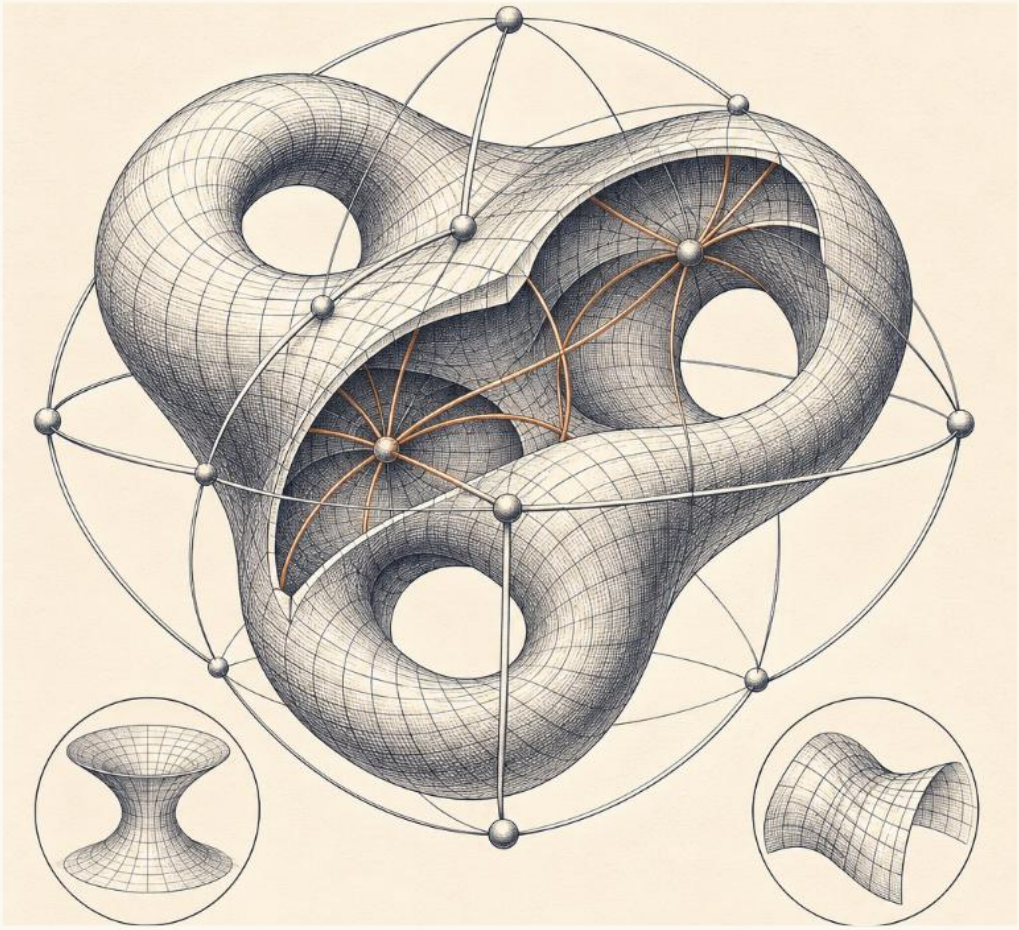
안에서 본 공간



Eudgene Brenev
Mira Veyran

2026

Eudgene Brenev

Mira Veyran

안에서 본 공간

공간에 관한 가설과 이를 검증하는 장치

2026

목차

머리말 4

이 책을 읽는 방법 6

제1장 외부 관측자 없는 공간 8

제2장 차원을 측정하는 방법 18

제3장 차원이 척도에 의존할 때 31

제4장 숨겨진 방향과 합성 방향 38

제5장 양자적 관계에서 나오는 기하 구조 47

제6장 응답에서 공간을 복원할 수 있는가 56

제7장 공통 희소 연결성 가설 66

제8장 계산 실험과 견고성 검증 77

제9장 망 유사체에서 인과적 물리 모형으로 99

제10장 숨겨진 기하 구조의 분광학 107

제11장 공간의 공동 탐침으로서 시계와 중력계 121

제12장 간섭계가 들을 수 있는 것 139

제13장 세 장비와 신호에서 결론까지의 경로 152

제14장 발견과 설득력 있는 오류를 구별하는 방법 164

제15장 확립한 것과 검증을 이어 가는 방법 173

부록 A 수학적 관례 179

부록 B 계산 실험의 반복 183

부록 C 검증할 주장의 지도 185

부록 D 주요 개념 용어집 187

부록 E 전압에서 결합 복원까지의 실습 190

참고문헌 202

그림 찾아보기 208

머리말

거리에서 공간의 구조로

공간은 조작을 통해 익숙하다. 물체를 옮기고 거리를 재며 신호를 보내고 받는다. 그러나 개별 실험의 결과가 같다고 세계의 구조가 정해지지는 않는다. 두 계가 같은 진동 주파수를 가지면서 섭동 전달 경로는 다를 수 있다. 판독 변화는 새 결합과 장비 표류, 잘못 고른 모형에서 생길 수 있다. 책은 어떤 관측으로 이 가능성들을 구별할 수 있는지 묻는 데서 시작한다.

주된 연구 흐름은 응답에서 연결성을 복원하는 것이다. 알려진 망에 숨은 결합을 넣고 접근 가능한 여러 포트에서 그 위치를 복원한다. 다음에는 문제를 더 현실적으로 만든다. 통상 결합도 유한한 정밀도로만 안다. 그러면 특이한 신호 중 어느 부분을 보정으로 설명할 수 있으며 어떤 추가 측정이 결론을 바꿀 수 있는지 밝혀야 한다.

이 책은 완결된 예들로 이 질문을 따라간다. 작은 망은 명시적 행렬로 모호함의 원천을 보여 주고, 큰 수치 실험은 복원을 검증한다. 제한된 표류 모형은 허용 설명의 경계를 정한다. 여러 탐침과 선택한 측정 대비는 실제로 어떤 새 정보를 얻었는지 검증한다. 저항–정전용량(RC) 망 실습은 이 수학을 전압과 기록 시간, 판독 오차에 연결한다.

다른 장들은 콤팩트한 방향과 공동 시계 및 중력 측정 신호, 간섭계 응답을 다룬다. 각 경로는 특정 연산자나 장을 선택하고 관측량을 도출하며 경쟁 기제를 명시한다. 연구 방법이 이 모형들을 연결한다. 하나의 근본 작용에서 도출한 모형들이 아니며 물리적 전제도 다르다.

이 책은 공간의 구조에 관심이 있고 자기 가정을 검증할 준비가 된 독자를 위한 것이다. 공식은 사고 흐름을 따라가며 수치 예는 기호에서 관측으로 되돌아가게 한다. 계산 경로에는 선형대수와 확률 기초, 미분방정식에 대한 이해가 필요하다. 스펙트럼 밀도와 응답행렬, 공통 원인 개념은 구체적인 과제로 소개한다.

직접 수행한 실험의 주요 결과는 정한 수학적 계와 합성 자료에서 얻었다. 자연에 관한 실험 정보는 일차 논문을 따른다. 이 수준들을 구별해야 각 결론의 내용을 평가할 수 있다.

증명된 항등식이 적용되는 곳과 알고리즘을 검증한 곳, 측정을 기다리는 물리 예측을 제시한 곳을 구별한다.

이 책을 읽는 방법

두 경로

처음 읽을 때는 다음 측정이 정확히 무엇을 더하는가라는 질문을 따라가면 유용하다. 1장에서는 기하학적 조작을 비교하고, 2장에서는 평균 스펙트럼에서 국소 응답으로 나아간다. 6-8장에서는 구조와 표류를 구별하며 11장에서는 두 종류 장비로 공동 검증한다. 이렇게 읽으면 기술적 도출의 목적이 명확해진다.

경로	주요 읽기 순서	필요한 것
개념 경로	1-2장; 3-5장의 입문 및 결론 부분; 6-8장의 예; 10-13장의 물리적 설정; 15장의 결론	함수와 비례, 단위; 작은 행렬 예를 따라갈 준비
계산 경로	2-12장의 모든 도출; 14장의 통계 프로토콜; RC 실습과 계산 부록	행렬과 고유값, 미분, 확률, 신호의 스펙트럼 표현

3장은 처음에는 여러 기제의 개요로 읽어도 된다. 5장의 홀로그래피 공식에는 자체 이론적 맥락이 필요하며 망 실험의 전제조건은 아니다. 행렬이 어렵다면 2장의 세 노드로 돌아가면 좋다. 연산자의 각 행과 응답의 각 열이 계에 가하는 조작과 연결되어 있다.

결론에 영향을 주는 곳에서는 적용 조건을 자세히 유지했다. 다시 읽을 때를 위해 용어집과 기호표, 주장 지도를 마련했다. 계산 부록은 매개변수와 계산 한계를 명시하며 실행 명령은 동봉 안내에 모았다. RC 실험의 기술 절차는 주요 설명이 설정 목록이 되지 않도록 별도로 구성했다.

세 연구 방향

방향	관측 자료	검증 대상
연결성	접근 가능한 입력과 출력 사이 응답행렬	추가 결합과 허용 표류, 식별 불가능한 구조 집합

방향	관측 자료	검증 대상
콤팩트한 방향	선택한 스칼라 탐침의 정적 힘과 동적 응답	발생원과 검출기의 결합을 정한 하나의 모드 사다리
일관된 섭동	시계 차이와 가속도, 간섭계 위상의 스펙트럼	특정 장의 공동 예측과 장비 또는 운동학적 원인과의 차이

망 유사체로 알려진 참값에 대해 알고리즘을 검증한다. 콤팩트 모형은 통상 기하 구조의 구체적인 대안을 정한다. 확률적 및 간섭계 모형은 공간에 대한 가정을 여러 검출 경로에 연결한다. 한 경로의 성공이 그 물리적 해석을 나머지에 옮기지는 않는다. 공통인 것은 모형을 정하고 관측을 도출하며 대안을 비교하고 결론의 한계를 정하는 작업 순서다.

결과의 수준을 구별하는 방법

지위	이 책에서 뜻하는 것
알려진 결과	원래 논문과 적용 조건을 명시한 방법이나 물리 명제
모형에서 도출한 결과	공식이 명시한 연산자와 커널 또는 기하 구조에서 따름
수치 검증	프로그램이 정한 실험을 수행했으며 원자료와 매개변수, 명령을 이용할 수 있음
측정 계획	신호를 예측하고 요구를 계산했으며 실제 장치는 아직 이를 검증해야 함
자연의 관측	발표된 실험의 결과이며 특정 모형군에 해당함

응답행렬의 랭크와 공간 방향 수, 모형 매개변수 수는 서로 다른 질문에 답한다. 이후에는 각 양의 이름과 함께 조작적 의미를 제시한다. 특히 한 모형을 기각할 자료는 충분하지만 다른 모형을 유일하게 복원하기에는 부족한 경우가 중요하다.

책 끝의 그림 찾아보기로 필요한 도식을 찾을 수 있다. 개념도는 설계도와 보정, 실험 자료를 대신하지 않는다.

제1장 외부 관측자 없는 공간

공간 내부의 관측자

시계와 광원, 반사기, 움직이는 여러 물체를 이용할 수 있는 연구자를 생각하자. 그는 세계를 밖에서 찍은 사진도 없고 공간 위로 올라가 형태를 살펴볼 수도 없다. 그가 아는 모든 것은 물체들의 만남과 장치 판독값, 신호 교환에서 나온다. 물리학이 놓인 상황이 바로 이렇다. 우주 관측소도 연구하는 세계의 일부이다. 따라서 공간의 문제는 관측 사건들 사이의 관계에서 시작한다. 어떤 이동들이 서로 독립적인가? 거리를 어떻게 비교하는가? 공간의 곡률과 측정 장치 자체의 변화를 어떻게 구별하는가? 답은 자신의 우주를 결코 떠나지 않는 관측자에게도 접근 가능해야 한다.

우선, 어떤 관계가 검증 가능한 지 묻는 것으로 충분합니다. 길이, 신호 이동 시간, 자유 이동 및 폐쇄 루프 결과를 비교할 수 있습니다. 이러한 절차의 합의는 선택된 지오메트리를 지원합니다. 그들의 불일치는 장치, 환경 또는 공간을 설명하는 규칙 자체를 확인해야 할 위치를 보여줍니다.

그림 1의 관측자는 기하 구조를 복원하는 바로 그 측정 조작의 망 안에 있다.

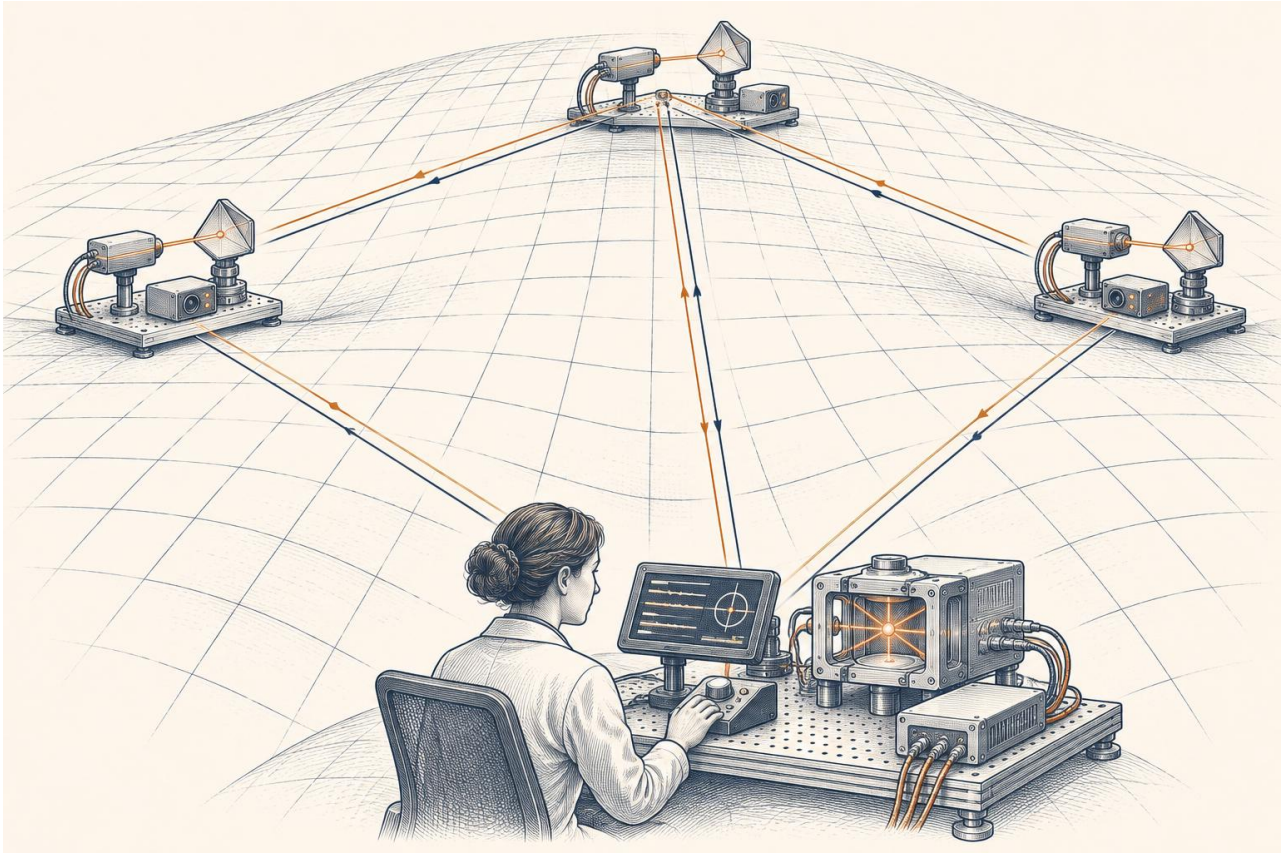


그림 1. 측정망 안의 관측자. 시계와 방출기, 반사기는 신호 전달과 거리 측정, 닫힌 경로의 순회 등 접근 가능한 비교 체계를 이룬다. 원근법으로 그린 표면은 노드 사이 관계를 보여 주는 개념적 수단이며 우주 외부의 관측자를 가정하지 않는다. 수행한 특정 실험의 그림이 아니라 측정 조작의 개념도다.

러시아어의 «이즈메레니예»는 기기의 측정 행위와 독립적인 방향을 모두 뜻하므로 논의를 더 어렵게 한다. 이하에서 기기가 하는 일은 물리량의 측정이라 하고, 방향의 수는 차원 수라 한다. 수학적 모형의 변수라는 셋째 가능성도 중요하다. 온도, 물질의 농도, 전위는 독립변수가 될 수 있지만, 그렇다고 새로운 공간 방향이 되지는 않는다. 연구자는 평범한 실험실에 머물면서도 백 가지 특징으로 이루어진 공간에 그래프를 그릴 수 있다. 다섯째나 열째 차원을 논하기 전에, 그 수가 물체의 위치, 계의 상태, 관측 자료, 근본적인 기하 중 무엇을 가리키는지부터 밝혀야 한다.

좌표와 독립적인 방향

기록한 좌표 수 자체는 아무것도 증명하지 않는다. 구면 위 점의 위치를 세 데카르트 좌표로 나타낼 수 있지만 일정한 반지름 조건이 이들을 연결한다. 허용 영역에서 두 좌표를 조금 바꾸면 셋째는 해당 부분을 선택한 표면 방정식으로 정해진다. 국소적으로 독립 자유도는 둘이다. 반대로 두 각좌표만으로 구면을 완전히 정칙인 좌표도 하나로 덮지는 못한다. 극에서는 익숙한 표기가 불편해진다. 좌표망의 문제는 표면의 물리적 결함을 뜻하지 않는다. 이 간단한 예로 기하 구조와 그 표현 방식을 곧바로 구분할 수 있다.

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad d_{\mathrm{local}} = 3 - 1 = 2 \tag{1.1}$$

이 예에서 우변의 등식이 성립하는 이유는 매끄럽고 독립적인 제약 하나가 국소적인 자유 좌표 수를 하나 줄이기 때문이다. 임의의 방정식 집합에 기계적으로 적용할 수는 없다. 제약들은 서로 종속일 수 있고 특이점에서 랭크가 바뀔 수 있다. 독립성의 실용적 의미는 운동으로 보면 더 쉽다. 허용되는 모든 작은 이동을 두 독립 방향으로 표현할 수 있으면 셋째 좌표는 중복이다. 물리적인 추가 차원에는 새로운 독립 이동의 부류나 그에 대응하는 추가 전파 모드 집합을 보여야 한다. 방정식에 글자 하나를 더하는 것으로는 부족하다.

또 다른 흔한 혼동은 다체역학에서 생긴다. 삼차원 공간의 자유 입자 셋에는 위치 좌표 아홉 개가 필요하다. 운동량을 더하면 위상공간 상태 기술에는 이미 열여덟 수가 들어간다. 입자들이 열여덟 방향의 물리 공간으로 옮겨 갔다는 뜻은 아니다. 높은 차원은 전체 계의 가능한 상태공간에 속한다. 이 구분은 상태공간의 구조가 더 풍부한 양자이론에서도 유지된다. 이후에는 높은 차원이라는 주장마다 무엇이 그 공간의 점이며 어떤 변화가 점들 사이의 이동에 해당하는지 명시한다.

거리가 물리적 의미를 얻는 방식

좌표는 가까운 위치들을 비교하는 규칙이 있어야 기하 구조가 된다. 매끄러운 공간에서는 계량이 그 규칙을 정한다. 좌표의 작은 변화를 물리적 길이로 바꾸며 서로 다른 좌표의 같은 수치 변화가 반드시 같은 이동이 아님을 고려하게 한다. 데카르트 좌표에서는 축별 단위를 보통 같게 골라 계량의 구조가 거의 눈에 띄지 않는다. 다른 좌표에서는

전면에 드러난다. 아래의 일반 표기는 양의 정부호 공간 계량에 해당한다. 반복 첨자는 독립 좌표들에 대한 합을 뜻한다. 선택한 곡선을 따라 적분하면 길이를 얻는다.

$$d\ell^{2} = g_{ij}(x)\, dx^{i} dx^{j}, \qquad L[\gamma] = \int_{\gamma} \sqrt{g_{ij}\, dx^{i} dx^{j}} \tag{1.2}$$

평면에서 데카르트 좌표 대신 반지름과 각도를 쓰자. 작은 반지름 방향 이동의 길이는 반지름 변화와 같다. 반지름이 일정한 작은 각변위는 호를 따르므로 길이가 각도와 중심까지의 거리에 모두 비례한다. 통상적인 피타고라스 정리에 좌표 변환을 대입하면 이 공식을 얻는다. 각도 변화의 제곱 앞 계수는 위치에 의존하지만 평면은 여전히 평탄하다. 따라서 계량 성분의 좌표 의존성 자체가 곡률의 증거는 아니다. 다른 좌표망으로 바꿔도 의미가 유지되는 양들이 필요하다.

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \qquad d\ell^{2} = dr^{2} + r^{2} d\varphi^{2} \tag{1.3}$$

물리적 계량에는 거리를 깔끔하게 적는 것보다 실질적인 정당화가 필요하다. 자는 가열되면 팽창하고 빛의 통과 시간은 매질에 의존한다. 따라서 서로 다른 장치들의 일치와 그 구조의 고려로 기하 기술을 검증한다. 일반상대성이론에서 계량장은 간격의 기술과 중력 상호작용에 동시에 참여한다. 자유 운동과 이상적 시계의 판독값이 하나의 구조로 연결된다. 이 연결이 기하 구조를 단순한 도면 언어에서 물리 이론으로 만든다. 새로운 공간 기술도 수학적 대상과 실제 관측을 연결하는 그만큼 명확한 규칙을 제시해야 한다. [1]

좌표, 방향 및 길이의 차이는 두 개의 기하학적 예제(그림 2)에서 편리하게 볼 수 있습니다.

