kuntimaddi; Ohkyung Kwon; Eyal Schwartz; Henning Vahlbruch; Sander M. Vermeulen; Keiko Kokeyama; Katherine L. Dooley; Hartmut Grote. Broadband Limits on Stochastic Length Fluctuations from a Pair of Table-Top Interferometers. 2025. DOI 10.1103/61j9-cjkk. https://arxiv.org/abs/2410.09175

[35] Fabio Bergamin; Nikitha Kuntimaddi; Abhinav Patra; Stephanie Montoya; Moritz Mehmet; Katherine Dooley; Hartmut Grote; Henning Vahlbruch. A broadband squeezed light source for table-top interferometry. 2025. DOI 10.1088/1367-2630/ae2987. https://arxiv.org/abs/2508.08857

[36] Sander M. Vermeulen; Torrey Cullen; Daniel Grass; Ian A. O. MacMillan; Alexander J. Ramirez; Jeffrey Wack; Boris Korzh; Vincent S. H. Lee; Kathryn M. Zurek; Chris Stoughton; Lee McCuller. Photon-Counting Interferometry to Detect Geontropic Space-Time Fluctuations with GQuEST. 2025. DOI 10.1103/PhysRevX.15.011034. https://journals.aps.org/prx/abstract/10.1103/PhysRevX.15.011034

[37] Bruce Allen; Joseph D. Romano. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities. 1999. DOI 10.1103/PhysRevD.59.102001. https://arxiv.org/abs/gr-qc/9710117

[38] Johannes Nokkala; Jyrki Piilo; Ginestra Bianconi. Probing the spectral dimension of quantum network geometries. 2020. DOI 10.48550/arXiv.2005.09665. https://arxiv.org/abs/2005.09665

[39] Yanli Yuan; De Wen Soh; Xiao Yang; Kun Guo; Tony Q. S. Quek. Joint Network Topology Inference via Structured Fusion Regularization. 2021. DOI 10.48550/arXiv.2103.03471. https://arxiv.org/abs/2103.03471

[40] Madeline Navarro; Samuel Rey; Andrei Buciulea; Antonio G. Marques; Santiago Segarra. Joint Network Topology Inference in the Presence of Hidden Nodes. 2024. DOI 10.1109/TSP.2024.3392348. https://arxiv.org/abs/2306.17364

[41] D. Puetzfeld, Y. N. Obukhov, C. Lämmerzahl. Gravitational clock compass in General Relativity. 2018. DOI 10.1103/PhysRevD.98.024032. https://arxiv.org/abs/1805.10673

[42] D. Philipp, E. Hackmann, C. Lämmerzahl, J. Müller. The Relativistic Geoid: Gravity Potential and Relativistic Effects. 2020. DOI 10.1103/PhysRevD.101.064032. https://arxiv.org/abs/1912.10159

[43] R. Martín, E. Verdaguer. Stochastic semiclassical gravity. 1999. DOI 10.1103/PhysRevD.60.084008. https://arxiv.org/abs/gr-qc/9904021

[44] M. Rakhmanov, J. D. Romano, J. T. Whelan. High-frequency corrections to the detector response and their effect on searches for gravitational waves. 2008. DOI 10.1088/0264-9381/25/18/184017. https://arxiv.org/abs/0808.3805

[45] A. Kehagias, K. Sfetsos. Deviations from the $1/r^2$ Newton law due to extra dimensions. 2000. DOI 10.1016/S0370-2693(99)01421-5. https://arxiv.org/abs/hep-ph/9905417

[46] Harry Nyquist. Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors. 1928. DOI 10.1103/PhysRev.32.110. https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.32.110

[47] Nathan E. Flowers-Jacobs; Alessio Pollarolo; Kevin J. Coakley; Adam C. Weis; Anna E. Fox; Horst Rogalla; Weston L. Tew; Samuel P. Benz. The NIST Johnson Noise Thermometry System for the Determination of the Boltzmann Constant. 2017. DOI 10.6028/jres.122.046. https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/122/jres.122.046.pdf

[48] Peter R. Saulson. Thermal noise in mechanical experiments. 1990. DOI 10.1103/PhysRevD.42.2437. https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.42.2437

Указатель иллюстраций

1. Наблюдатель внутри измерительной сети 8
2. Координаты, независимые направления и длина 10
3. Два внутренних теста кривизны 12
4. Локальная геометрия и глобальное замыкание 14
5. Время, световой конус и допустимые траектории 15
6. Как растёт доступная область 17
7. Геодезические диски и масштабный показатель сферы 18
8. Возврат и дальность распространения 20
9. От трёх узлов к матрице отклика 23
10. Изоспектральные сети и различающий локальный отклик 25
11. Три режима конечной установки 27
12. Два способа задать дискретную геометрию 32
13. Координаты сохраняются, спектральный показатель меняется 33
14. Направление, замкнутое в окружность 37
15. Периодичность и семейство мод 38
16. Тепловой след компактного направления 40
17. Синтетическая ось в современном резонаторе 42
18. Общая причина и управляемое воздействие 46
19. Граничная область и поверхность в объёме 47
20. Два протокола реконструкции одной системы 51
21. Закрытая сеть и доступные порты 53
22. Статическое исключение скрытого узла 56
23. Пространство данных: две модели и калибровочное направление 59
24. Общий словарь рёбер и действительно общая связь 62
25. Одна связь, один профиль и портовое наблюдение 64
26. Как интервалы отдельных контрастов ограничивают силу связи 68
27. Исходная решётка и добавленное ребро 5–58 70
28. Сингулярные числа полного изменения отклика 72
29. Пространственный рисунок портового отклика 73
30. Устойчивость восстановления в первой серии 75
31. Слабая связь и имитирующий её ограниченный дрейф 78
32. Чувствительность исходной и новой конфигурации 80
33. Сколько кандидатов сохраняет каждый набор наблюдений 81
34. Ограниченная оболочка отдельного контраста 82

35. Ложная общая пара и контрольные порты 83
36. Опорная запись, сохраняющая электронную утечку 85
37. Итоги 96 синтетических проверок фиксированного протокола 86
38. Диффузионное приближение и причинный фронт 89
39. Скрытый конденсатор и память отклика 91
40. Силовой показатель и лестница дальностей компактных мод 98
41. От движения источника к показанию детектора 99
42. Геометрия двух конечных дисков 102
43. Добавочная сила и условная чувствительность конечных дисков 104
44. Динамические пороги и различающий зазор 105
45. Ускорение и приливная кривизна: один протокол, два фона 109
46. Масштаб и временная полоса часовой ковариации 111
47. Геометрия двух часов и центрального гравиметра; когерентность 115
48. Физическая перестановка часов при сохранении электроники 117
49. Результаты синтетической перестановки часов 118
50. Завершённый световой путь интерферометра 123
51. Почему ненулевое поле может дать нулевой выход 124
52. Частотный отклик и эквивалентный шум интерферометра 126
53. Три стратегии интерферометрического считывания 129
54. Точная электрическая схема четырёхузлового RC-макета 132
55. Слепое сравнение трёх RC-записей с калибровочной оболочкой 134
56. Современный аппаратный тракт RC-опыта 136
57. Современный крутильный датчик и путь измерения момента 137
58. Слепой протокол: кто видит устройство, запись и ключ 143
59. Цикл подготовки, записи и сброса 165
60. От CSV к проверке гипотезы: полная цепочка обработки 167
61. Временные записи и полный/частичный возврат 168
62. Ковариация интегралов и составляющие ошибки 169

Автор и проекты

Электронная почта: info@brenev.com

Сайт автора: brenev.com

Сайт Миры: mira.technology

Другие проекты: haraizen.tech

Телеграм: https://t.me/Eudgenee