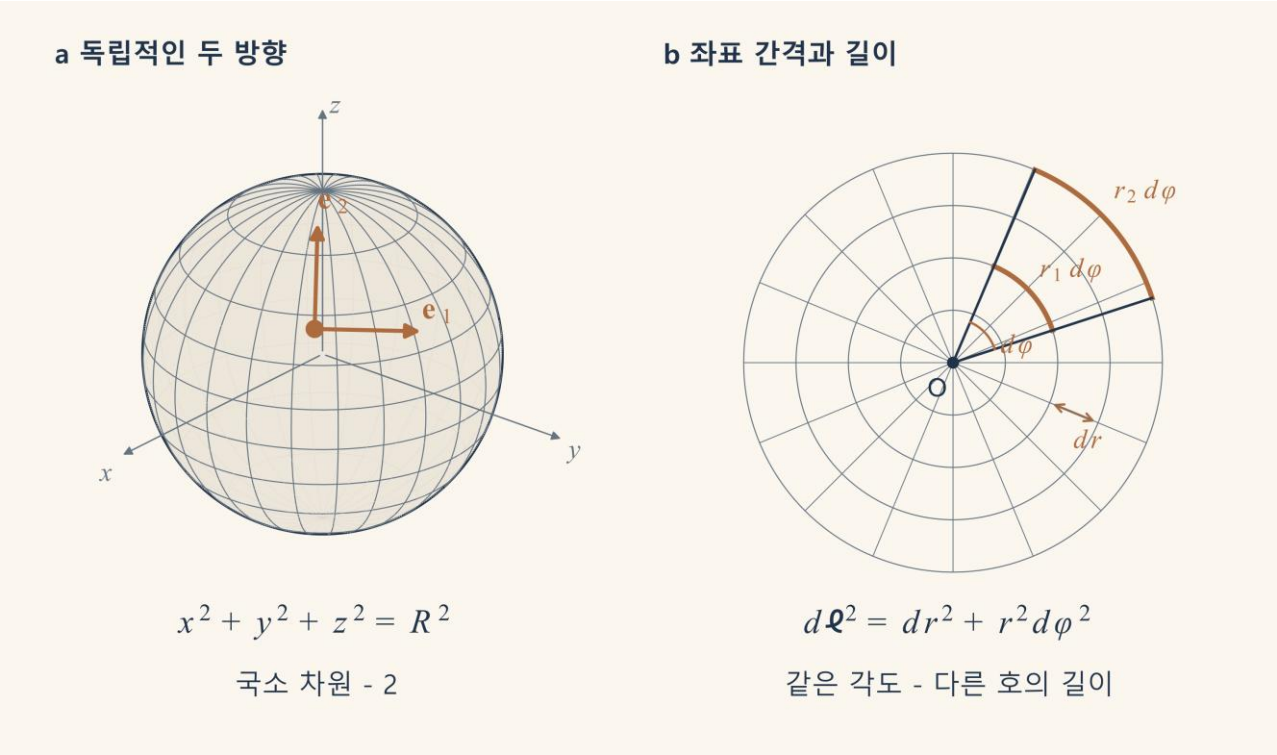


그림 2. 표현에 쓰는 좌표 수가 내재 차원을 정하지는 않는다. 구면의 위치는 수 셋으로 나타내지만 표면에 속한다는 조건 때문에 독립 접선 방향은 둘이다. 오른쪽에서는 같은 각도 변화가 반지름에 따라 다른 호의 길이에 대응한다. 극좌표 계량은 좌표 증가량을 물리적 길이로 바꾼다. 원점의 좌표 특이성이 평면의 결함을 뜻하지는 않는다.

곡률은 내부에서 드러난다

표면의 거주자는 주위 공간에서 표면이 휜 모습을 볼 필요가 없다. 선택한 중심에서 같은 최단 거리를 재어 원을 만들고 둘레를 측정할 수 있다. 평면에서는 둘레와 반지름의 비가 일정하다. 반지름 R의 구면에서 측지 반지름 r인 원의 둘레는 다르다. 여기서 r은 구의 내부를 관통하는 직선이 아니라 원의 중심에서 표면을 따라 측정한다. r이 충분히 작으면 차이가 작아 국소 영역은 거의 평탄해 보인다. 포괄하는 영역을 키우면 편차가 누적되어 외부 시점 없이 내부 관측자에게 드러난다.

$$C(r) = 2\pi R\sin(r/R) = 2\pi r\left[1 - \frac{r^2}{6R^2} + O\left(\frac{r^4}{R^4}\right)\right] \qquad (1.4)$$

전개식은 평탄한 결과에서 처음 나타나는 상대적 차이가 실험 크기의 제곱에 비례함을 보여 준다. 이는 미래 장비에 유용한 단서다. 거리 하나의 정밀도를 끝없이 높이기보다 측정 도형의 척도를 바꾸는 것이 더 중요할 수 있다. 다만 크기를 키울 때 방법 자체의 계통적 변화를 검증해야 한다. 신호를 쓰는 실험에서는 경로 증가가 환경의 영향을 키워 기하학적 효과를 모사할 수 있다. 수학 공식은 예상 척도 법칙을 정하지만 물리적 해석은 대안 원인들을 비교한 뒤에만 얻는다. 이 논증 전체에서 구면은 이차원으로 유지된다. 바뀌는 것은 기하 구조이며 독립적인 작은 이동의 수가 아니다.

또 다른 내부 비교법은 닫힌 경로를 따라 방향을 운반하는 것이다. 평면의 이상적 평행이동은 화살표를 원래 배향으로 되돌린다. 굽은 표면에서는 결과가 다를 수 있고 작은 폐곡선의 편차는 둘러싼 영역의 곡률과 연결된다. 실제 공간에서 이런 구상에는 방향을 무엇으로 정하고 어떤 외부 작용이 장치에 영향을 주는지 명시해야 한다. 자이로스코프 회전과 지지대 변형, 기하학적 운반을 관측 모형에서 구분해야 한다. 예의 요점은 곡률이 경로 비교와 연산을 닫는 과정에서 드러난다는 데 있다. 선분 하나의 측정은 보통 일관된 측정망보다 훨씬 적은 정보를 준다.

수치 기준으로 반지름 10 m의 구면과 측지 반지름 1 m의 원을 택하자. 평면 공식의 둘레는 6,283185 m이고 구면 공식은 6,272719 m이다. 차이는 10,47 mm이다. 둘레에 비해 작지만 명확한 값이다. 폐곡선 크기를 절반으로 줄이면 첫 근사에서 상대 효과는 사분의 일이 된다.

$$K_{\mathrm{est}} = \frac{6}{r^{2}}\left(1 - \frac{C(r)}{2\pi r}\right), \qquad r/R \ll 1 \tag{1.5}$$

이 가우스 곡률 추정은 앞의 전개에서 직접 얻는다. 선택한 예에서는 정확한 값 1/R² = 0,01 m⁻²에 대해 0,009995 m⁻²이다. 차이는 급수 절단 오차이다. 길이 측정 오차는 다른 기여이므로 별도로 고려해야 한다. 이렇게 도형과 물리량, 예상 편차의 척도, 근사 정확도를 정하면 공식이 실험으로 바뀐다.

원과 닫힌 경로를 따른 운반은 내부 곡률 검증의 독립적인 두 모습을 보여 준다(그림 3).

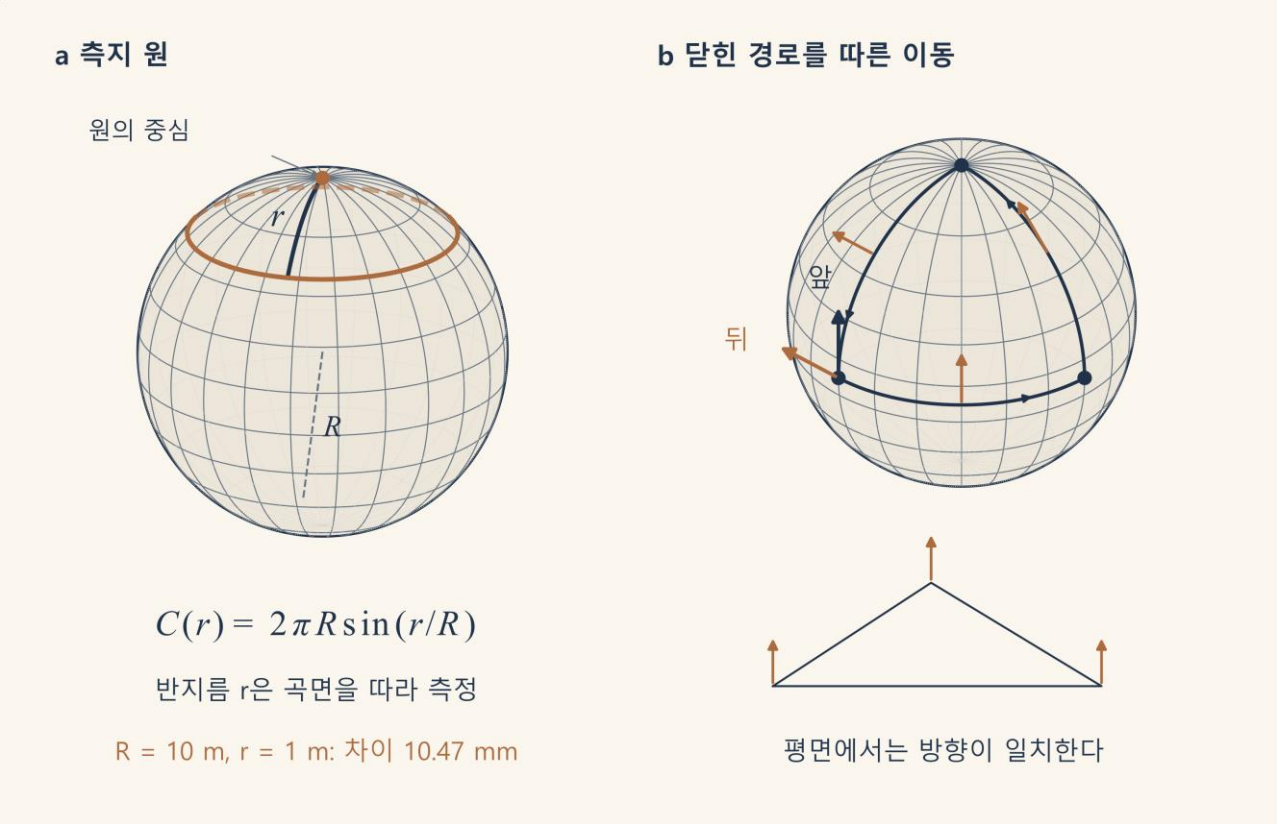


그림 3. 표면 위에 머물면서 곡률을 알아내는 두 방법. 왼쪽 반지름 r은 측지선을 따라 측정하고 R은 구 전체의 반지름이다. 원은 잘 보이도록 확대하여 수치 예의 반지름 비를 지키지 않았다. 오른쪽에서는 세 대원호를 따라 화살표를 평행이동한다. 구면에서는 최종 방향이 처음과 다르지만 평면에서는 경로를 닫아도 방향이 유지된다.

시공간에서는 또 다른 미묘한 점이 생긴다. 가속하는 관측자들은 평탄한 기하 구조에서도 시계 속도의 차이를 알아낼 수 있다. 따라서 시계 판독값의 기울기와 곡률에는 서로 다른 검증이 필요하다. 가속 기준계와 조석 효과 검증의 완전한 예는 11장에서 다룬다.

위상과 국소 실험의 한계

공간들은 국소 기하 구조가 같아도 전역적 구조는 다를 수 있다. 종이를 늘리지 않고 원기둥으로 말면 그 표면의 작은 도형들은 평면 기하를 유지한다. 그러나 원기둥을 감는 경로는 표면에 머문 채 한 점으로 수축할 수 없다. 이것이 위상의 차이이다. 이를 위해 굽음이 독립적인 물리적 원인일 필요는 없다. 주기 좌표를 갖는 평탄한 공간을 점들의

동일시 규칙으로 직접 정의할 수 있다. 원기둥 그림은 상상을 도울 뿐이다. 따라서 눈에 띄는 곡률이 없다고 특이한 전역 연결성이 배제되거나 공간의 유한성과 무한성이 정해지지는 않는다.

위상의 차이에는 해당 척도를 포괄하는 관측이 필요하다. 닫힌 방향의 길이가 접근 가능한 영역보다 훨씬 길면 국소 실험은 닫히지 않은 방향과 구별하지 못할 수 있다. 더 대담한 가설로 반드시 고칠 수 있는 연구자의 결점이 아니라 정보의 한계이다. 두 수학 모형이 기존의 모든 자료를 똑같이 기술할 수 있다. 이때 결과는 어떤 크기나 닫힘 유형을 어떤 전제에서 배제했는지 구별가능 영역으로 정식화해야 한다. "경계를 발견하지 못했다"는 말은 "공간이 무한하다"와 같지 않다. 마찬가지로 끝을 보지 못했다고 가정한 끝 너머의 외부 공간이 존재함이 증명되지는 않는다.

따라서 위상과 계량, 차원은 구별해 논해야 한다. 위상은 이웃 관계와 전역적 연결 방식을, 계량은 길이와 각도, 간격을 정한다. 차원은 독립적인 국소 방향의 수나 특정한 척도 법칙을 나타낸다. 이 구조들은 상호작용하지만 서로를 대신하지 않는다. 연구 계획에서는 가설이 어느 구조를 바꾸는지 명시하면 유용하다. 닫힌 좌표와 멀리 떨어진 부분들 사이 새 지름길 결합, 다른 파동 전파 법칙은 서로 다른 수학적 과제로 이어진다. 이를 '공간' 한마디로 합치면 멋진 설명을 얻어도 검증할 계산이나 장비를 고를 수 없게 된다.

띠와 원기둥을 비교하면 전역적 닫힘과 내재 곡률을 구별할 수 있다(그림 4).

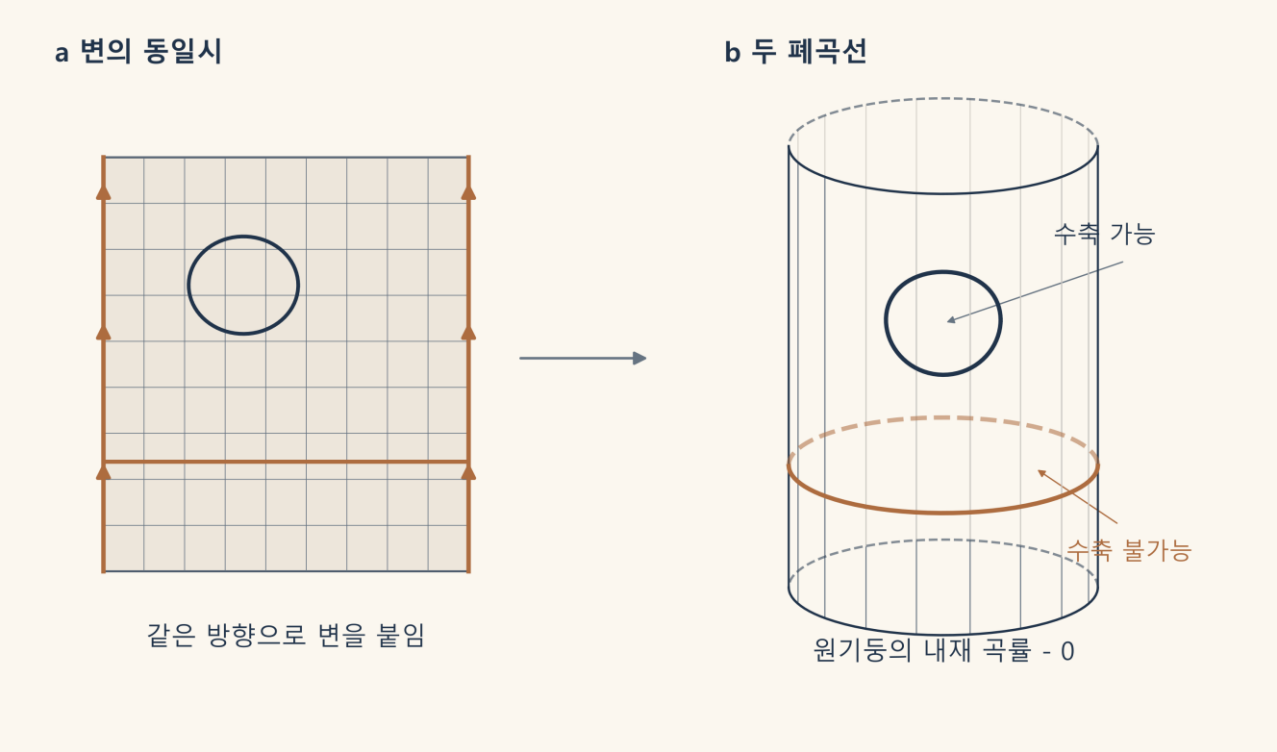


그림 4. 평탄한 띠의 마주 보는 변들을 같은 방향으로 동일시하면 원기둥이 된다. 표면의 작은 폐곡선은 연속적으로 한 점으로 수축할 수 있지만, 닫힌 방향을 감는 폐곡선은 수축할 수 없다. 이때 원기둥의 내재 가우스 곡률은 영이다. 눈에 보이는 굽음은 표면을 그리는 수단이며 내재 기하 구조의 측정을 대신하지 않는다.

시간이 또 하나의 공간축이 아닌 이유

상대론적 기술에서 시간과 공간은 사건들의 하나의 구조에 들어가지만 간격의 부호 차이는 유지한다. 시간 부분을 음으로 하는 관례를 택하자. 평탄한 시공간의 국소 관성 기술에서 간격은 광속과 좌표 증가량으로 쓴다. 시계의 고유시간은 시간꼴 궤적을 따라 정해진다. 네 좌표를 수치적으로 묶는다고 시간 방향이 임의로 방향을 틀고 되돌아올 수 있는 보통 길이 되지는 않는다. 계량의 부호수는 빛원뿔과 사건 사이의 허용 인과관계를 조직한다. 공식의 시각적 장식이 아니라 모형의 물리적 일부이다.

$$ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad d\tau^2 = -\frac{ds^2}{c^2} \quad \text{시간꼴 경로에 대해} \qquad (1.6)$$

따라서 추가 시간의 도입 제안에는 별도 검증이 필요하다. 초기 자료와 진화 규칙, 해가 유일하고 안정적으로 정해지는 조건을 지정해야 한다. 간격에 음의 항을 하나 더한다고 이 성질들이 보장되지는 않는다. 수학적 연구는 가능하지만 계량을 쓸 수 있다는 사실에서 물리적 타당성이 나오지는 않는다. 가변 차원 공간에도 같은 원리가 적용된다. 무엇이 바뀌고 전이가 장의 상태에 어떻게 작용하며 전이 양쪽의 관측을 어떻게 비교하는지 먼저 밝혀야 한다. 이를 명확히 하지 않으면 공식은 아직 풀어야 할 과제의 표시에 머문다.

빛원뿔은 간격의 부호와 시계의 허용 궤적을 직관적으로 연결한다(그림 5).

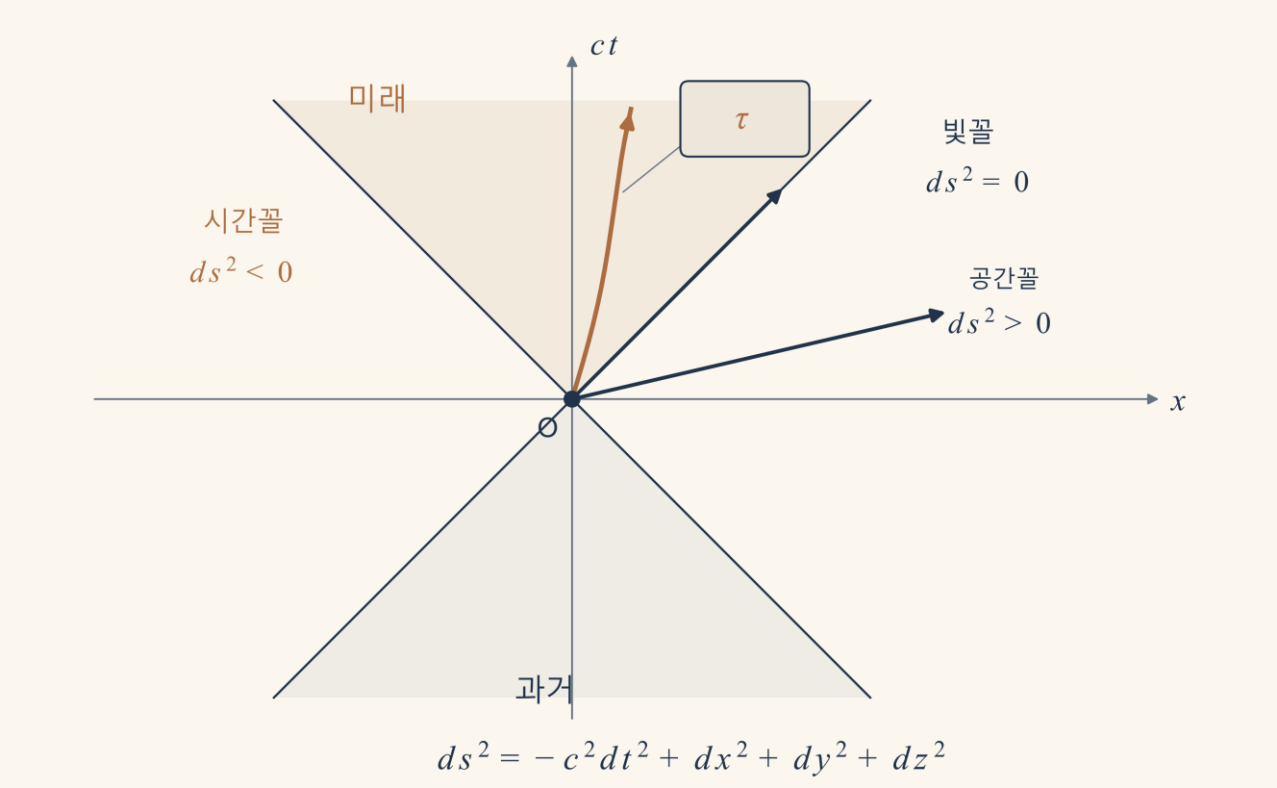


그림 5. 시공간을 공간 좌표 하나와 ct에 투영한 그림. 빛의 방향들이 미래와 과거 영역의 경계를 이룬다. 시간꼴 세계선은 원뿔 안을 지나며 자신의 시계 판독을 허용한다. 공간꼴 방향은 원뿔 밖에 있다. 간격의 부호는 본문에서 채택한 계량 부호 (−,+,+,+)에 따른다. 장비의 측정 궤적이 아니라 간격의 분류를 나타낸다.

이제 공간 기술은 거리와 스펙트럼, 전달 시간, 연산의 닫힘이라는 검증 가능한 관계들과 연결된다. 특이한 결과는 어떤 관계가 바뀌었는지 지목해야 한다. 다음 장은 차원을 추정하는 여러 방법을 도입하고 선택한 측정에 따라 같은 대상이 왜 서로 다른 수치 지표를 얻는지 보여 준다.

제2장 차원을 측정하는 방법

척도 증가에 대한 응답으로서의 부피

차원을 추정하는 가장 직관적인 방법은 커지는 영역에서 시작한다. 직선에서 선분의 길이는 반지름에 비례하고 평면에서 원판의 넓이는 반지름의 제곱, 통상적인 삼차원 공간에서 구의 부피는 세제곱에 따라 커진다. 허용 거리를 늘릴 때 접근 가능한 위치들이 얼마나 빨리 늘어나는가라는 공통 의미이다. 실험에서는 거리와 영역의 중심, 부피 측정 방법을 정해야 한다. 부피 대신 입자나 센서를 세면 분포 밀도의 모형도 필요하다. 그렇지 않으면 공간의 불균일한 점유를 공간 자체의 특이한 차원으로 오인하기 쉽다.

$$d_V\left(\ell\right)=\frac{d\ln\left[V\left(\ell\right)/V_{O}\right]}{d\ln\left(\ell/\ell_{O}\right)},\qquad V\left(\ell\right)=A\ell^{D}\ \Rightarrow\ d_V=D \tag{2.1}$$

로그 안의 기준량은 인수가 무차원이 되도록 필요하며 미분 뒤 상수들은 사라진다. 여기서 dV는 선택한 척도의 조작적 부피 차원을 뜻한다. 엄밀한 하우스도르프 차원과 자동으로 같은 말이 되는 것은 아니다. 뒤의 차원은 집합을 임의로 작은 영역들로 덮고 해당 극한을 취해 정의한다. 적절한 측도를 가진 충분히 규칙적인 공간에서는 두 접근이 일치할 수 있다. 그러나 실제 장비는 유한한 범위에서 작동하며 미분은 바로 그 범위를 기술한다. 따라서 여러 척도에서 얻은 2,7은 먼저 측정한 성장 지수로 읽고 그 뒤 기하학적 지위를 밝혀야 한다.

부피 차원의 정의는 단순한 측도 성장 법칙에서 시작한다(그림 6).

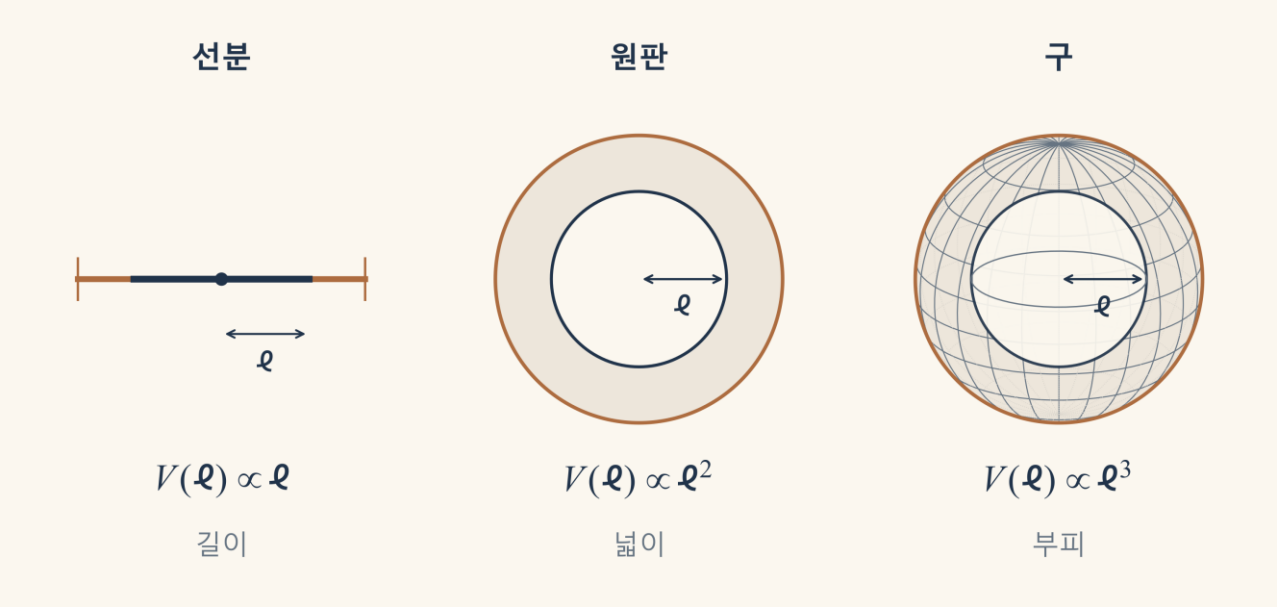


그림 6. 특징적 반지름을 키운 기준 유클리드 영역인 선분, 원판, 구. 측도는 각각 척도의 일제곱, 이차, 삼차에 따라 커진다. 작은 영역은 어두운 윤곽선, 큰 영역은 구릿빛 윤곽선으로 표시했다. 부피 지수의 정의를 설명하는 수학적 예이며 실제 공간 차원의 관측이나 특정 실험 결과가 아니다.

매끄러운 구면에서도 영역 반지름에 의존하는 지수를 얻을 수 있다. 측지 원판의 넓이는 아래 공식으로 계산한다. 작은 반지름에서는 같은 반지름의 평면 원 넓이와 거의 같지만 구 전체를 덮으면 더 커지지 않는다. 범위를 검증하지 않고 로그미분을 적용하면 지수가 줄기 시작한다. 표면이 선으로 바뀌는 것이 아니다. 유한한 대상에서 원판을 더 넓힐 여지가 줄어드는 것이다. 이 예는 정수에서 벗어났다는 것만으로 분수 기하 구조를 발견하기에 부족함을 보여 준다. 곡률과 유한한 크기, 영역 선택 규칙의 기여를 따로 평가해야 한다.

$$A(r) = 2\pi R^2\left[1 - \cos(r/R)\right], \qquad 0 < r < \pi R \qquad (2.2)$$

$$d_V(r) = \frac{r}{R}\cot\left(\frac{r}{2R}\right) \qquad (2.3)$$

넓이를 미분하면 마지막 등식을 얻는다. r/R → 0에서 지수는 이로 가고 구면 전체를 덮으면 영으로 간다. 그림 7은 두 의존성을 함께 보여 준다. 넓이가 포화되므로 로그 기울기가 줄어든다. 표면의 국소 방향 수는 예 전체에서 둘이다.

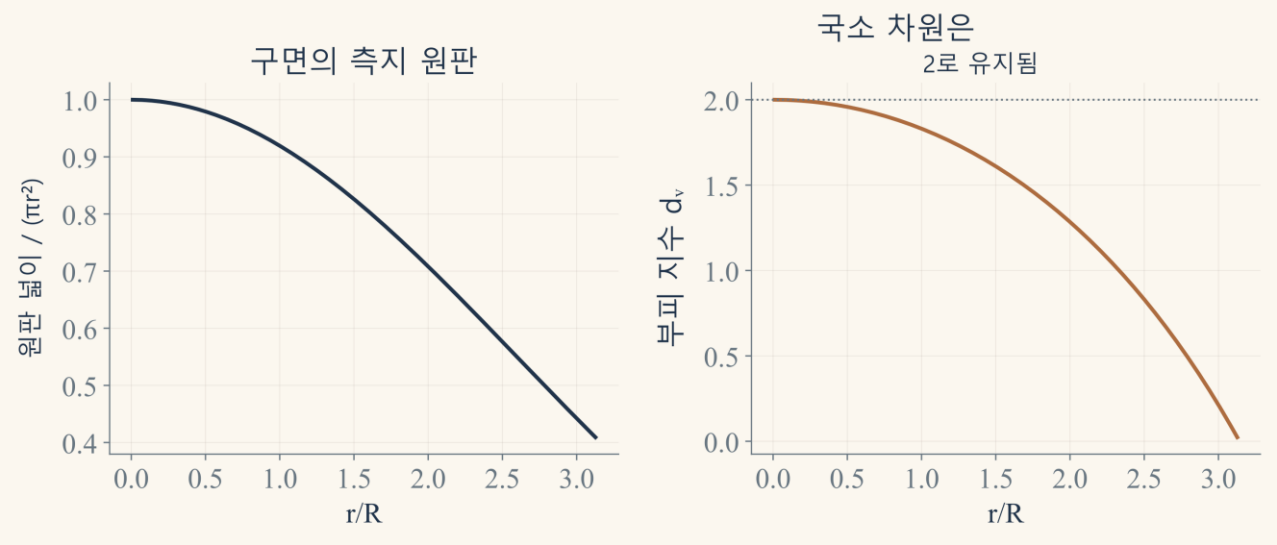


그림 7. 매끄러운 구면의 측지 원판. 왼쪽은 같은 측지 반지름을 가진 평면 원의 넓이에 대한 비이며 오른쪽은 그 로그 기울기다. 지수 변화는 곡률과 유한한 크기 때문에 생긴다. 물리적 공간 차원의 변화를 검출한 것이 아니라 정확한 기하학적 예다.

공간의 접근 가능성을 연구하는 귀환

두 번째 방법은 초기 장애의 전파를 조사합니다. 무한 평면 공간에서의 일반적인 확산을 고려하고, 처음에 확산 계수를 파라미터 σ으로 흡수합니다. 그런 다음 σ는 면적의 차원을 가지고 있으며, 방정식은 공간 좌표를 통해 Laplacian을 포함합니다. 초기 분포는 한 지점에 집중되어 있습니다. 가우스 해는 σ의 제곱근으로 성장하는 폭을 가지고 있습니다. 이 단계에서 σ은 수학적 프로세스의 매개 변수입니다. 실험실 시간으로 식별하려면 특정 전파 메커니즘이 제공되어야하며 해당 확산 계수가 복원되어야합니다. 양자 기하학에서, 그러한 물리적 해석은 종종 완전히 부재합니다.

$$\partial_\sigma K = \nabla^2 K, \qquad K\left(x, x_0; \sigma\right) = \frac{\exp\left[-\left|x - x_0\right|^2 / \left(4\sigma\right)\right]}{\left(4\pi\sigma\right)^{D/2}} \qquad (2.4)$$

출발점에서 지수 인자는 일이므로 확산 매개변수의 단순한 거듭제곱만 남는다. 연속 공간에서는 정확히 하나의 수학적 점에 도달할 확률이 보통 영이므로 귀환 확률밀도를 뜻한다. 장치는 점 대신 작은 수신 부피를 사용하며 계산에는 그 크기가 들어가야 한다.

스펙트럼 차원은 이 밀도가 감소하는 비율에서 추출한다. 가우스 해를 대입하면 곧바로 통상 차원 D가 나온다. 기하 구조와 전파 법칙을 미리 아는 곳에서 익숙한 결과를 재현하고 더 복잡한 연산자로 확장할 수 있다는 점이 정의에 의미를 준다.

$$P(\sigma) = K\left(x_0, x_0; \sigma\right), \qquad d_s(\sigma) = -2\frac{d\ln\left[P(\sigma)/P_0\right]}{d\ln\left(\sigma/\sigma_0\right)} \tag{2.5}$$

불균일한 공간에서 귀환은 출발점에 의존할 수 있다. 그러면 국소 측정인지 부피 평균인지 명시적으로 골라야 한다. 콤팩트 영역에서 평균 열핵 대각합은 전파 연산자의 모든 고유 모드 기여의 합으로 정한다. 연산자가 확률 과정의 생성자가 아니면 "귀환 확률"은 비유일 뿐이다. 양의 대각합으로 스펙트럼 차원을 여전히 정의할 수 있지만 개별 커널은 확률적 의미가 없을 수 있다. 고차 공간 미분에서 이 구분이 특히 중요하다. 믿을 만한 해석은 지수 하나의 수치가 아니라 연산자와 그 성질의 명시에서 시작한다.

확산 속도와 정의들 사이의 관계

귀환 확률은 섭동이 출발 영역에서 얼마나 빨리 빠져나가는지 알려 주지만, 얼마나 멀리 퍼지는지는 그 자체로 보여 주지 않는다. 이를 위해 출발점으로부터 거리 제곱의 평균을 측정한다. 독립적이고 대칭적인 걸음에서는 평균을 취하면 혼합곱이 사라지고 개별 걸음의 평균제곱들이 더해진다. 따라서 결과는 걸음 수에 비례한다. 연속 가우스 예를 적분하면 거리의 평균제곱은 2D와 매개변수 σ의 곱이다. 이것이 정상 확산이다. 평균제곱이 다르게 커지면 운동 지수를 따로 구한 뒤 귀환 지수와 비교해야 한다.

$$\langle r^2(\sigma)\rangle = 2D\sigma, \qquad d_w = 2\left[\frac{d\ln\langle r^2\rangle}{d\ln\sigma}\right]^{-1} \tag{2.6}$$

지수 dw를 보행 차원이라 한다. 통상 확산에서는 이이다. 퍼지는 구름이 덫에 지체되면 특성 반지름이 더 느리게 커져 지수가 커질 수 있다. 그러나 이런 거동에 기하학적 방향수의 변화가 필요한 것은 아니다. 동역학 변화만으로 충분하다. 반대로 탄도 운동은 다른 성장 법칙을 가지므로 확산 해석을 신중히 옮겨야 한다. 분포의 꼬리가 두꺼우면

평균제곱이 잘 정의되지 않을 수도 있다. 그러면 폭의 다른 견고한 척도를 고르고 그 척도와 기하학적 결론의 연결을 새로 확립해야 한다.

그림 8은 발생원으로의 귀환과 전파 거리를 비교한다.

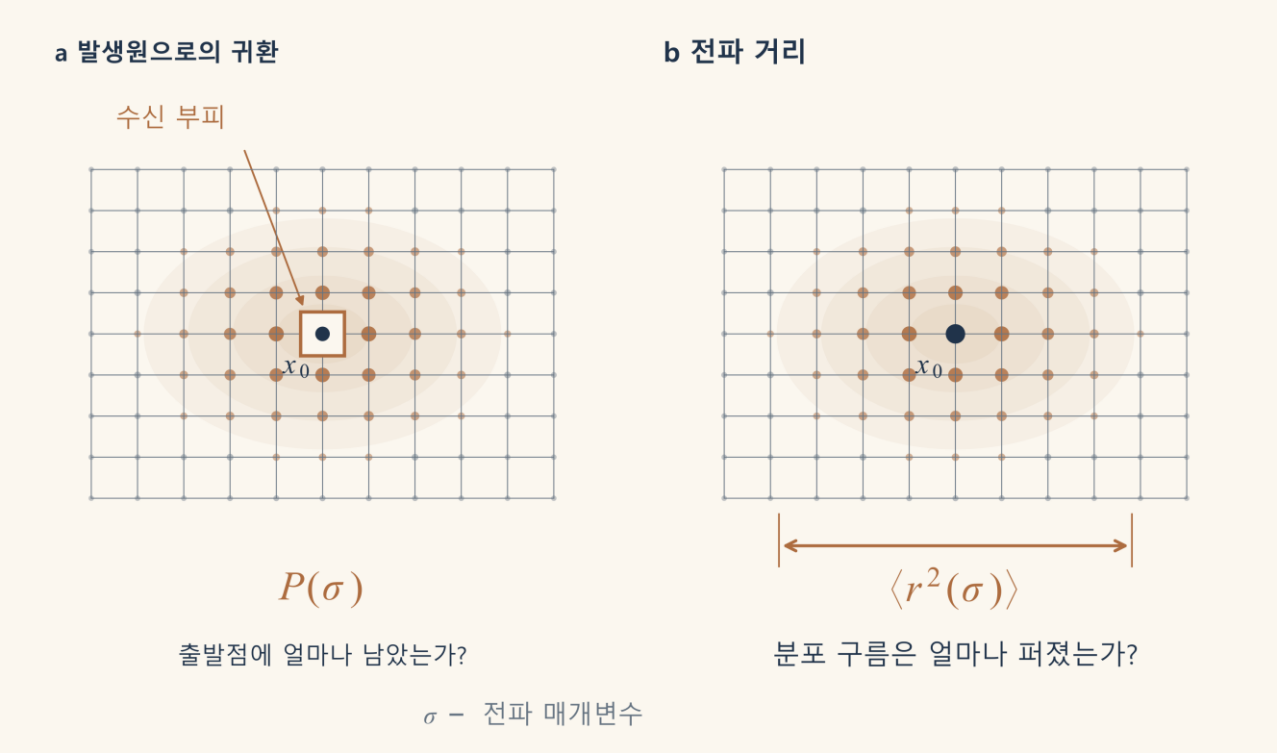


그림 8. 하나의 전파하는 섭동에도 서로 다른 판독 프로토콜이 가능하다. 왼쪽은 발생원 근처 작은 수신 부피에서 귀환을 추리고, 오른쪽은 공간 분포로 구름의 폭을 나타낸다. 격자와 강도는 실험 판독값이나 수치 척도 없이 정성적으로 그렸다. 매개변수 σ는 전파 모형에 속한다. 이를 실험실 시간으로 옮기려면 전달계수와 보정을 정해야 한다.

세 지표의 관계는 추가 전제에서 유도할 수 있다. 특성 반지름이 σ의 거듭제곱에 따라, 접근 가능한 영역의 부피는 반지름의 거듭제곱에 따라 커지고, 분포가 충분히 균일해 귀환이 그 부피에 반비례한다고 하자. 차례로 대입하면 이 관계를 얻는다. 일관성 검증에 유용하지만 모든 매질의 항등식은 아니다. 불균일성과 여러 척도, 덫, 측도의 서로 다른 선택은 처음 전제를 위반한다. 따라서 우측 공식의 잔여값이 영이 아니면 먼저 선택한 공동 기술이 성립하지 않음을 뜻한다. 새 물리학의 주장에는 더 통상적인 불일치 원인을 배제해야 한다.

$$r \sim \sigma^{1/d_w}, \quad V(r) \sim r^{d_V}, \quad P \sim V^{-1} \Rightarrow d_s = \frac{2d_V}{d_w}, \qquad \Delta = d_s d_w - 2d_V \tag{2.7}$$

같은 정보를 다르게 기록한 진동 스펙트럼

귀환 측정에 실제 무작위 보행이 반드시 필요한 것은 아니다. 양의 연산자 L의 고유값을 알면 열핵 대각합을 직접 구성할 수 있다. 각 모드는 지수함수 형태로 기여하고 매개변수 σ는 어떤 스펙트럼 척도가 드러나는지 정한다. 큰 고유값은 σ가 커지면 빠르게 억제된다. 라플라시안의 고유값 차원은 길이 제곱의 역수이다. 부피로 규격화하면 크기가 다른 영역의 결과를 비교할 수 있다. 실험실에서는 공명 주파수로 고유값을 복원할 수 있지만 분산 법칙을 확립한 뒤에만 가능하다. 주파수와 공간 연산자의 고유값은 같은 대상이 아니다.

$$L\psi_n = \lambda_n \psi_n, \qquad P(\sigma) = \frac{1}{V} \sum_{n} e^{-\sigma \lambda_n} \tag{2.8}$$

매끄러운 영역과 통상 라플라시안에서는 큰 문턱 아래 모드 수가 부피와 차원에 연결된다. 이것이 바일 법칙의 내용이다. 경계 형태는 후속 보정에 작용하고 선도항은 거듭제곱 성장을 정한다. 여기서 ωD는 단위 D차원 구의 부피이고 Λ는 고유값 문턱이다. 이 공식은 기하 구조에서 분광법으로의 중요한 연결을 준다. 주파수 범위를 넓힐 때 새 모드가 얼마나 빨리 늘어나는지에 차원이 반영된다. 그러나 선도항의 적용에는 충분한 범위와 적절한 경계 조건, 측정하는 장의 추가 내부 자유도 분리가 필요하다. [2]

$$N(\Lambda) \sim \frac{V\,\omega_D}{\left(2\pi\right)^D}\,\Lambda^{D/2} \tag{2.9}$$

여기서 향후 실험 계획에 중요한 미묘함이 생긴다. 같은 모드 집합에서 계산한 스펙트럼 밀도와 열핵 대각합은 완전히 독립적인 두 확인이 아니다. 같은 정보의 두 표현이다. 일치는 계산 검증에 유용하지만 연산자 결정의 공통 오차를 없애지는 못한다. 분광법을 직접적인 펄스 전파나 부피의 기하 측정과 대조하면 독립성이 강해진다. 두 절차가 같은 주파수 교정과 같은 가정된 분산을 쓰면 오차가 겹칠 수 있다. 설득력 있는 결과는 그래프 수가 아니라 자료 사이의 의존 구조에 달려 있다.

도식에서 측정까지의 세 노드

큰 네트워크로 이동하기 전에, 전체에서 작은 하나를 통해 작업하는 것이 유용합니다. 숫자 0, 1 및 2로 세 개의 동일한 저수지를 지정하십시오. 첫 번째는 두 번째, 두 번째는 세 번째와 연결되어 있습니다. 각 가장자리를 따른 전송 강도는 $r_0 = 1\ s^{-1}$과 같습니다. 인접한 노드의 값이 동일하다면, 그들 사이에 전송이 없습니다; 서로 다른 경우, 흐름은 차이에 비례합니다.

$$\dot{x}_0 = -r_0\left(x_0 - x_1\right), \quad \dot{x}_1 = -r_0\left(2x_1 - x_0 - x_2\right), \quad \dot{x}_2 = -r_0\left(x_2 - x_1\right) \qquad (2.10)$$

이 세 방정식은 한 줄 $\dot{x} = -Lx$로 쓰면 편리하다. 행렬 L의 대각에는 해당 노드 결합 세기의 합이, 비대각에는 음의 부호를 붙인 결합 세기가 들어간다. 각 행의 합은 영이다. 균일 상태는 변하지 않는다. 여기서 행렬은 이미 적은 전달 규칙을 저장할 뿐이다.

$$L_A = r_0\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad (2.11)$$

처음에 노드 j에만 일을 넣으면, 시간 t 뒤의 상태는 행렬 $K(t) = \exp(-Lt)$의 열 j로 주어진다. 원소 K_{ij} 는 구체적인 질문에 답한다. 초기 섭동의 얼마만큼이 노드 i에 도달했는가? 대각 원소 세 개를 평균하면 평균 귀환 P(t)를 얻는다. 이는 세 초기 상태와 그에 대응하는 출력 모두에 접근해야 하는 다른 프로토콜이다.

또 하나의 편리한 자료 형태는 시간 응답에 지수함수 가중치를 준 합이다. 양의 매개변수 s의 단위는 역시간이다. 늦은 계수를 더 강하게 억제하여 빠른 과정과 느린 과정에 대한 민감도를 바꿀 수 있다.

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\,K(t)\,dt = (sI + L)^{-1}, \qquad s > 0 \qquad (2.12)$$

$$G_A\left(r_0\right) = \frac{1}{8r_0}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad (2.13)$$

통상적인 곱셈으로 결과를 검증한다. $(r_0 I + L_a)G_a(r_0) = I$다. 가운데 열은 노드 1을 여기하는 것에 해당한다. 가중 응답은 그 노드에서 0,5 s, 양끝 각각에서 0,25 s다. 이제 역행렬에는 측정 의미가 있으며 각 원소가 특정 입력과 출력 쌍에 연결된다.

이 시점에서 멈추고 다이어그램에서 한 행 L을 재구성 한 다음 실험의 결과로 한 열 G를 읽는 것이 유용합니다. 이후 챕터의 경우, 이 대응은 큰 행렬을 수동으로 반전시키는 기술보다 더 중요합니다.

중앙 노드를 한 번 준비하면 응답행렬의 가운데 열을 말 그대로 읽을 수 있다(그림 9).

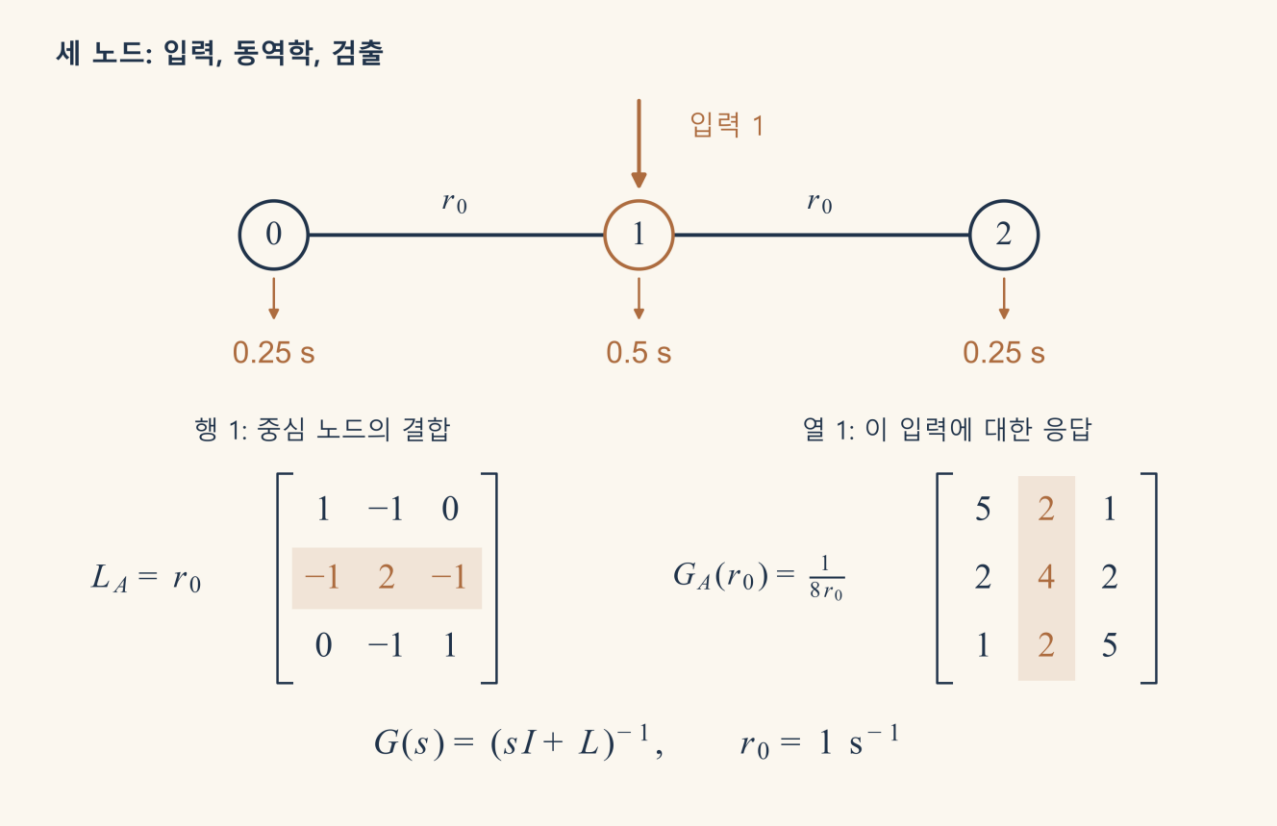


그림 9. 같은 결합률 $r_0 = 1\ s^{-1}$인 사슬은 물리적 준비와 모형 행렬을 연결한다. 가운데 행 L_a는 노드 1의 두 결합을 나타내고, 가운데 열 $G_a(r_0)$는 이 노드를 여기했을 때 지수 가중한 응답을 정한다. 0,25 s, 0,5 s, 0,25 s를 얻는다. 구릿빛은 망의 추가 결합이 아니라 선택한 경로와 그 행렬 성분을 강조한다.

서로 다른 망의 같은 차원

같은 세 노드의 구조를 바꾸자. 결합 0-1과 1-2를 $r_0/3$으로 약하게 하고 노드 0과 2 사이에 결합 $4r_0/3$을 더하면 삼각형 B가 된다. 사슬 A에는 직접 연결 0-2가 없었다. 변의 수와 가중치가 다르므로 노드 번호를 미리 고정한 서로 다른 두 장치이다.

$$L_B = \frac{r_0}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 2 & -1 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{spec}L_A = \mathrm{spec}L_B = \{0, r_0, 3r_0\} \tag{2.14}$$

두 행렬의 고유값은 같다. 따라서 열핵 대각합과 그것만으로 계산한 모든 차원도 같다. 이 같음은 모든 양의 t에서 성립하므로 대역을 넓히거나 대각합만의 측정 정밀도를 높여도 모호성이 없어지지 않는다.

$$P_A(t) = P_B(t) = \frac{1 + e^{-r_0 t} + e^{-3r_0 t}}{3} \tag{2.15}$$

$$d_s(t) = \frac{2r_0 t \left[e^{-r_0 t} + 3e^{-3r_0 t} \right]}{1 + e^{-r_0 t} + e^{-3r_0 t}} \tag{2.16}$$

공통 스펙트럼은 해당 고유벡터들이 고정한 노드들에 어떻게 분포하는지 말해 주지 않는다. 바로 여기에 구별할 정보가 남는다. 중앙 노드 1을 여기하고 그 노드 자체의 응답을 측정하면 두 망은 서로 다른 함수를 준다.

$$K^A_{11}(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-3r_0 t}, \qquad K^B_{11}(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-r_0 t} \tag{2.17}$$

관측가능량	사슬 A	삼각형 B
t = 1 s에서의 평균 귀환 P	0,472556	0,472556
t = 1 s에서의 스펙트럼 지수 d_s	0,729707	0,729707
t = 1 s에서의 국소 귀환 K_{11}	0,366525	0,578586

관측가능량	사슬 A	삼각형 B
$s = 1\ s^{-1}$에서의 라플라스 응답 G_{11}	0,500000 s	0,666667 s

그림 10은 같은 스펙트럼 지수와 차이를 보이는 국소 실험을 비교한다. 독립적으로 정한 $K_{11}(1\ s)$의 절대 측정 오차가 0,02 이하라고 하자. A의 허용 구간은 약 0,347-0,387, B는 0,559-0,599다. 두 구간은 겹치지 않는다. 주어진 두 모형의 부류에서는 이런 추가 관측 하나로 충분하다. 오차가 차이의 절반 수준인 약 0,106이면 구간들이 닿기 시작한다.

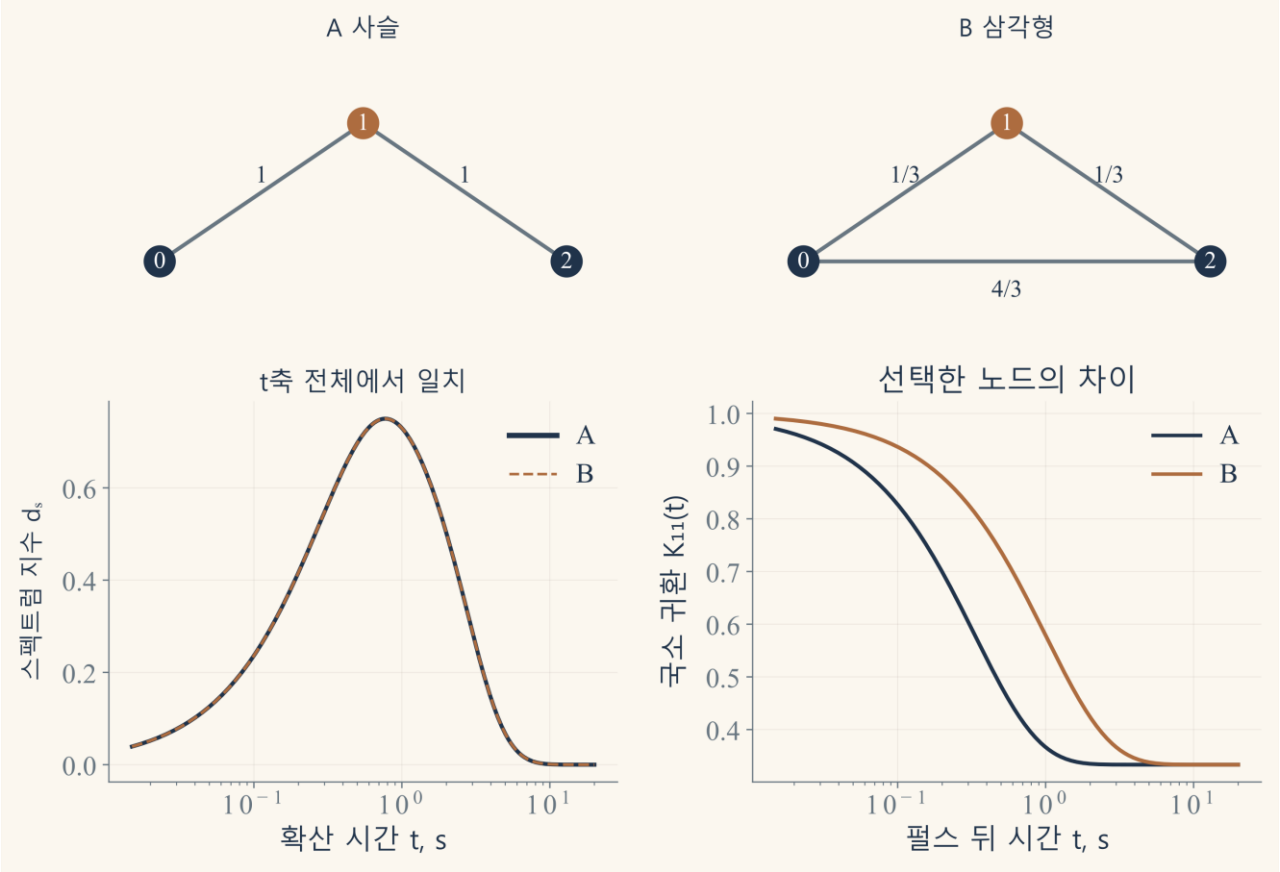


그림 10. 같은 고유값 0, 1, 3 s^{-1}를 가진 서로 다른 두 망. 지수 d_s는 시간축 전체에서 같다. 왼쪽 아래 그림은 유한 범위 0,015-20 s에서 곡선의 일치를 보여 준다. 노드 1의 국소 펄스 응답은 다르다. 도식의 가중치는 $r_0 = 1\ s^{-1}$ 단위다. 모든 선은 주어진 행렬로 계산했다.

이 결과에는 정확한 한계가 있습니다. 알려진 노드, 강도 및 오류 제한에서 두 개의 명명된 장치를 구별합니다. 임의의 알 수없는 네트워크는 훨씬 더 어려운 역 문제 남아있다. 그러나 평균화로 인해 어떤 정보가 손실되는지, 그리고 추가 검사가 실제로 첫 번째

지표에없는 데이터를 참조해야하는 이유는 이미 분명합니다. foundations.py 스크립트는 행렬, 테이블 및 도형을 재현합니다.

유한한 장치가 차원의 거짓 변화를 만드는 방식

대칭 조합적 그래프 라플라시안을 갖는 노드 N개의 유한 연결망을 생각하자. 매개변수 σ가 아주 작으면 지수 인자들은 거의 일이므로 규격화한 대각합도 일에 가까워진다. 로그 기울기는 영으로 간다. σ가 아주 크면 균일 분포에 해당하는 영 모드만 남는다. 대각합은 노드 수의 역수로 가고 기울기는 다시 영으로 간다. 그 사이에는 망의 기하 구조가 드러나는 구간이 있을 수 있다. 따라서 지극히 통상적인 유한 공간 이산화에서도 스펙트럼 차원이 작은 두 영역이 생긴다. 차원의 근본적 소멸을 보여 주는 증거가 아니다.

$$P_N(\sigma) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-\sigma\lambda_n}, \quad \lambda_0 = 0; \qquad P_N\left(0\right) = 1, \quad P_N\left(\infty\right) = \frac{1}{N} \tag{2.18}$$

유용한 범위의 하한은 이산성이나 장치 분해능으로, 상한은 계의 크기와 경계, 평형 도달 시간으로 정해진다. 이 한계들을 가정한 물리적 척도와 독립적으로 바꿔야 한다. 예를 들어 간격을 유지하고 노드 수를 늘리면 전체 크기 효과가 더 먼 곳으로 옮겨 가야 한다. 물리적 부피를 유지하고 간격을 줄이면 이산화의 영향이 바뀐다. 관심 전이가 기술 매개변수와 함께 이동하면 물리적 해석은 약해진다. 따라서 크기가 다른 여러 장치나 수치 격자가 더 매끄러운 곡선의 장치 하나보다 유익할 때가 많다. 그래프의 겉모양만이 아니라 척도의 의미로 결과의 견고성을 검증해야 한다.

로그 파생은 또한 소음을 증가시킵니다. 동일한 스무딩된 곡선으로부터 얻어진 인접한 치수 값은 일반적으로 상관되며 독립적인 관측치를 나타내지 않습니다. 과도한 스무딩은 고원을 만들 수 있으며, 불충분 한 스무딩은 많은 잘못된 전환을 만들 수 있습니다. 여러 합리적인 모델에 입력 값을 동시에 맞추고, 창 너비에 대한 견고성을 평가하고, 오류 공분산에 대한 정보를 저장하는 것이 더 신뢰할 수 있습니다. 이산 보행의 경우 패리티 효과가 추가됩니다: 일부 네트워크는 짝수 단계 후에 만 반환 할 수 있습니다. 지속적인 전파 매개 변수는 이러한 기술 구조를 제거하는 데 도움이되지만 다른 체계적인 영향 분석을 대체하지는 않습니다.

유용한 척도 범위는 유한 시험대의 두 한계 사이에 있다(그림 11).

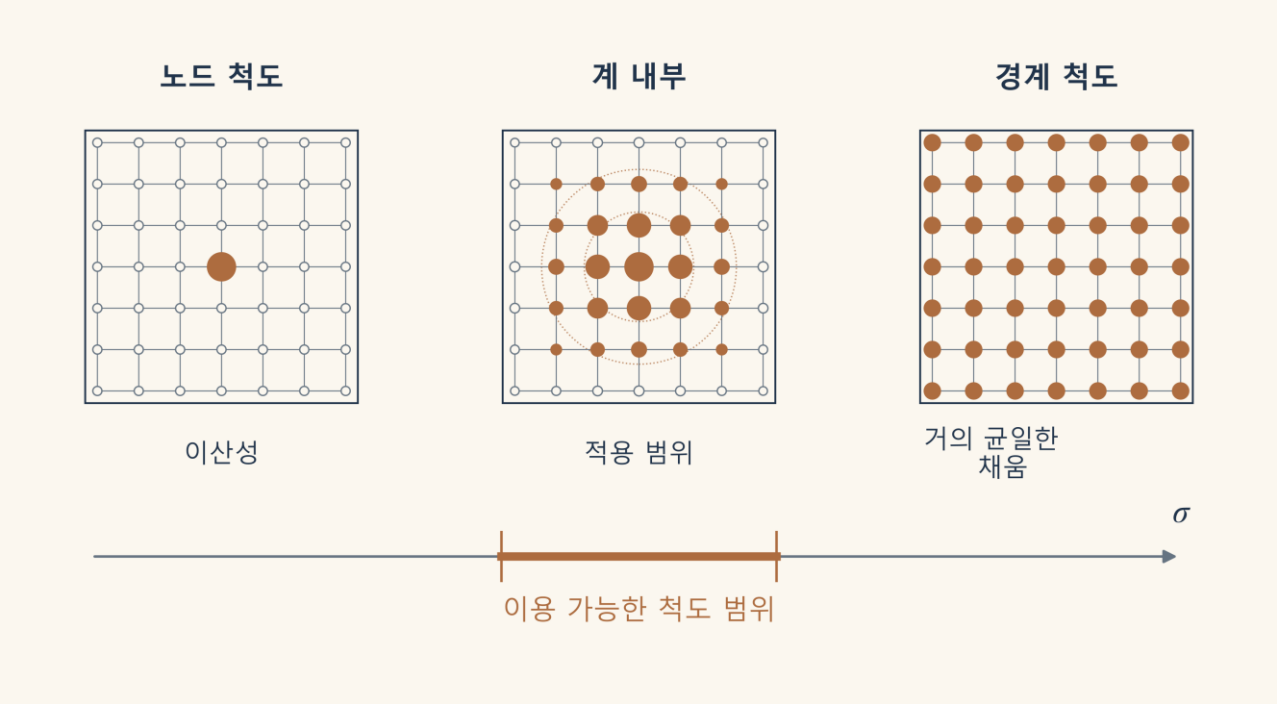


그림 11. 유한한 한 망의 세 정성적 영역은 개별 노드의 영향, 계 내부 전파, 경계에 이른 뒤 거의 균일하게 채워지는 상태다. 여기서 차원이나 유용한 창의 경계를 수치로 평가하지 않았다. 양 극단 사이 강조 영역은 척도 법칙을 찾으려면 장치의 이산성과 유한한 크기, 원시 신호 복원 정확도를 동시에 고려해야 함을 보여 준다.

멋진 수치 하나 대신 측정 명세

완전한 차원 추정 결과에는 중심값과 오차보다 많은 내용이 필요하다. 대상과 선택한 부피 측도, 전파 연산자, 사용 거리와 척도 범위를 명시해야 한다. 이어 직접 측정한 양과 기하학적 결론을 연결하는 전제를 열거한다. 예를 들어 공진기 스펙트럼은 내부 전파 법칙을 알아야 공간에 대한 정보가 된다. 매질이 있으면 결과는 우선 "기하 구조와 매질"의 공동계를 나타낸다. 측정의 가치를 줄이는 것이 아니다. 대상을 정확히 기술해야 다른 장치와 비교하고 발견한 지수가 정말 공간의 공통 성질에 해당하는지 볼 수 있다.

부피 차원과 스펙트럼 차원을 공동 분석하려면 특히 척도를 맞추어야 한다. 확산 매개변수는 영역 반지름과 같지 않으며 둘의 관계는 측정한 전파 법칙에서 도출한다. 비정상 동역학을 가진 계에서 정상 확산을 미리 가정하면 가로축을 만드는 단계부터 지수 비교가 편향된다. 비등방성도 검증해야 한다. 같은 평균 지수가 한 방향의 빠른 전달과

다른 방향의 느린 전달을 감출 수 있다. 따라서 평균 전에 방향별 응답을 살피고, 관측 효과가 통상적이지만 서로 다른 여러 경로의 합인지 밝히면 유용하다.

따라서 차원은 시스템에 대한 특정 질문의 결과가됩니다. 체적 방법은 반경이 증가함에 따라 사용 가능한 공간이 얼마나 많이 나타나는지 묻습니다. 스펙트럼 - 선택한 연산자의 모드가 어떻게 배열되어 있는지, 걸어 다니는 방법 - 방해가 얼마나 빨리 전파되는지를 묻습니다. 일반적인 모드에서는 답변이 일관되고 한 숫자로 말할 수 있습니다. 이 정권의 적용가능성의 한계에서 그들은 분화할지도 모른다. 기술적 인 점검 후에 지속되면 연구에 관심이있는 불일치입니다. 그러나 아직 유일한 새로운 이론은 아니다. 다음 단계는 알려진 수학적 시나리오에서 알 수없는 효과를 격리하기 위해 이미 이러한 동작으로 이어지는 기존 메커니즘을 연구하는 것입니다.

제3장 차원이 척도에 의존할 때

수치에서 함수로

이 장은 두 방식으로 읽을 수 있다. 주요 경로는 첫 절의 질문과 마지막 절의 비교 결론을 따른다. 중간 절들은 서로 다른 이론에서 척도 의존성이 생기는 방식을 설명한다. 더 전문적인 준비가 필요하며 계산 중심 읽기를 위한 전제들의 지도 역할을 한다.

차원을 척도 법칙으로 정한다면 해상도를 바꾸어도 법칙이 유지되는지 묻게 된다. 반드시 그렇지는 않다. 길고 좁은 영역은 횡방향 구조를 구별하지 못하는 과정에는 일차원으로, 더 짧은 파동에는 다차원으로 보일 수 있다. 이 평범한 예만 보아도 지수의 전환 자체에 양자중력이 필요한 것은 아니다. 더 급진적인 가능성은 근본적 기하 구조 자체나 그 동역학의 특징적 척도 법칙이 변하는 것이다. 이를 차원 흐름이라 부른다. 용어는 연구 척도에 대한 의존성을 뜻하며 달력상의 시간에 따라 세계가 반드시 변한다는 뜻은 아니다.

초기 분석에서는 두 극한값 사이의 매끄러운 보간을 쓰면 편리하다. 다음 공식에서 dIR은 큰 길이의 지수, dUV는 작은 길이의 지수이다. ℓ^*는 특성 전이를, 양의 매개변수 p는 전이의 급격함을 정한다. 가능한 자료의 매개화이며 자연이 바로 이 함수를 고르게 하는 메커니즘은 들어 있지 않다. 곡선 계산과 매개변수 추정, 맞춤 정밀도 비교는 가능하지만 공간의 양자이론을 유도할 수는 없다. 관측 기술의 공식과 물리적 전제에서 얻은 법칙의 차이는 연구 전반에서 유지해야 한다.

$$d\left(\ell\right) = d_{\mathrm{IR}} + \frac{d_{\mathrm{UV}} - d_{\mathrm{IR}}}{1 + \left(\ell/\ell_{*}\right)^{p}}, \qquad p > 0 \qquad (3.1)$$

보간의 유용성은 시험 가능한 질문의 공식화에서 분명합니다. 사용 가능한 범위 내에 과도 척도가 있습니까? 다른 관측가능량 사이에 일치합니까? 데이터에는 단조로운 전환, 여러 단계 또는 진동이 필요합니까? 충분히 유연한 기능이 설치의 소음 및 기술적 특징을 설명 할 수 있기 때문에 경쟁적인 설명이 사전에 확인되어야합니다. 분석 창이 변경됨에 따라 매개 변수 ℓ^*이 지속적으로 이동하는 경우 안정적인 척도의 증거는 거의 없습니다.

독립적인 절차가 호환 가능한 값을 생성하면 더 깊은 모델에 대한 기초가 있습니다. 다음 예는 유사한 차원 그래프가 상당히 다른 전제에서 발생할 수 있음을 보여 주며, 따라서 단순한 외부 유사성만으로는 충분하지 않습니다.

단순한 요소로 구성한 기하 구조

인과적 동적 삼각분할 접근에서는 인과적 조직 규칙을 정한 단체들의 이산 구성 앙상블로 기하 구조를 연구한다. 암비에른, 유르키에비치, 롤은 확산 절차로 이런 양자 앙상블의 스펙트럼 차원을 계산했다. 조사한 큰 척도에서는 사와, 작은 척도에서는 대략 이와 양립했다. 특정하게 정의한 양자중력 안에서 중요한 결과다. 여기서 수치적 '측정'은 생성한 기하 구조의 성질 측정이며 주변 공간에서 물리 검출기로 신호를 검출한 것이 아니다. 두 의미를 바꾸어 쓰면 이미 발견이 이루어졌다는 부당한 인상을 준다. [3]

이 계산의 가치는 즉각적인 실험을 약속하지 않고도 이해할 수 있습니다. 이는 형상을 합산하는 규칙이 개별 빌딩 블록과 다른 대형 척도 동작을 생성할 수 있음을 보여줍니다. 그런 다음 연속적인 한계에 대한 질문이 발생합니다. 블록이 더 작아지고 더 많아진다면, 관심의 구조가 매개 변수의 적절한 변화에서 살아남을 수 있습니까? 이 체크가 없으면, 결과는 선택된 이산화를 특성화할 수 있다. 사진은 적절한 비유를 제공합니다: 픽셀을 추가하면 개체를 임의로 변경하기보다는 이미지를 명확히 해야 합니다. 양자 기하학에서는 해상도를 변경하면 전체 구성의 가중치도 변경되기 때문에 문제가 더 어려워집니다.

또 다른 어려움은 그래프 축의 물리적 척도에 관한 것이다. 모델 내부의 확산 단계 수는 추가 계산없이 미터 또는 장치의 에너지로 대체 될 수 없습니다. 내부 파라미터를 관찰된 값과 비교하고, 특성 길이를 결정하고, 특정 프로브에 대한 의존성을 확인할 필요가 있습니다. 수학적 한계가 잘 통제 되더라도 실험과의 의사 소통은 별도의 작업으로 남아 있습니다. 따라서, 치수의 수치 흐름으로부터의 정확한 파생은 조건적인 형태를 갖는다: 만약 연구 하에서의 구조가 세계의 미세한 기하학을 기술하고, 선택된 프로브가 실제 관측가능량과 관련되어 있다면, 대응하는 스케일링이 추구될 수 있다. 조건의 두 부분은 자신의 증거가 필요합니다.

완성된 좌표 격자 대신 인과 순서

인과집합은 다른 최소 요소 집합에서 시작한다. 이산 사건들과 어떤 사건이 다른 사건의 인과적 과거에 있을 수 있는지 나타내는 선행 관계를 정한다. 관계는 추이성을 만족해야 하고 연결된 두 사건 사이의 중간 요소 수는 유한해야 한다. Bombelli, Lee, Meyer, Sorkin의 원래 연구는 이 구조를 미시 시공간의 기초로 제안했다. 그러면 기하학적 성질을 완성된 좌표로 넣는 대신 순서와 요소 수에서 복원해야 한다. 출발 개념을 이렇게 바꾸면 차원이 필수 입력이 아니라 연결 분석의 결과가 된다는 점이 흥미롭다. [4]

한 추정법은 두 사건 사이 영역인 인과 다이아몬드 안의 사건 수와 인과적으로 연결된 쌍의 수를 쓴다. 평탄한 시공간의 푸아송 분포에서 앙상블 평균의 비는 감마함수를 통해 차원과 연결된다. 공식의 C1은 사건 수, C2는 순서가 있는 인과 쌍의 수이며 괄호는 앙상블 평균이다. 방정식을 역으로 풀어 차원을 추정할 수 있다. 작은 표본 하나에서 평균 대신 관측 수를 대입하려면 편향 분석이 필요하다. 평균의 비선형 변환과 변환한 양의 평균이 일반적으로 같을 필요가 없다는 점이 중요하다. [5]

$$\frac{\langle C_2 \rangle}{\langle C_1 \rangle^2} = \frac{\Gamma\left(d+1\right)\Gamma\left(d/2\right)}{4\Gamma\left(3d/2\right)} \tag{3.2}$$

Abajyan과 Carlip은 여러 차원의 민코프스키 공간을 근사하는 인과집합의 작은 부분집합을 연구했다. 추정 차원이 줄어들었으며 극한은 고립 사건과 결합 없는 집합의 처리에 의존했다. 한 규칙에서는 이 근처, 다른 규칙에서는 영 근처의 거동을 얻었다. 하나의 아름다운 이야기를 위해 숨길 결과가 아니다. 연구하는 양에는 집합 구조와 어떤 자료를 기하학적으로 유의하다고 볼지의 선택이 함께 들어간다. 미래 장치에는 차원의 특이값을 찾기 전에 사건 선별과 빈 관측 제외 규칙을 정해야 한다는 실용적 요구가 따른다. [5]

그림 12는 단체로 구성한 기하 구조와 인과 순서를 비교한다.

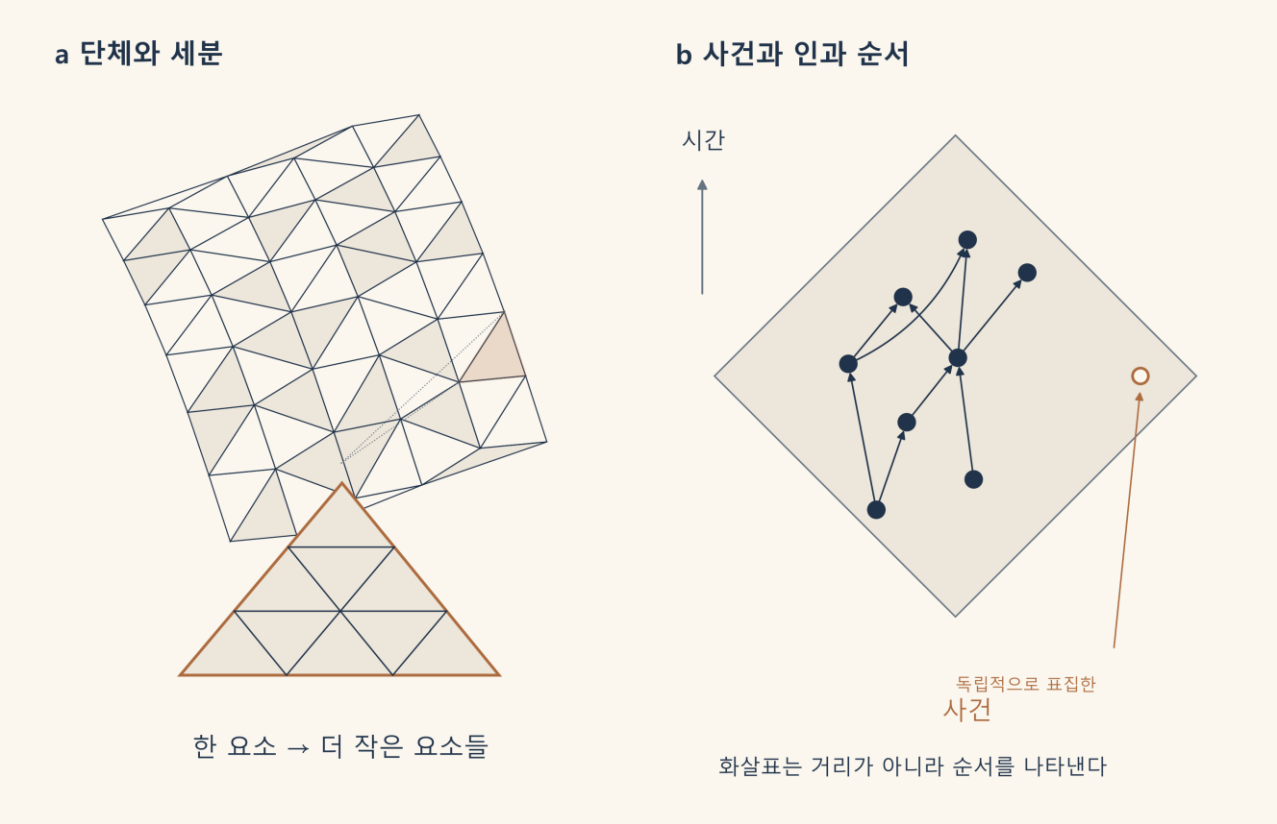


그림 12. 출발 구조를 정하는 서로 다른 두 방법. 왼쪽은 삼각형 요소들로 기하학적 표면을 구성하고 그중 하나를 세분한 뒤의 모습을 보인다. 오른쪽은 사건들을 인과 관계로 정렬한다. 화살표는 직접 관계이며 추이적 관계는 사슬에서 따라 나온다. 속이 빈 구릿빛 사건은 이 표본의 다른 모든 사건과 공간꼴로 분리되어 있다. 학습용 구성이며 양자 앙상블의 배치나 측정 자료가 아니다.

좌표를 없애지 않고 줄어드는 스펙트럼 차원

비등방적 척도 변화 메커니즘은 특히 시사적이다. Petr Hořava의 연구에서는 공간 좌표와 시간을 서로 다른 거듭제곱으로 척도 변환한다. 지수 z가 이 차이를 나타내며 D는 공간 좌표 수이다. 얻은 시공간 스펙트럼 차원은 일에 D 대 z의 비를 더한 값이다. 공간 좌표가 셋이고 z가 삼이면 결과는 이이다. 좌표계의 두 축이 사라지지 않는다. 스펙트럼 지수를 정의하는 연산자의 거동이 바뀐다. 따라서 "공간이 이차원이 된다"는 말은 수학적 계산이 완전히 올바르고 결과가 견고해도 의미를 명확히 해야 한다. [6]

$$\mathbf{x} \mapsto b\mathbf{x}, \quad t \mapsto b^{z}t, \qquad d_s = 1 + \frac{D}{z} \qquad (3.3)$$

거듭제곱 결과는 스펙트럼 적분에서 변수를 바꾸어 확인하면 편리하다. 유클리드화한 표기에서 시간 파수 Ω는 주파수를 c로 나눈 값이고, k는 공간 파수이며 k*는 단위를 맞춘다. Ω를 새 변수를 σ의 제곱근으로 나눈 것으로 바꾸면 시간 적분은 마이너스 이분의 일의 지수를 준다. 공간 변수 치환은 마이너스 D를 2z로 나눈 지수를 준다. 지수를 더하고 로그 미분하면 위의 식이 돌아온다. 이 계산은 스펙트럼 대각합의 연산자 척도 변화에 대한 의존성을 확립할 뿐, 그 자체로 실제 신호의 인과적 전파를 정하지는 않는다.

$$P(\sigma) \propto \int d\Omega\, d^{D}k\, e^{-\sigma\left[\Omega^{2}+k^{2z}/k_{*}^{2z-2}\right]} \propto \sigma^{-\left(1+D/z\right)/2} \tag{3.4}$$

이 예는 해석에 필요한 엄밀함을 정한다. 장비가 특이한 모드 밀도를 찾으면 먼저 장의 분산 법칙이 바뀌었는지 물어야 한다. 연산자가 고차 공간 미분을 포함하면 형식적 열핵은 통상적인 양의 확산 확률을 기술하지 못해도 스펙트럼 대각합은 정의될 수 있다. 선호되는 시간 엽층분해를 도입하면 필요한 영역에서 관측된 상대론적 대칭성이 복원되는지 검증해야 한다. 이런 질문은 연구를 금지하지 않는다. 시계와 신호, 물질 운동을 일관되게 설명할 이론으로 나아가려면 수학 모형에 어떤 계산을 더해야 하는지 정한다.

모든 공간 방향을 유지한 채 스펙트럼 지수의 변화를 보여 줄 수 있다(그림 13).

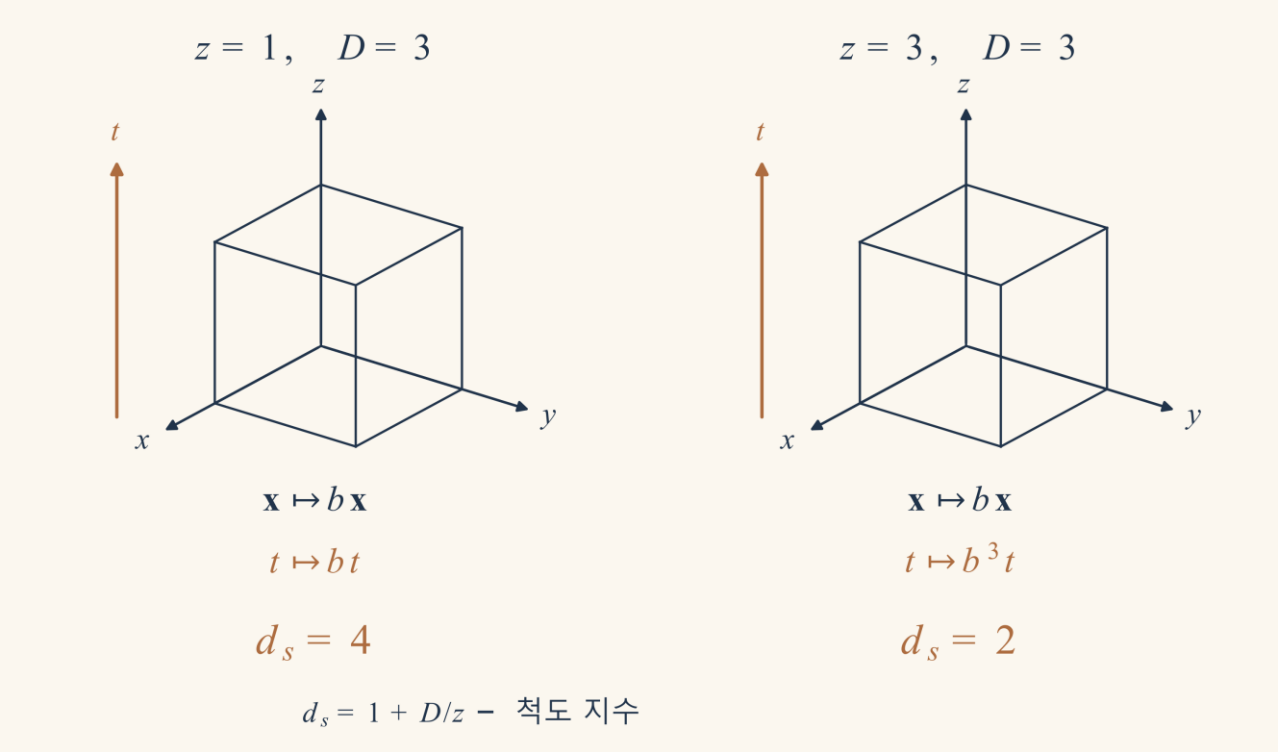


그림 13. 두 도식 모두 공간 좌표 셋을 유지한다. 다른 것은 시간의 척도 법칙이다. z = 1에서는 공간의 법칙과 일치하지만 z = 3에서는 지수가 다르다. 고려하는 이론 모형에서 $d_s = 1 + D/z$는 각각 4와 2를 준다. 두 번째 결과는 공간축을 없앴다는 뜻이 아니며 확립된 자연의 성질을 그린 것도 아니다.

상호작용의 척도 의존성

점근적 안전성 계획은 높은 에너지에서 중력 상호작용이 재규격화군의 비자명한 고정 영역으로 접근할 가능성을 다룬다. 라우셔와 로이터의 연구는 해당 전제 아래 스펙트럼 차원이 사에서 이로 변할 수 있음을 보였다. 비슷한 지수에 이르는 다른 경로이며 출발 연구 대상은 유효 동역학의 척도 의존성이다. 결론의 조건부 지위를 유지해야 한다. 이 계획 안에서 일관된 결과가 있다고 자연이 바로 그 고에너지 영역을 실현한다고 증명되지는 않는다. 더욱이 접근 가능한 실험실 장비로 발현을 측정할 방법이 자동으로 정해지지는 않는다. [7]

가장 단순한 표기는 변칙적 척도 변화의 역할을 보여 준다. 사차원에서 광속과 환산 플랑크 상수가 일인 단위를 쓰면 유효 뉴턴 상수와 운동량 척도의 제곱으로 무차원 중력 결합을 만들 수 있다. 그 변화에는 통상적인 차원 기여와 추가 기여 η가 들어간다. 결합이

영이 아닌 고정점에 이르면 합이 영이어야 한다. 이 대수 조건은 큰 운동량에서 연산자의 거동이 순진한 고전적 연장과 왜 크게 다를 수 있는지 설명한다. 그러나 필요한 고정점의 존재와 전체 궤적의 물리적 허용성이 이 한 줄에서 자동으로 나오지는 않는다.

$$g(k) = k^2 G(k), \qquad k\frac{dg}{dk} = \Big[2 + \eta(k)\Big] g(k), \qquad g_* \neq 0 \Rightarrow \eta_* = -2 \tag{3.5}$$

이런 구성의 검증에는 전제의 정확한 귀결과 전제 자체의 정확도를 구분해야 한다. 계산에서는 유효 작용의 가능한 항 공간을 제한한 뒤 기술을 확장해도 결과가 얼마나 견고한지 검증하곤 한다. 여러 근사가 안정적이어도 완전한 증명이나 관측을 대신하지는 않지만 프로그램의 지속을 정당화할 수 있다. 독자에게 중요한 것은 결론의 어느 부분이 절단에, 어느 부분이 관측가능량 선택에 의존하며 무엇이 일반 구조에서 나오는지 따지는 평가 방식이다. 접근법이 최종 이론인지 오류인지 논쟁하는 것보다 유용하다. 실제 연구의 대부분은 두 극단 사이에 있다.

이론에서 관측으로 옮겨야 할 것

고려 된 접근법은 다른 메커니즘으로부터 척도 의존성을 얻습니다: 형상의 앙상블, 인과 관계 순서, 분산 법 또는 효과적인 상호 작용. 하나의 제한 번호의 우연성은 아직 메커니즘을 선택하지 않습니다. 2 장에서 두 개의 특정 네트워크는 모든 척도에서 동일한 스펙트럼 차원을 가졌지만 로컬 응답은 다릅니다.

따라서 선택된 모델의 경우 작업은 단일 표시기가 아닌 관측가능량 세트로 시작됩니다. 첫째, 모든 후보자가 동일한 방식으로 설명하는 값이 계산됩니다. 그런 다음 예측이 다른 효과를 찾습니다. 여기점, 방향, 프로브 유형 또는 사용 가능한 시간 범위를 변경합니다. 소개 삼 노드 실험은 두 개의 유한 네트워크에 대해이 절차를 완료합니다. 그것은이 장의 모든 양자 중력 접근법 사이의 실험적 구별을 설정하지 않습니다.

물리적 공간으로 넘어갈 때 추가 측정마다 탐침 모형과 연결해야 한다. 예를 들어 형식적 확산 매개변수는 표기만 바꾼다고 광학 주파수가 되지 않는다. 10-12장에서는 구체적이고 제한된 모형들에서 이런 연결을 명시한다. 먼저 이용 가능한 모드 집합의 변화를 해석적으로 추적할 수 있는 콤팩트 방향의 예가 필요하다.

제4장 숨겨진 방향과 합성 방향

닫히는 방향

추가 방향이 끝없이 뻗어야 할 필요는 없다. 원을 따른 좌표처럼 닫힐 수 있다. 원이 관측자의 분해능에 비해 작으면 그 방향의 위치 차이를 구별하기 어렵다. 수학적 좌표가 사라진다는 뜻은 아니다. 선택한 에너지와 관측 방식에 접근 가능한 여기 집합이 바뀐다. 가장 단순한 예는 통상 공간과 반지름 R인 원의 곱이다. 좌표가 y인 점과 y에 원의 둘레를 더한 점을 같은 점으로 간주한다. 이 규칙은 더 높은 차원의 외부 공간에 넣은 관 그림 없이도 콤팩트 방향을 정의한다.

$$\mathcal{M} = \mathbb{R}^{D} \times S_{R}^{1}, \qquad y \equiv y + 2\pi R \qquad (4.1)$$

추가 좌표로 상호작용을 통합한다는 발상에는 오랜 역사가 있다. Oskar Klein은 1926년에 추가 변수에 대한 장의 주기적 의존성을 포함하여 오차원 상대론적 구성과 양자 기술의 연결을 연구했다. 이 역사는 새로움의 평가에 중요하다. 숨은 닫힌 방향의 가정 자체는 이미 새 가설이 아니다. 현대의 연구 기여는 일관된 동역학과 관측 가능한 장들과의 구체적 상호작용 메커니즘, 새로운 구별 가능한 귀결, 더 민감한 검증법에 있어야 한다. 기하학적 그림의 반복은 학습에 유용하지만 이 추가 단계들을 대신하지 못한다. [8]

콤팩트성은 국소와 전역을 구분하는 데도 도움이 된다. 점의 충분히 작은 근방에서 원은 직선과 비슷하고 곱공간은 독립 공간 방향이 하나 더 많다. 원 전체를 포괄하는 척도에서는 영역을 더 키워도 그 방향에 새 위치가 열리지 않는다. 따라서 특이점도, 점이 다른 종류의 대상으로 변하는 일도 없이 부피 지수가 바뀐다. 다만 구체적인 관측가능량은 연구하는 장이 추가 좌표를 따라 움직일 수 있는지에 달려 있다. 부분공간에 제한된 장은 이를 직접 전혀 느끼지 못할 수도 있다. 따라서 기하 구조와 장의 운동 규칙을 함께 정해야 한다.

콤팩트 방향은 모형에 남아 있으면서 거친 분해능에서는 구별되지 않는다(그림 14).

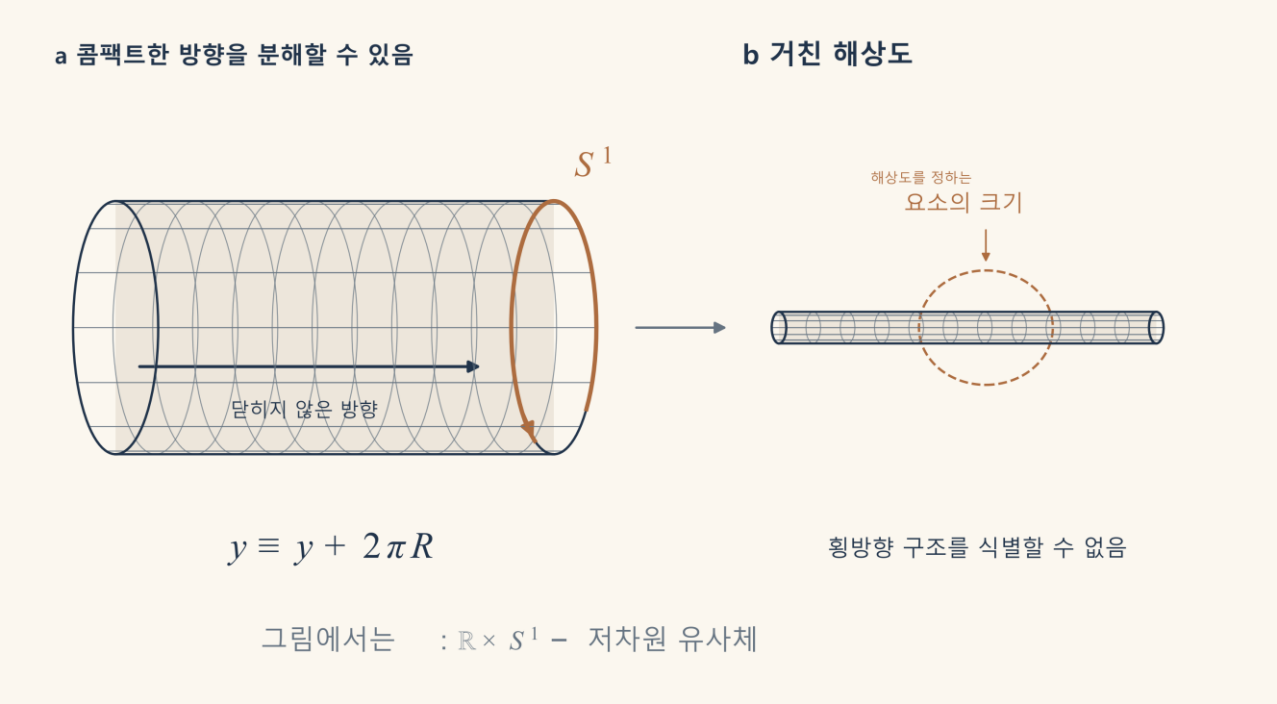


그림 14. 닫히지 않은 방향과 원의 곱을 저차원 유사체인 원기둥으로 나타냈다. 해상도가 충분하면 콤팩트 방향의 운동을 보지만, 거친 관측 요소로는 횡방향 구조를 구별하지 못한다. 원이 물리적으로 사라지는 것은 아니다. 그림에 쓴 외부 부피는 시각화 수단이며 공간 $\mathbb{R}^D \times S^1$에 새 가설을 추가하지 않는다.

주기성이 모드의 사다리가 되는 방식

스칼라장이 콤팩트 방향을 따라 자유롭게 전파하며 한 바퀴 뒤에 같은 값을 갖는다고 하자. y 의존성을 주기 조화함수의 급수로 전개할 수 있다. 정수 n은 원 둘레에 들어가는 주기 수이며 각 함수 φn은 나머지 좌표에서의 해당 모드이다. 실수장의 양과 음 번호 계수들은 복소켤레로 연결된다. 이미 이 단계에서 추가 기하 구조는 잠재적으로 측정 가능한 귀결을 갖는다. 새 방향의 임의의 연속 운동량 대신 이산 집합이 생긴다. 경계 조건의 귀결이며 독립적인 새 자연법칙이 아니다.

$$\Phi(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi_n(x) e^{iny/R}, \qquad p_y = \frac{n\hbar}{R} \qquad (4.2)$$

가장 단순한 평면 공간의 경우, 추가 모멘텀은 다른 공간 구성 요소와 동일한 방식으로 상대 론적 에너지에 들어갑니다. 열린 방향만을 설명하는 관찰자의 경우, 그의 기여는 해당

모드의 질량이 증가하는 것처럼 보입니다. 아래 공식에서 m0은 원래 필드의 질량이며 p은 사용 가능한 열린 방향의 운동량입니다. 반지름이 작을수록 첫 번째 추가 여기 전에 에너지 간격이 더 커집니다. 따라서, 제한된 에너지 범위에서 새로운 모드의 부재는 충분히 작은 콤팩트한 방향의 존재와 일치할 수 있다. 그러나 정량적 결론은 소스가 이러한 모드를 흥분시키는 방법과 검출기가이를 기록하는 방법을 알아야합니다.

$$E_n^2 = c^2|\mathbf{p}|^2 + m_0^2 c^4 + \frac{n^2\hbar^2 c^2}{R^2}, \qquad m_n^2 = m_0^2 + \frac{n^2\hbar^2}{c^2 R^2} \tag{4.3}$$

질량 사다리는 특정 전제 아래 얻었다. 방향은 일정한 반지름의 원이고 장은 자유장이며 배경 기하 구조는 평탄하고 경계조건은 엄밀히 주기적이다. 조건이 다르면 스펙트럼도 바뀐다. 추가 상호작용은 준위를 옮기고 축퇴를 깨거나 개별 모드의 접근 가능성을 줄일 수 있다. 따라서 발견한 공명열을 자동으로 추가 공간의 흔적이라고 불러서는 안 된다. 통상적인 계의 내부 상태도 이산 스펙트럼을 만든다. 기하학적 해석에는 준위와 결합, 전파 법칙, 외부 조건 의존성을 맞추어야 한다. 하나의 반지름과 동역학에서 더 많은 독립적 귀결을 도출할수록 가설의 내용이 풍부해진다.

콤팩트 좌표의 주기성은 원형 조화함수 계열로 나타내면 편리하다(그림 15).

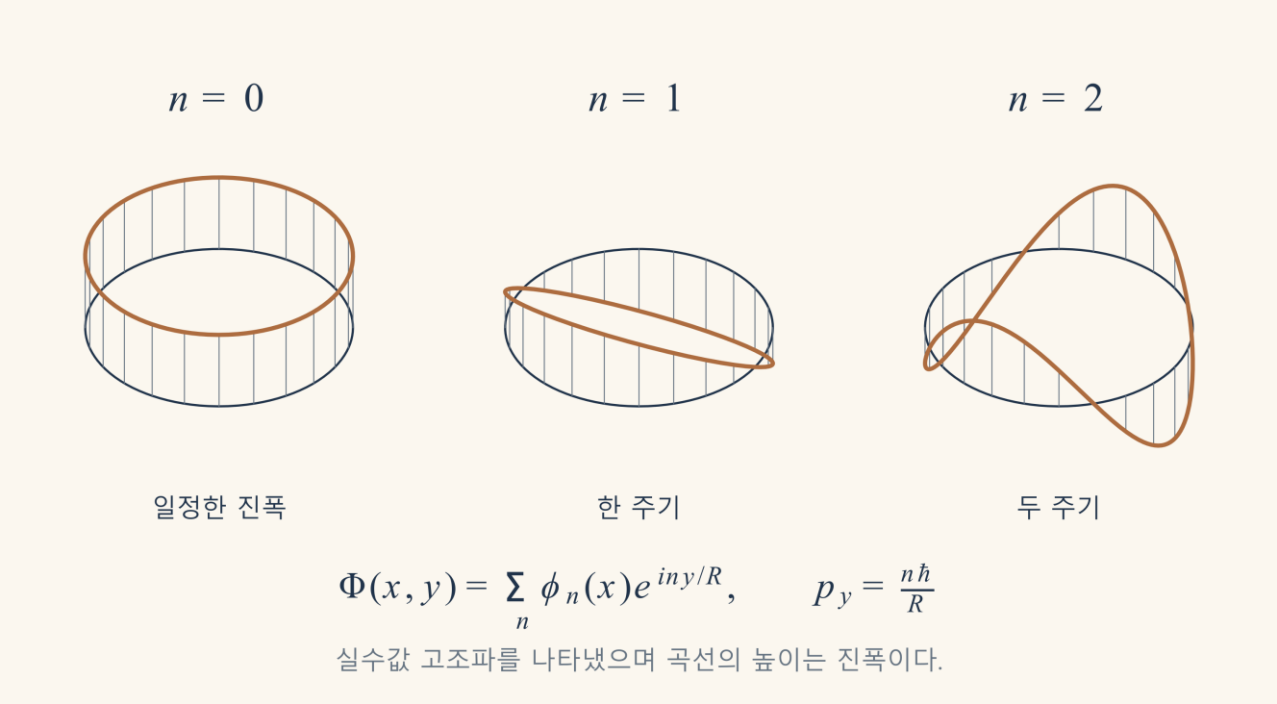


그림 15. 지수 n = 0, 1, 2인 실수 고조파를 같은 콤팩트 원 위에 나타냈다. 구릿빛 곡선의 높이는 모드 진폭이며 또 다른 공간 좌표가 아니다. 주기성은 정수 모드 번호와 그에 대응하는 추가 운동량의 이산값을 허용한다. 기저를 보여 주는 수학적 예이며 제작한 검출기의 스펙트럼이나 독립적인 새 방향들의 집합이 아니다.

콤팩트 방향의 열핵 대각합

이제 콤팩트성이 스펙트럼 차원에 어떻게 드러나는지 계산할 수 있다. 통상 라플라시안의 원 방향 고유값은 이산 파수의 제곱이다. 닫히지 않은 방향들은 이전 장의 익숙한 가우스 인자를 준다. 규격화한 열핵 대각합은 이 인자와 콤팩트 모드의 정수 번호에 대한 합을 곱해 얻는다. 원 둘레로 나누어 전체 공간 부피에 대해 규격화한다. 매개변수 σ의 차원은 여전히 넓이이다. 여기서는 공간 기하만 다룬다. 시간 방향은 포함하지 않으므로 적절한 명확화 없이 수치들을 시공간 차원과 직접 비교할 수 없다.

$$P(\sigma) = \frac{\left(4\pi\sigma\right)^{-D/2}}{2\pi R} \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-\sigma n^2 / R^2} \qquad (4.4)$$

σ가 반지름 제곱보다 훨씬 크면 영이 아닌 번호들은 모두 지수적으로 억제된다. 합에는 일만 남고 대각합 감소의 지수는 닫히지 않은 D개 방향만으로 정해진다. σ가 반지름 제곱보다 훨씬 작으면 여러 모드가 합에 참여해 n에 대한 가우스 적분으로 근사할 수 있다. 적분은 σ의 제곱근에 반비례하는 추가 인자를 준다. 따라서 짧은 척도의 공간 스펙트럼 차원은 하나 늘어난다. 양자중력 가정 없이 통상 라플라시안과 선택한 콤팩트 기하만으로 나오는 결론이다. 그러므로 방법 검증의 기준으로 특히 유용하다.

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\sigma n^2/R^2} \simeq \sqrt{\pi}\,\frac{R}{\sqrt{\sigma}} \quad \left(\sigma \ll R^2\right), \qquad d_s \to \begin{cases} D+1, & \sigma \ll R^2, \\ D, & \sigma \gg R^2. \end{cases} \tag{4.5}$$

극한 근사 없이 로그미분하면 이 모형의 다음 정확한 공식을 얻는다. 합들의 비는 열적 가중치를 준 모드 번호의 평균제곱이다. 추가 여기가 점차 참여하는 방식을 보여 준다. 닫히지 않은 방향이 셋이면 공간 지수는 삼과 사 사이에서 바뀐다. 통상적인 유클리드화한 시간을 따로 더하면 해당 시공간 값들은 하나씩 더 크다. 변화 방향은 앞서 논한 짧은 척도의 감소와 반대이다. 서로 다른 메커니즘을 비교하므로 모순이 아니다. 오히려 척도와 관측의 연결을 올바르게 확립하면 전이의 부호와 형태가 모형 구별에 도움이 될 수 있다.

$$d_s(\sigma) = D + \frac{2\sigma}{R^2}\,\frac{\sum_n n^2 e^{-\sigma n^2/R^2}}{\sum_n e^{-\sigma n^2/R^2}} \tag{4.6}$$

그림 16은 닫히지 않은 세 공간 방향과 원 하나의 전이를 보여 준다. 짧은 확산 척도에서는 콤팩트 모드 사다리를 분해하고 긴 척도에서는 영 모드만 남는다. 그래프의 매개변수는 반지름 제곱으로 규격화했다. 특정 장치의 물리적 시간에는 별도의 전달계수가 필요하다.

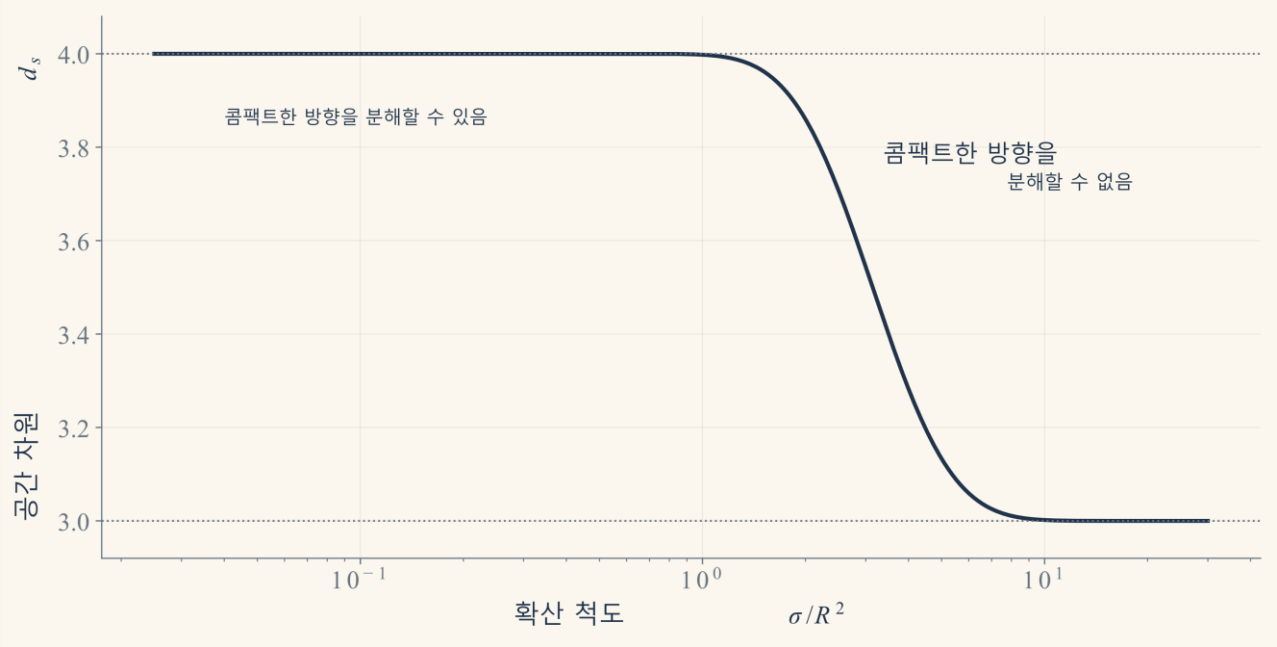


그림 16. 모형 $R^3 \times S^1$의 공간 스펙트럼 차원. 곡선은 열핵 대각합으로 계산했으며 작은 척도에서 콤팩트 방향이 분해됨을 보여 준다. 이는 해석 모형이다. 확산 매개변수의 척도는 원의 반지름으로 정해지며 광학 장비의 주파수 척도와 직접 같지는 않다.

장비가 실제로 볼 수 있는 것

실제 장치는 공간 방향 수를 화면에 직접 내놓지 않는다. 강도와 주파수, 위상, 운동량, 도착 시간을 기록한다. 이론의 과제는 콤팩트 좌표가 있을 때 이 자료들의 분포를 예측하고 통상 기술의 분포와 비교하는 것이다. 분광 방식에서는 추가 모드 계열을, 전파 방식에서는 군속도와 여기 문턱의 변화를 찾을 수 있다. 그러나 이 효과들은 장과 기하 구조 사이에 선택한 하나의 상호작용에서 나와야 한다. 한 모형의 스펙트럼과 다른 모형의 신호 증폭을 가져오고 검출기 민감도는 따로 정할 수 없다. 이런 조합은 검증할 물리 시나리오를 정하지 못한다.

서로 다른 관측 경로의 비교가 특히 유용하다. 보편적인 추가 방향을 가정하면 어떤 장이 그 방향에 민감하며 매개변수들이 왜 연결되거나 다른지 설명해야 한다. 한 재료에서만 편차가 발견되면 더 넓은 근거를 세우기 전까지는 그 재료의 성질을 나타낼 가능성이 크다. 반대로 가설이 선택적 상호작용을 허용할 수도 있다. 그때 보편성을 결론에 암묵적으로 넣어서는 안 된다. 여러 장의 비교는 마법 같은 증명법이 아니다. 비슷한

신호를 낼 수 있는 통상 상호작용까지 포함해 서로 다른 예측을 미리 계산했을 때만 양립 가능한 모형 집합을 줄인다.

콤팩트 방향의 반지름도 실제 세계의 임의 조절 손잡이로 볼 수 없다. 동역학적 양이라면 안정성과 외부 작용에 대한 반응 모형이 필요하다. 수학 문제의 외부 조건으로 고정했다면 그 조건을 명시해야 한다. 기술 장치로 차원을 바꿀 가능성을 논하려면 공식에 R이 존재한다는 것보다 훨씬 많은 내용이 필요하다. 작용의 발생원과 에너지 수지, 상태 안정성, 관측 결과를 계산해야 한다. 이런 메커니즘이 없을 때에는 가설 검증이나 귀결의 모형화라고 말하는 것이 정확하다. 연구 대상을 유지하면서 이용 가능한 수학적 예를 존재하지 않는 장치의 약속으로 바꾸지 않는 길이다.

합성 방향을 만드는 방법

합성 차원은 내부 상태나 모드를 추가 축의 이웃 위치처럼 연결할 때 생긴다. 그 축의 지표는 원자의 에너지 준위, 공진기의 주파수 모드, 또는 다른 제어 가능한 상태일 수 있다. 전이가 주로 이웃 번호를 연결하면 역동은 사슬 위의 운동과 비슷해진다. 아래의 가장 단순한 해밀토니안에는 전이 진폭 Jm과 고유 주파수 이동 δm이 들어 있다. 생성 및 소멸 연산자는 선택한 모드를 기술한다. 짝을 이루는 항의 복소켤레는 에르미트성을 보장하고, 환산 플랑크 상수의 인자는 주파수 매개변수를 에너지 단위로 바꾼다. 물리적 구성은 이 연결의 그림만이 아니라 연결 자체를 구현해야 한다.

$$H = \hbar \sum_{m} \left(J_m a^{\dagger}_{m+1} a_m + J_m^{*} a^{\dagger}_m a_{m+1} \right) + \hbar \sum_{m} \delta_m \, a^{\dagger}_m a_m \tag{4.7}$$

로제와 공동연구자들의 극저온 원자 실험에서는 이차원 위상 펌핑으로 사차원 양자 홀 효과에 연결된 응답을 연구했다. 저자들은 두 번째 천 수에 해당하는 위상적 특성을 측정했다. 이는 수학적으로 높은 차원의 동역학을 제어 가능한 실험실 구현으로 실현할 수 있음을 보여 준다. 장치 주변에 자유로운 네 번째 공간 방향을 발견했다는 뜻은 아니다. 합성 좌표는 매개변수와 계의 내부 구조를 통해 들어간다. 그래서 실험이 유용하다. 같은 차원의 물리 공간 없이도 고차원 모형의 예측을 검증할 수 있다. [9]

이러한 표현의 실질적인 비용은 제한된 구현입니다. 합성 축은 유한한 상태 수를 가지며, 전이는 동일하지 않을 수 있으며, 일부 상호 작용은 인위적으로 정의된 이웃에 대해 장거리로 유지됩니다. 또한 소음과 손실은 서로 다른 모드에 영향을 줄 수 있습니다. 따라서 대상 모델의 어떤 특성이 실제로 재현되고 어떤 것이 누락되었는지 알아내야합니다. 성공적인 스펙트럼 시뮬레이션은 모든 상호 작용과 인과 관계의 시뮬레이션을 보장하지 않습니다. 이러한 정밀도는 근본적인 검색에도 유용합니다: 그것은 비교되는 수학적 구조에서 측정되는 객체를 분리하고,이 비교의 경계를 정량적으로 확립하도록 가르칩니다.

연결을 유지하면서 물리적 장치와 합성 축을 따로 보여 주면 유용하다(그림 17).

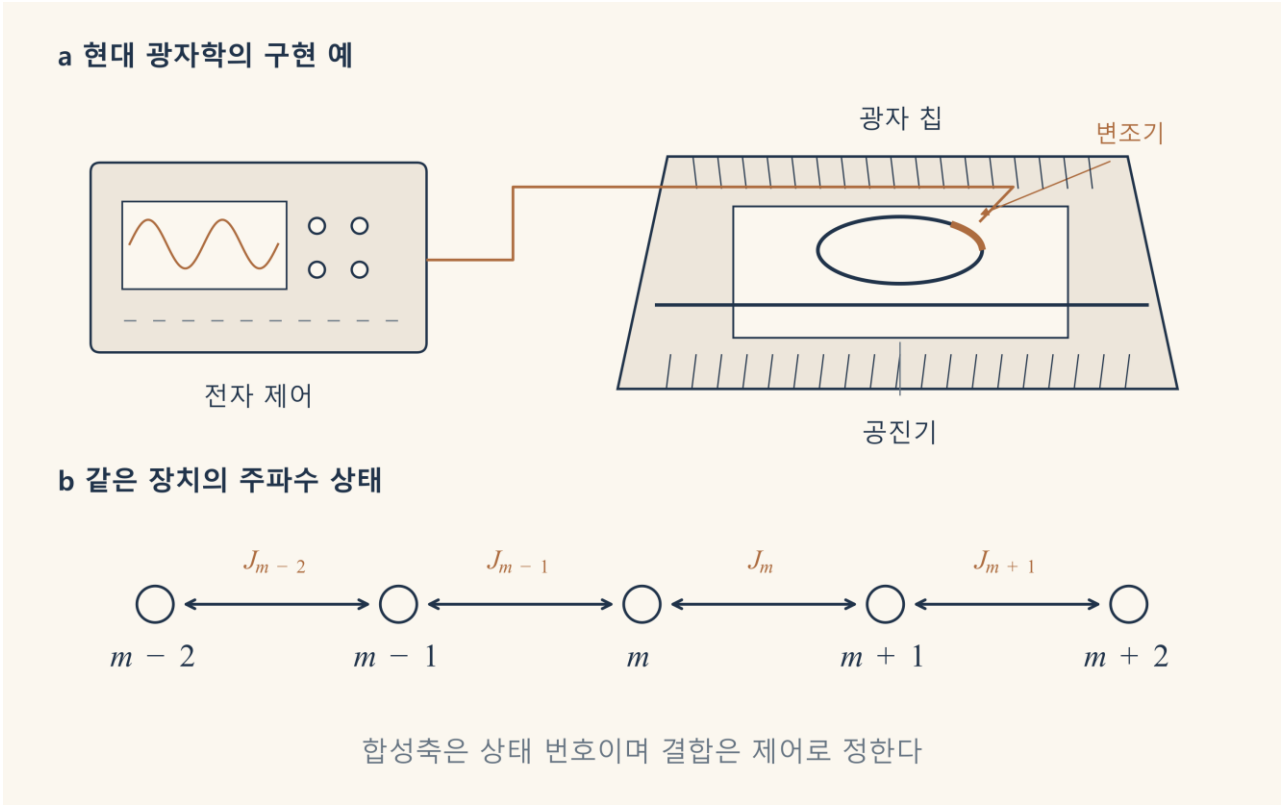


그림 17. 합성 방향의 현대적 구현을 보여 주는 예로 칩 위 광자 공진기와 변조기, 전자 제어를 그렸다. 아래 사슬은 같은 장치의 주파수 상태들이며 이웃 상태는 계수 J를 가진 제어 가능한 전이로 연결된다. 그 순번이 합성 좌표의 역할을 한다. 완성된 설계나 특정 논문에서 가져온 그림이 아니며 사슬의 공간 길이는 도식상의 관례다.

구별 방법을 검증하는 실험실

실험실 모형을 쓰면 구조를 아는 장치를 방법의 검증 대상으로 제시할 수 있다. 2장의 세 노드 망이 이미 이런 대조를 제공했다. 전체 스펙트럼은 같지만 국소 여기로 구조를 구별했다. 합성 방향은 이 가능성을 확장한다. 접근 가능한 상태 수를 바꾸고 전이 사슬을 닫거나 제어한 손실을 도입하면서 어떤 징표가 유지되는지 검증할 수 있다.

콤팩트 모형의 다음 질문은 다르다. 어떤 물리적 발생원이 모드 사다리를 여기하고 어떤 검출기가 그것에 민감한가? 제10장에서는 정적 퍼텐셜과 동적 전달을 같은 연산자로부터 유도하는 스칼라 탐침 하나를 고른다. 이는 구체적인 예측을 주며 통상적인 추가 장과 비교할 수 있게 한다. 이런 검증은 발생원과 모드 사이의 결합 법칙에 의존한다.

합성 시험대는 제어된 구조에서 복원 방법을 검증한다. 콤팩트 방향은 물리적 기하 구조의 가능한 구성을 정한다. 두 과제에는 공통 수학이 있지만 각각 고유한 측정 언어가 필요하다. 다음 장에서는 기하학적 기술의 또 다른 원천인 양자 자유도 사이의 관계를 살펴본다.

제5장 양자적 관계에서 나오는 기하 구조

기하 구조의 발생이 뜻하는 것

'공간이 생겨난다'는 말은 어떤 순간까지 빈 공간이 있다가 그 안에 공간이 나타난다는 듯 들린다. 물리 이론으로서는 보통 너무 문자 그대로의 그림이다. 발생은 다른 수준의 기술을 뜻할 수 있다. 원래 변수에는 직접적인 기하학적 의미가 없지만 그 집단적 거동은 거리와 이웃 관계, 장의 언어를 허용한다. 온도는 이런 수준 간 전이의 익숙한 예지만 비유 자체가 공간에 관해 무엇을 증명하지는 않는다. 과제는 새 기술의 규칙을 유도하고 적용 범위를 정하는 것이다. 이렇게 발생한 기하 구조는 반드시 환상일 필요가 없다. 관측 세계의 정확한 유효 성질로 남을 수 있다.

가장 단순한 모형은 가능한 메커니즘과 인상적인 비유를 구별하는 데 도움이 된다. 상호작용하는 요소의 연결망이 주어지고 결합 세기만 미리 안다고 하자. 여기 전달의 비용이나 가장 짧은 전이열의 길이로 거리를 정의해 볼 수 있다. 얻은 구조가 어떤 영역에서 매끄러운 다양체와 비슷하면 유효 기하 구조가 나타난다. 그러나 임의의 연결망이 존재한다는 사실에서 매끄러움과 차원, 국소성이 따라오지는 않는다. 완전 연결계와 규칙적인 격자는 다르게 거동한다. 공간의 발생을 주장하려면 특정 동역학이 왜 필요한 성질의 구조를 선택하며 그 성질이 왜 초기 상태의 작은 변화에도 안정적인지 보여야 한다.

다음 질문은 보편성이다. 한 계의 서로 다른 여기는 다른 속도로 전파되고 다른 유효 매개변수에 민감할 수 있다. 명확한 상황이지만 유일한 기하 구조를 자동으로 주지는 않는다. 공통 세계를 기하학적으로 기술하려면 독립 관측자와 서로 다른 시험장이 왜 결과를 일치시키는지 이해하는 일이 특히 중요하다. 장마다 다른 장과 연결되지 않은 자체 거리를 배정하면 이론이 설명력을 잃을 위험이 있다. 따라서 창발 기하 구조에는 탐침 비교와 좌표 변환, 통상적 영역 복원의 규칙이 따라야 한다. 이는 정보나 관계가 근본적이라는 주장 자체보다 탐색을 더 강하게 이끈다.

공통 원인을 갖는 두 센서

양자 공식에 앞서 통상적인 두 기록 장치의 실험을 생각하면 유용하다. 발생원은 매초 독립적으로 같은 확률의 비트 Q를 고르고 같은 값을 메모리 A와 B에 기록한다. 기록 후 두 장치 사이에는 전달 채널이 없다. 시행의 절반에서는 쌍 00이, 나머지 절반에서는 11이 나온다.

A	B	확률
0	0	1/2
0	1	0
1	0	0
1	1	1/2

A를 알면 관측자는 B를 정확히 안다. 각 비트의 엔트로피는 ln 2이고 결합 엔트로피도 ln 2다. 쌍에는 무작위 선택 하나만 들어 있다. 따라서 고전 상호정보량은 ln 2다. 모든 공식에서 자연로그를 쓰며 정보 단위는 내트다.

$$H(X) = -\sum_{x} p_x \ln p_x, \qquad I(A:B) = H(A) + H(B) - H(A,B) = \ln 2 \tag{5.1}$$

이제 실험자가 기록 후 A = 1로 강제로 설정한다. 메모리 B에는 여전히 원래의 Q가 남으므로 B = 1일 확률은 1/2이다. A가 이미 일이었던 시행을 골랐다면 다른 확률을 얻었을 것이다. 관찰과 개입의 차이는 다음과 같이 명시할 수 있다.

$$\Pr\left(B = 1 \mid A = 1\right) = 1, \qquad \Pr\left(B = 1 \mid \mathrm{do}\left(A = 1\right)\right) = \frac{1}{2} \tag{5.2}$$

이 예에서 높은 상호정보량은 공통 원인을 정확히 가리킨다. 새로운 영향을 전달할 능력을 정하려면 두 번째 실험이 필요하다. 양자 이론은 특별한 상관관계와 측정 규칙을 더하지만 두 질문의 차이는 유지된다. 다음 절에서는 홀로그래피와 선형 응답을 논할 때 이 구별을 사용한다.

관찰과 개입의 차이는 현대적인 두 전자 기록 장치에서 볼 수 있다(그림 18).

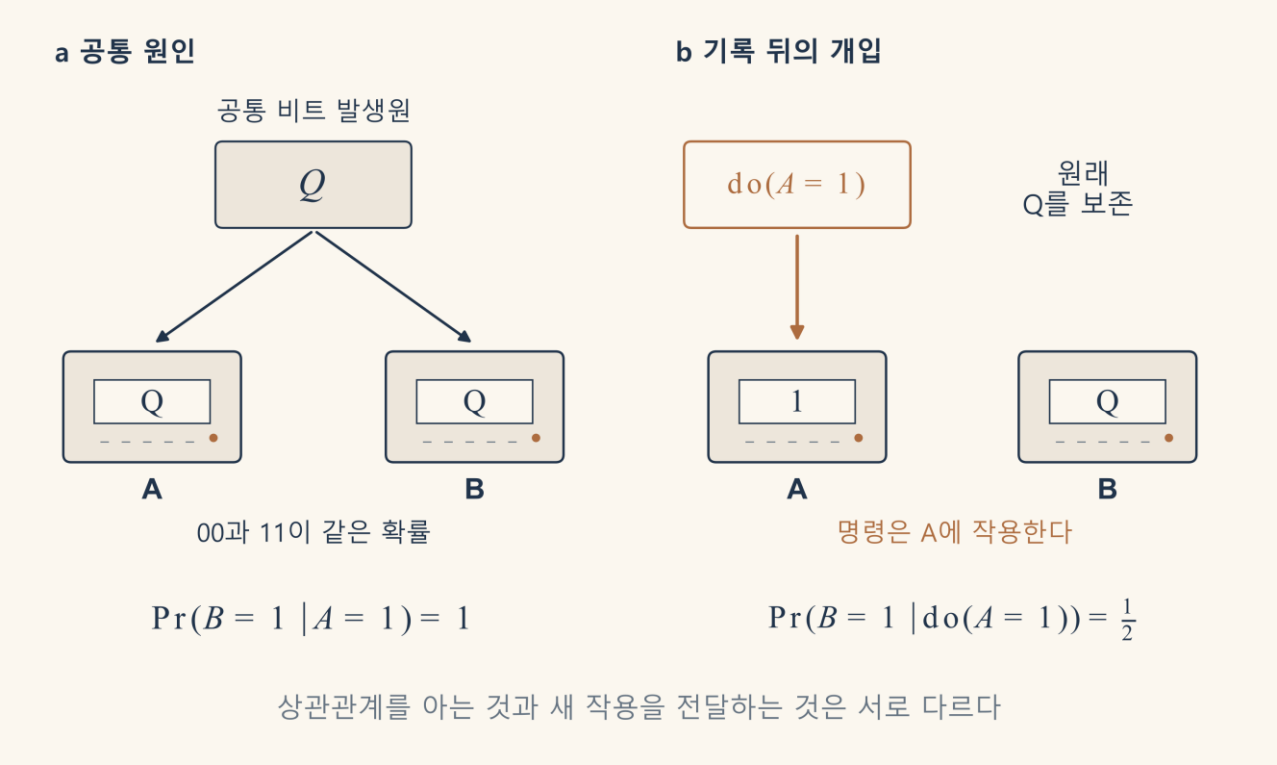


그림 18. 고전적인 공통 발생원이 같은 확률의 한 비트 Q를 두 기억장치에 기록하므로 A의 관측은 B를 완전히 정한다. 두 번째 프로토콜에서는 기록 뒤 외부 명령이 A = 1로 설정하지만 기억장치 B는 이전 Q를 보존한다. B가 일일 확률은 절반으로 유지된다. 기록기 사이 전달 경로는 없다. 이 예의 강한 상관관계는 공통 원인을 알려 줄 뿐 새 작용을 보낼 수 있다는 뜻은 아니다.

홀로그래피 쌍대성이 확립하는 것

비중력적 기술과 기하학적 기술의 관계를 보여 주는 가장 구체적인 예 중 하나는 말다세나가 제안한 쌍대성이다. 특정 등각장이론과 추가 콤팩트 인자들을 가진 반드시터 공간 위 이론을 연결한다. 잘 알려진 경우에는 사차원 초대칭 게이지 이론과, 이에 대응하는 오차원 반드시터 공간 및 오차원 구의 곱 위 끈 이론을 고려한다. 편리한 고전적 중력 기술은 특정 매개변수 극한에서 나타난다. 서로 다른 수의 기하학적 좌표가 동등한 기술에 들어가는 실질적인 수학적 맥락이다. 모든 양자계나 직접 관측하는 우주론이 같은 홀로그래피 표현을 가진다고 확립하지는 않는다. [10]

이 맥락에서 류와 다카야나기는 경계 이론의 한 영역의 얽힘 엔트로피와 벌크 최소 곡면의 넓이 사이 관계를 제안했다. 곡면은 선택한 영역의 경계에 고정되고 호몰로지

조건을 만족해야 한다. 고전적 정적 중력 영역에 대한 아래 공식은 광속과 플랑크 상수, 볼츠만 상수가 일인 단위로 썼다. Gbulk는 벌크 이론의 중력 상수이다. 공식은 특정 양자정보량에 기하학적 의미를 주며 역문제를 제기할 수 있게 한다. 여러 영역의 엔트로피를 알면 기하 구조의 어떤 부분을 복원할 수 있는가? [11]

$$S(A) = \frac{\text{Area}(\gamma_A)}{4G_{\text{bulk}}} \qquad \left(c = \hbar = k_B = 1\right) \qquad (5.3)$$

공식의 제한 조건은 적용에 중요하다. 최소 곡면은 정적 설정에 해당한다. 더 일반적인 시간 의존 문제에는 적절한 공변 기술이 필요하다. 기본 공식이 기하학적 형태라는 이유만으로 양자 보정이 사라지지도 않는다. 또한 엔트로피는 임의의 실험실 센서 집합이 아니라 특정 경계 이론의 특정 영역에 대해 정의된다. 따라서 아무 상관관계나 측정해 S 대신 넣고 얻은 수를 실제 공간의 넓이라고 선언할 수 없다. 먼저 물리계와 공식의 조건 사이의 대응 언어를 정당화해야 한다. 그렇지 않으면 아름다운 등식은 바로 그 등식을 흥미롭게 만드는 정확성을 잃는다.

정적 설정의 기하 도식에서 고정과 호몰로지 조건이 명확해진다(그림 19).

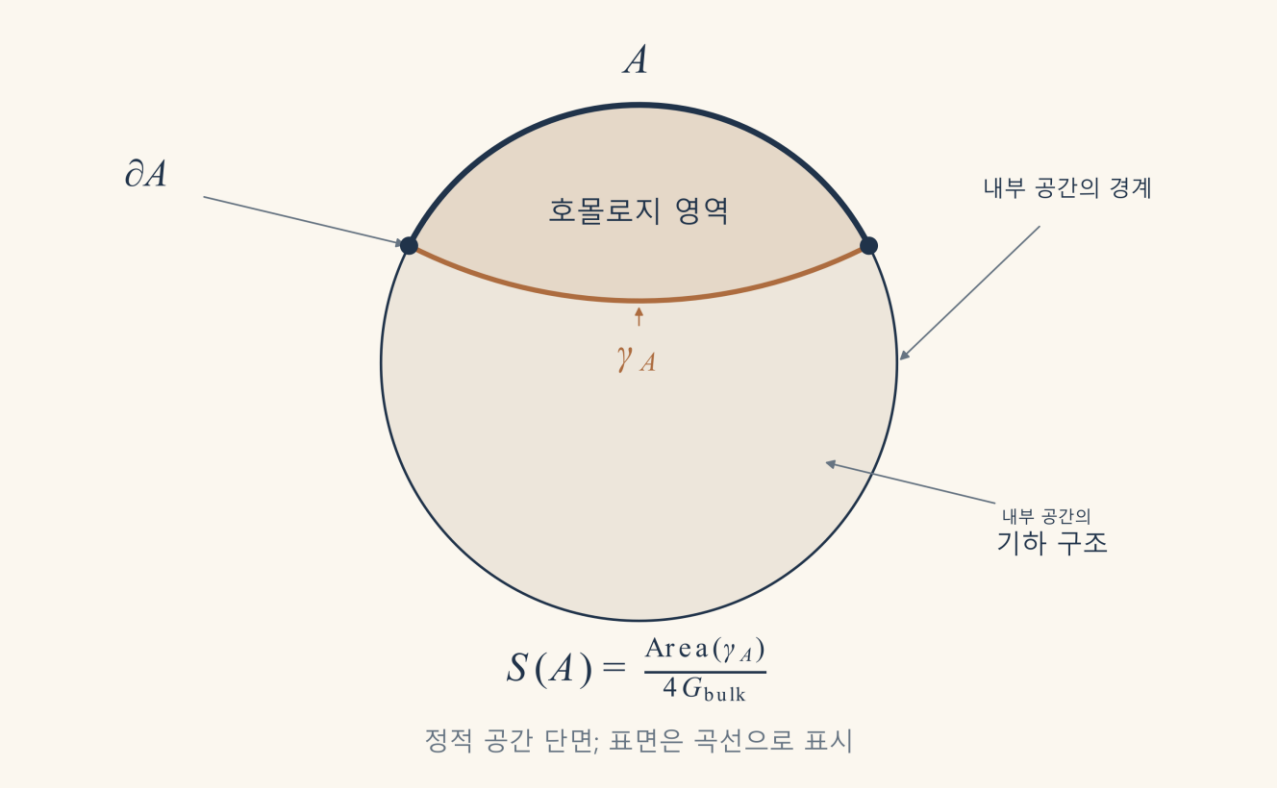


그림 19. 정적 홀로그래피 설정을 더 낮은 차원의 공간 단면에 나타냈다. 선택한 경계 영역 A에는 ∂A에 고정된 최소 표면 γ_a가 대응하며 여기서는 원판의 측지 곡선으로 그렸다. 빗금 영역은 A와 γ_a로 둘러싸여 호몰로지 조건을 보여 준다. 도식의 기하 구조는 관측 우주의 지도가 아니다. 공식은 명시한 쌍대성의 고전적 정적 영역에 적용된다.

얽힘과 공간적 연결성

반 람스동크는 벌크 기하 구조의 고전적 연결성이 그 양자 기술의 자유도 사이 얽힘과 관계있다는 생각을 연구했다. 해당 홀로그래피 그림에서는 특정 얽힘 관계를 줄이는 일이 영역의 기하학적 분리에 대응한다. 이는 공간을 양자적 관계의 집단적 성질로 찾도록 이끈다. 그러나 결론은 특수한 이론적 맥락에 해당한다. 얽힌 광자 쌍이면 무엇이든 접근 가능한 통로를 만든다는 뜻도 아니며 거리를 임의로 제어하는 기술을 정하지도 않는다. 다른 대상에 이 생각을 적용하려면 자유도와 동역학, 기하학적 대응 언어를 새로 정해야 한다. [12]

관계를 정량적으로 연구할 때에는 상호정보량을 쓰면 편리하다. 개별 부분계의 엔트로피는 나머지 자유도를 제외해 얻은 밀도행렬로 정한다. 두 부분계의 상호정보량은 그 결합 상태가 독립 상태와 정보 구조에서 얼마나 다른지 보여 준다. 양자적 상관과 고전적 상관을 모두 반영하므로 얽힘만의 보편적 척도는 아니다. 공통 발생원의 신호를 받는 두 검출기는 서로 직접 상호작용하지 않아도 큰 상호정보량을 가질 수 있다. 이 사실만으로도 강한 상관관계를 작은 물리적 거리나 영향을 빠르게 전달할 능력과 자동으로 같게 볼 수 없는 이유를 알 수 있다.

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}\left(\rho \ln \rho\right), \qquad I(A:B) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) \tag{5.4}$$

상관관계를 추정 거리로 바꾸기 위해 단조 변환을 쓰고 싶을 수 있다. 강한 관계에는 짧은 길이, 약한 관계에는 긴 길이를 배정하는 것이다. 그러나 거리에는 추가 조건이 있다. 필요한 쌍들에 대해 정의되고 단위 선택과 일치하며, 통상적인 공간 문제의 삼각부등식을 비롯한 적절한 계량 조건을 만족해야 한다. 상호정보량의 임의 변환은 이를 보장하지 않는다. 또한 쌍별 값들은 다입자 양자 상태 전체를 정하지 못한다. 따라서 복원 지도는 아무 상관관계 표에나 자동으로 존재하는 기하 구조가 아니라 검증할 자료 모형으로 보아야 한다.

공통 정보와 인과적 응답의 차이

영향을 전달할 능력을 검증하려면 다른 실험이 필요하다. 계의 한 부분에 제어된 섭동을 가하고 다른 부분의 변화를 측정한다. 선형 응답 영역에서 이 관계는 관측량의 교환자로 표현된다. 외부 신호 f와 연산자 B에 비례하며 음의 부호를 갖는 해밀토니안 섭동을 고르자. 그러면 관측량 A의 감수율 χ는 아래 부호를 가지며 계단함수 θ는 섭동 전의 값을 영으로 만든다. 응답이 시간차에 의존하도록 정상 초기 상태를 가정한다. 구보가 발전시킨 선형 응답 이론에 속하는 접근이며 실험자의 작용과 계의 측정 반응을 연결한다. [13]

$$H'(t) = -f(t)B, \qquad \chi_{AB}(t) = \frac{i}{\hbar}\theta(t)\langle\left[A(t), B\left(\mathcal{O}\right)\right]\rangle \tag{5.5}$$

$$\delta\langle A(t)\rangle = \int \chi_{AB}\left(t - t'\right) f\left(t'\right)\, dt' \tag{5.6}$$

유한한 범위의 유계 국소 상호작용을 갖는 양자 스핀계에서 리프–로빈슨 추정은 영향의 전파 속도를 제한한다. 교환자의 노름은 유효 원뿔 바깥에서 억제된다. 양의 매개변수 C와 μ는 모형 및 선택한 관측량으로 정해진다. r은 두 영역 사이 거리이며 v는 속도 한계를 정한다. 보편적 빛의 속도가 아니라 해당 계의 전파를 말한다. 원뿔 바깥에는 보통 정확한 영 대신 지수적으로 작은 꼬리가 남는다. 상호작용이 다르면 한계의 형태도 바뀔 수 있다. 이렇게 이미 존재하는 상태 상관관계와 별도로 연산자의 동역학을 통해 국소성을 검증할 수 있다. [14]

$$\| [A(t), B] \| \leq C \| A \| \| B \| e^{-\mu[r - v|t|]} \qquad (5.7)$$

얽힘만으로 초광속 메시지를 보낼 수 없다는 사실은 직접 볼 수도 있다. 부분계 A에 국소 유니터리 변환을 하면 B의 축약 밀도행렬은 바뀌지 않는다. 부분대각합이 제외한 부분계의 변환을 없애기 때문이다. 따라서 관측자 B의 모든 국소 확률은 그대로다. 결과를 조건부로 선별하지 않는 국소 대각합 보존 연산에도 비슷한 결론이 성립한다. 조건부 선별에서는 B의 상태를 다르게 기술할 수 있지만 그 차이를 이용하려면 통상적인 통신 채널로 선별 결과를 알아야 한다. 강한 공통 정보와 새 메시지의 제어된 전달은 서로 다른 물리적 능력이다.

$$\rho_B{}' = \mathrm{Tr}_A\left[(U_A \otimes I_B)\rho_{AB}\left(U_A^\dagger \otimes I_B\right)\right] = \rho_B \qquad (5.8)$$

기하 구조의 복원은 역문제다

정확한 기하학적 대응 언어가 있어도 관측에서 공간을 복원하는 일은 유일하지 않을 수 있다. 순문제는 기하 구조를 정하고 엔트로피와 스펙트럼, 상관관계를 계산한다. 역문제는 이 양들에서 시작해 그것들을 만들어 낼 수 있는 기하 구조를 찾는다. 일부 계량 변화는 선택한 자료 집합에 영향을 주지 않거나 분해능보다 작은 영향만 줄 수 있다. 좌표 변환은 물리를 바꾸지 않고 계량의 표현을 바꾸기도 한다. 따라서 물리적 모호함과 기술의 자유를 구별해야 한다. 항상 아름다운 곡면 하나를 내놓는 알고리즘만으로는 복원 공간의 유일성이 증명되지 않는다.

채의 2026년 연구에서는 공변 홀로그래피 엔트로피로부터 특정 부류의 정상적이고 균일하며 점근적으로 AdS_3인 계량을 복원하는 공식을 얻었다. 특히 동시각 자료에는

계량의 이동 부분 부호의 모호함이 남지만 시간차 의존성이 이를 없애는 데 도움이 된다. 추가 관측량이 기하학적 모호함을 푸는 구체적인 예다. 임의의 양자 자료에서 임의의 공간을 보편적으로 복원한 결과는 아니다. 선택한 계량 부류와 홀로그래피 설정이 중요하다. 장비 연구 계획에 가치 있는 것은 원래 프로토콜이 어떤 정보를 잃고 어떤 새 측정이 되돌리는지 찾는 원리 자체다. [15]

역문제의 유용한 검증 기준은 일부 자료로 복원하고 나머지를 예측하는 것이다. 어떤 엔트로피들로 계량을 맞췄다면 모형에 포함된 독립 구간과 시간 의존성, 다른 이용 가능한 관측량을 검증해야 한다. 입력 자료의 오차가 복원한 양들에서 얼마나 증폭되는지도 평가해야 한다. 형식적 가역성은 안정성을 보장하지 않는다. 측정 함수의 작은 변화가 해를 크게 바꿀 수 있다. 따라서 미래의 기하학적 단층촬영 장치는 불확실성 영역과 구별 불가능한 대안들을 알려야 한다. 지나친 확실성을 피하면 추가 측정이 필요한 곳과 정보가 이미 충분한 곳을 보여 주므로 장비가 더 유용해진다.

두 기하학적 기술을 비교하는 작업 계획

이를 바탕으로 제한된 연구 가설을 정식화할 수 있다. 상태 상관관계에서 복원한 기하 구조와 섭동 전달에서 복원한 기하 구조는 같은 제어된 계에서도 체계적으로 다를 수 있다. 이 가능한 차이 자체를 미지의 양자역학 법칙으로 제안하는 것은 아니다. 연구 과제는 일치 조건을 정확히 기술하고 안정적인 추정량을 구성하며 불일치 원인을 구별할 관측량을 찾는 것이다. 출발점은 동역학이 알려진 프로그래밍 가능한 양자계나 적절한 아날로그 시험대이다. 결합 구조를 고정한 채 상태를 바꾸어 복원 그림의 어떤 부분이 실제로 상태에 의존하는지 검증할 수 있다.

프로토콜은 원래의 상호정보량과 측정한 시간 응답, 기하학적 변환의 전제를 따로 보존해야 한다. 신호 검출 문턱값을 거리 정의에 숨길 수 없다. 문턱을 낮추면 약한 초기 꼬리가 더 짧은 경로처럼 보일 수 있다. 마찬가지로 상관관계의 공통 원인은 두 노드가 가까운 듯한 잘못된 인상을 줄 수 있다. 상태와 섭동 진폭, 잡음 수준의 대조 변경은 이런 효과를 구별하는 데 도움이 된다. 의미 있는 결과는 두 지도의 아무 차이나 아니라 미리 정한 조건에서 재현되고 하나의 일관된 모형으로 설명되는 예측 가능한 차이의 구조이다.

두 측정 경로를 종합해 불확실성을 명시한 복원 결과들을 비교해야 한다(그림 20).

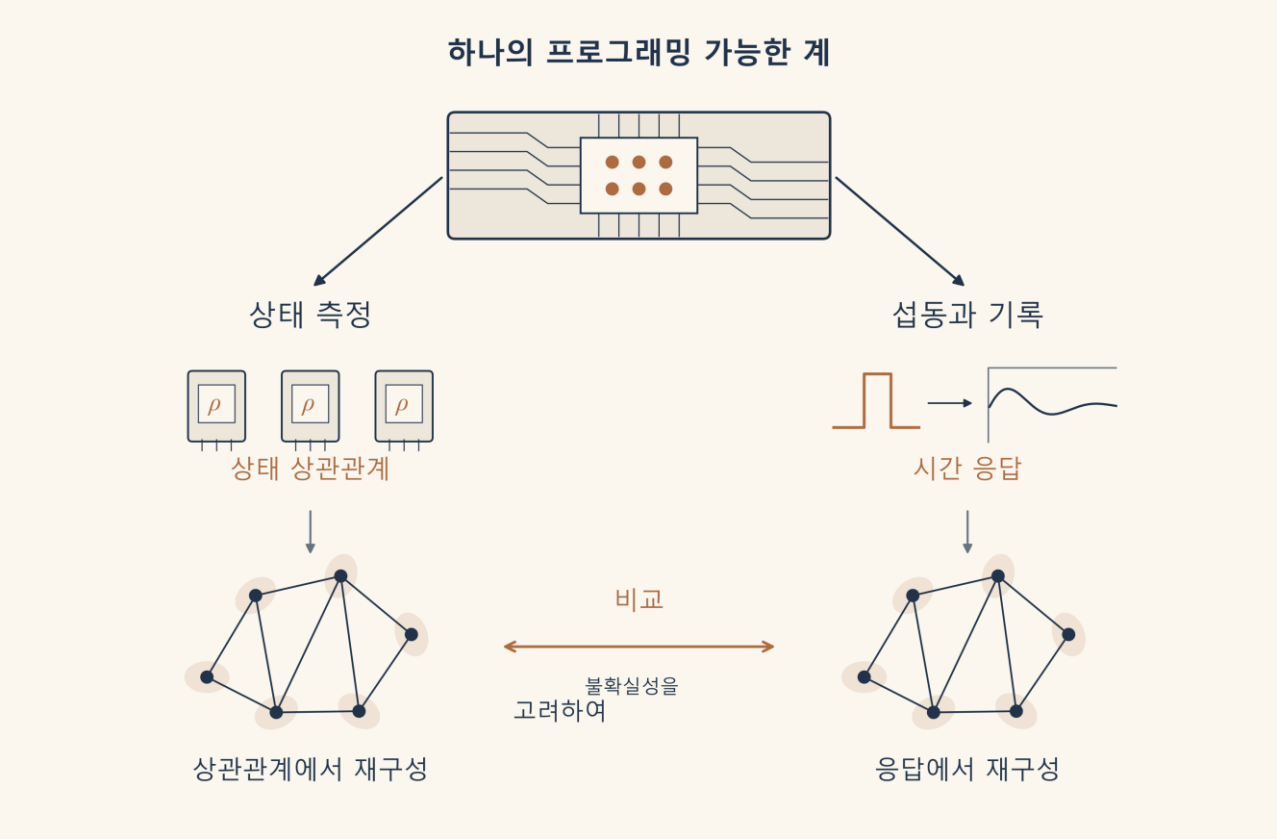


그림 20. 제안하는 프로토콜은 제어하는 한 계의 두 재구성을 비교한다. 첫 경로는 상태와 상관관계 측정을, 두 번째는 국소 섭동과 시간 응답을 쓴다. 두 지도는 수치 결과 없이 불확실성 영역을 포함해 개념적으로 그렸다. 일치나 불일치를 미리 가정하지 않는다. 비교하려면 전제를 맞추고 원자료를 보존하며 검출 문턱값을 검증해야 한다.

처음 다섯 장에서 미래 장비의 언어를 마련했다. 이미 두 가지 완결된 대조 예가 있다. 구 위 척도 지수는 국소 차원이 일정해도 바뀌며 유한 연결망의 같은 스펙트럼은 다른 국소 응답을 허용한다. 이제 문제는 역문제가 된다. 내부 구조는 숨겨지고 선택한 입력과 출력만 이용할 수 있으며 매개변수는 유한한 정확도로 알려진다. 여기서부터 검증할 대상은 기하학적 그림의 표현력이 아니라 자료에서 실제로 얻을 수 있는 정보이다.

제6장 응답에서 공간을 복원할 수 있는가

닫힌 상자 안의 세계

닫힌 상자의 벽에 몇 개의 커넥터가 나와 있다. 하나에는 펄스를 가하고 나머지에서는 신호를 읽는다. 안에는 저항기나 에너지 저장 소자, 긴 전송선이 있을 수 있다. 관측자는 밖에서 접근할 수 있는 것들로 내부 구성을 알아내야 한다. 공간에 관한 질문을 축소한 편리한 예이다. 판독값 사이의 관계로 연구하는 세계 내부의 관계를 어떻게 판단할 수 있는가?

순문제는 장치에서 시작해 신호로 끝난다. 역문제는 신호에서 시작해 장치를 알아내려 한다. 두 방향은 대등하지 않다. 다른 경로를 통해 승객이 같은 시간에 역에 도착할 수 있듯이 여러 다른 장치가 같은 응답을 줄 수 있다. 다른 관측량이 같다면 시간 측정이 무한히 정확해도 선택한 경로를 알 수 없다. 이것이 구조적 모호함이다. 때로는 더 오래 자료를 모아 줄일 수 있는 통상적인 측정 오차와는 다르다.

그림 21은 역문제의 구체적 의미를 보여 준다. 닫힌 계의 입력과 출력에 접근할 수 있다.

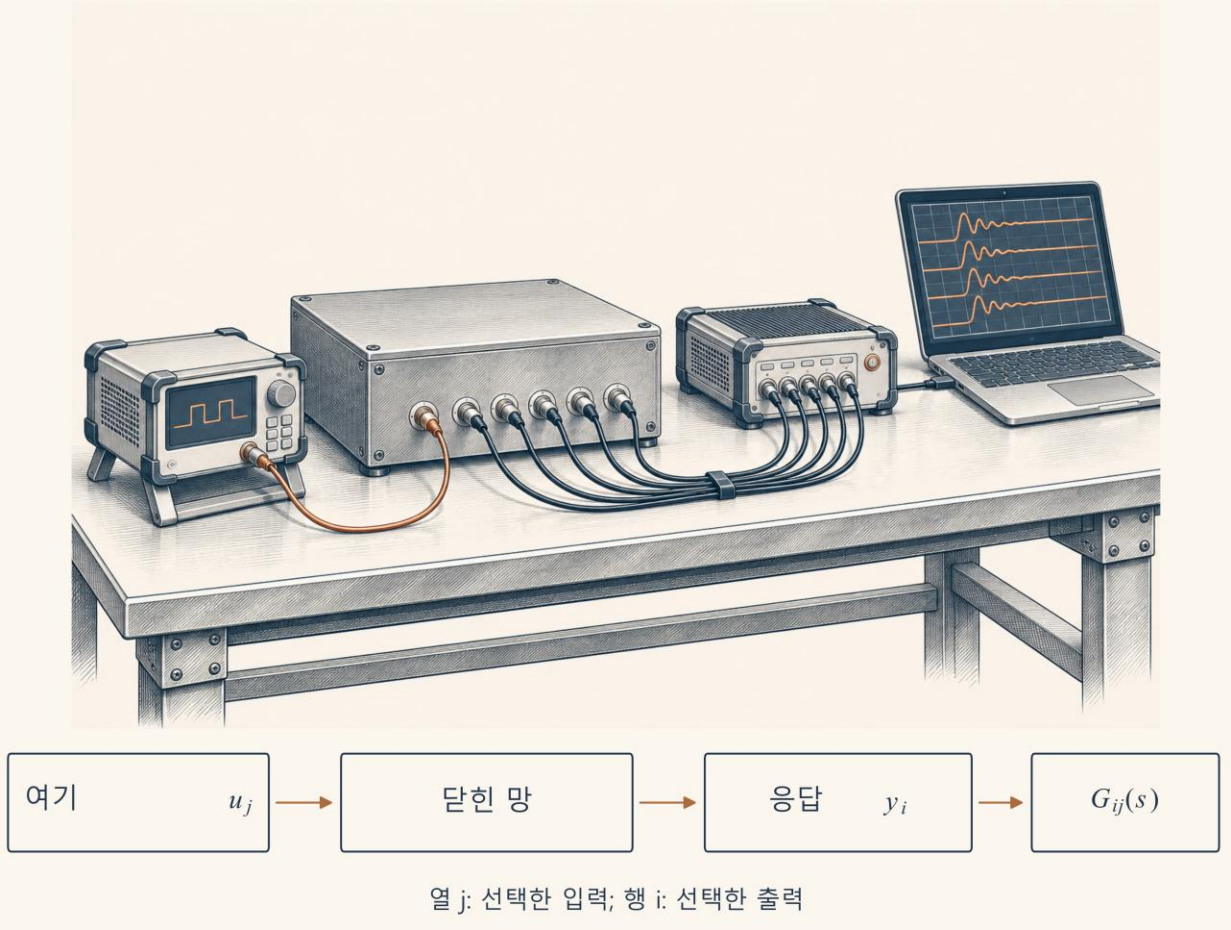


그림 21. 닫힌 망과 실험자가 접근할 수 있는 인터페이스. 신호 발생기가 선택한 포트에 작용을 주고 다중 경로 기록기가 응답을 측정한다. 입력을 차례로 바꾸면 행렬 $G_{ij}(s)$를 구성할 수 있다. 행은 출력에, 열은 입력에 해당한다. 상자 내부 구조는 알려지지 않은 채로 남는다. 장비와 파형은 개념적으로 그렸다. 실험 자료나 구체적인 전자회로 설계를 제시하는 그림은 아니다.

따라서 공간 복원의 질문은 허용하는 설명들의 목록과 함께 제기해야 한다. 내부에 특정 격자가 있고 결합 하나만 바뀌었다고 미리 안다면 풀 수 있는 문제일 수 있다. 임의의 추가 노드와 측정기에 대한 미지의 결합, 내부 발생원을 허용하면 같은 자료가 훨씬 많은 가능성을 허용한다. 모형 부류의 제한은 결과에 관한 주장의 일부이다. 계산에서 아름다운 답을 찾은 뒤 결론에서 그 제한을 조용히 지울 수 없다.

여기서 변화 검출과 그 본질의 설명을 구별하면 유용하다. 첫 질문은 자료가 이전의 교정된 계와 양립하는가이다. 둘째는 바뀐 결합과 새 내부 자유도, 소자의 표류, 다른 원인 중 하나를 고르는 일이다. 더 강한 셋째 질문은 발견한 구조가 근본적 공간과

관계있는가이다. 다음 단계마다 새 전제와 새 측정이 필요하다. 첫 과제를 확실히 푸는 장비라도 셋째에 답할 자격을 자동으로 얻지는 않는다.

하나의 스펙트럼만으로 부족한 이유

제2장에서 노드 셋인 두 연결망은 고유값 0, 1, 3이 같았고 따라서 모든 척도에서 열핵 대각합도 같았다. 가운데 노드의 국소 응답은 달랐다. 이 작은 예는 이후 논의의 기준으로 남는다. 압축한 특성이 같다고 이용 가능한 모든 관측이 같지는 않다.

고유진동 스펙트럼은 기하 구조의 자연스러운 지문처럼 보인다. 공동의 크기와 경계 모양, 부분들 사이 결합은 공명에 영향을 준다. 그러나 고유주파수가 항상 모양을 유일하게 정하지는 않는다. 고든과 웹, 볼퍼트는 스펙트럼이 같은 서로 다른 평면 영역을 구성했다. 엄밀히 정한 수학 문제의 결과로, 이상적인 주파수를 전부 알아도 기하학적 정보 일부를 잃을 수 있음을 보여 준다. 미지의 공간을 연구할 때 측정 자료를 스펙트럼 목록 밖으로 넓혀야 할 근거이다. [16]

정규직교 고유벡터 v_n과 고유값 λ_n을 갖는 실수 대칭행렬 L을 보자. 전달행렬 G(s)에는 λ_n의 값과 v_n의 공간 분포가 모두 들어 있다. 그 원소는 노드 j에 가한 작용과 노드 i의 응답을 연결한다. 고유값은 특징적 척도의 위치를 정하고 고유벡터 성분들의 곱은 각 모드에 어떤 점이 참여하는지 알려 준다. 따라서 공간 응답의 측정은 공명만의 측정보다 잠재적으로 더 풍부하다.

$$G_{ij}(s) = \sum_{n} \frac{v_n(i)\,v_n(j)}{s + \lambda_n}, \qquad s > 0 \tag{6.1}$$

추가 정보는 여기와 검출 위치가 실제로 다르고 알려져 있을 때만 생긴다. 장비가 표면 전체의 응답을 합하면 공간 구조 일부는 다시 사라진다. 노드를 임의로 재명명할 수 있으면 서로 다른 두 행렬 표현이 같은 물리적 연결망을 기술할 수 있다. 포트의 표지와 좌표, 극성, 교정계수는 복원 절차와 독립적으로 고정해야 한다. 그렇지 않으면 알고리즘은 선택한 표기에만 존재하는 차이를 내놓을 수 있다.

같은 이유로 스펙트럼 차원은 공간의 완전한 명세가 아니다. 방대한 정보를 척도에 따른 수 하나의 의존성으로 압축한다. 전이 검출과 모형군 비교에는 유용하지만 최종 식별을

위한 압축은 아니다. 양자 기하 연구에서는 서로 다른 확산 과정이 같은 스펙트럼 차원을 가질 수 있음도 따로 보였다. 따라서 그 값이 바뀌면 추정한 기하 구조뿐 아니라 전파 법칙 자체를 검증해야 한다. [25]

숨겨진 노드가 장거리 결합이 되는 방식

이제 연결망의 노드를 접근 가능한 것과 숨겨진 것으로 나누자. 간단히 지표 o와 h로 표시한다. 정상 선형 문제에서 숨은 변수들을 관측 변수로 나타내어 다시 대입할 수 있다. 외부 관측자는 접근 가능한 노드만 기술하는 축약 행렬을 얻는다. 내부에 두 포트를 직접 잇는 소자가 없어도 유효 결합이 이 행렬에 들어간다. 측정 정확도가 낮아서 생기는 근사가 아니다. 주어진 조건에서 변수 제거는 정확한 대수 변환이다.

$$A_{\mathrm{eff}}(s) = A_{oo}(s) - A_{oh}(s) A_{hh}(s)^{-1} A_{ho}(s) \tag{6.2}$$

이 식을 슈어 보완이라 부른다. 전기망에서 대응하는 내부 노드 제거는 크론 축약으로 알려져 있다. 되르플러와 불로는 이 절차에서 그래프의 위상과 스펙트럼 성질이 어떻게 바뀌는지 연구했다. 이 과제에서 특히 중요한 사실은 숨은 사슬이 외부에서는 직접 결합처럼 보일 수 있다는 것이다. 따라서 복원한 축약 모형의 특이한 연결이 원래 물리계의 특이한 결합을 곧바로 확립하지는 않는다. [17]

가장 간단한 예에는 행렬이 필요 없다. 접근 가능한 두 점 사이에 저항기 둘이 직렬로 있고 그 접속점에는 접근할 수 없다고 하자. 양 끝의 직류 측정은 전체 저항을 준다. 같은 저항의 저항기 하나와 구별할 수 없다. 이 측정을 아무리 반복해도 내부 노드는 자료에 나타나지 않는다. 중간 지점에 무시할 수 없는 전기용량이 있으면 과도 응답이 추가 시간 척도를 드러낼 수 있다. 그래도 결론은 비교하는 전기 모형들의 부류에 관한 것이며 상상할 수 있는 모든 내부 구성에 관한 것은 아니다.

동적 측정이 가치 있는 이유는 숨은 자유도가 흔히 기억을 통해 나타나기 때문이다. 내부 변수를 제거하면 유효 결합은 s나 주파수에 의존하기 시작한다. 지연과 형태를 통해 정적 상태에서는 일치하는 몇 가지 구체적 후보를 구별할 수 있다. 동시에 동적 축약 자체도 별도의 수학 문제이며 일반화한 전기망 부류들에 대해 연구되어 있다. 기억의

존재만으로는 새 기하 구조의 증거가 되지 않는다. 통상적인 관측 불가능한 에너지 저장 소자도 기억을 만들 수 있다. [20]

그림 22는 숨은 노드를 갖는 원래 장치와 그 축약 기술을 비교한다. 아래 도식의 새 선은 변수 제거의 결과이다. 그에 대응하는 직접 소자가 실제 존재하는지 알려면 내부 동역학에 민감한 관측이 필요하다. 정적 등가성만으로는 부족하다.

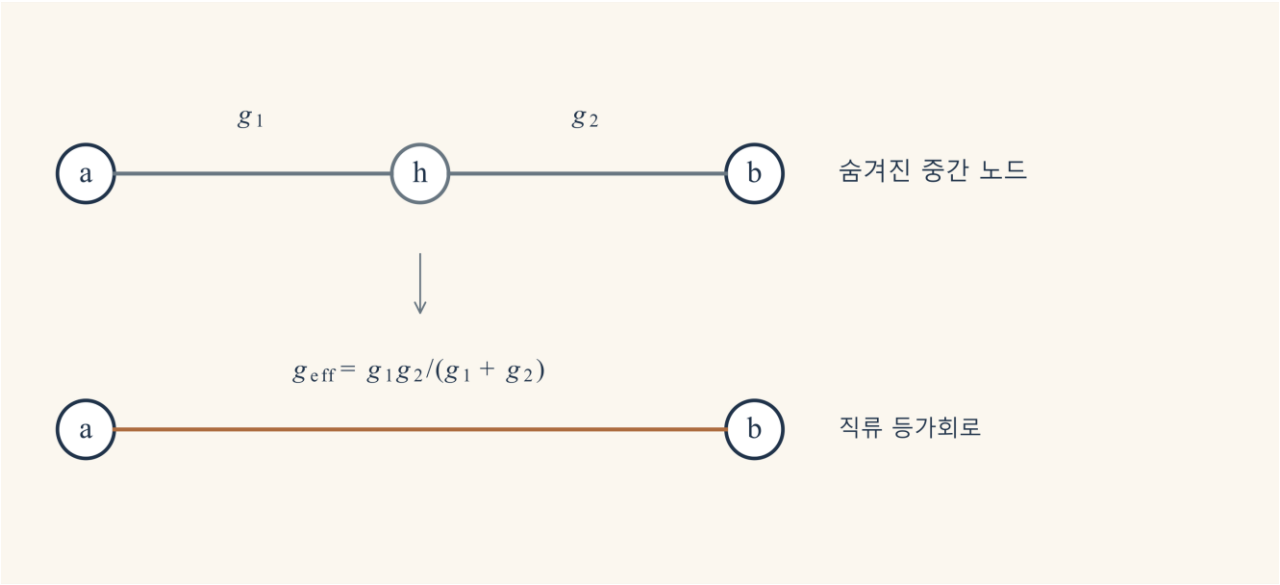


그림 22. 숨겨진 노드와 접근 가능한 포트 사이의 유효 결합. 축약 도식은 선택한 외부 자료를 재현한다. 그 변이 원래 망의 개별 물리 도선과 반드시 같아야 하는 것은 아니다.

복원이 유일해지는 때

이 논의에서 역문제가 가망 없다는 결론이 나오지는 않는다. 풀 수 있는지는 정확한 조건에 달려 있다. 규격화를 알고 모든 노드에 접근하며 양의 실수 s에 대한 전체 행렬 G(s)를 측정했다면 이 유한차원 모형에서는 행렬을 역변환해 연산자를 복원한다. 강한 주장이지만 그 힘은 계에 대한 완전한 접근을 대가로 한다. 작은 부분행렬만 측정했거나 센서 접속 계수를 모르는 상황에는 그대로 적용할 수 없다.

$$L = G(s)^{-1} - sI \qquad (6.3)$$

연속 문제에도 유일성 정리가 있다. 실베스터와 울만은 정리의 조건 아래 차원이 삼 이상인 영역에서 완전한 경계 자료로 매끄러운 등방성 전도도를 복원할 수 있음을 보였다. 바로 그 조건들이 이 예를 중요하게 만든다. 방정식의 종류와 영역을 알고 계수 부류가

제한되며 필요한 모든 경계 작용에 접근할 수 있다. 미지의 매질에 센서 여덟 개를 놓는다고 이 전제들이 자동으로 재현되지는 않는다. [18]

유일성 외에 안정성도 있다. 두 모형이 다른 답을 주더라도 차이가 장비 잡음보다 작을 수 있다. 형식적으로는 풀 수 있지만 실제로는 조건이 나쁜 문제가 된다. 타당한 연구 결과에는 찾은 구성뿐 아니라 측정 신호 공간에서 가장 가까운 경쟁 모형까지의 거리도 포함된다. 불확실성에 비해 그 거리가 작을수록 복원한 그림을 신중하게 해석해야 한다. 그래프에서는 이런 대안들을 최적선 하나 뒤에 숨기지 않고 함께 보여 주면 유용하다.

설명들 사이 거리

실제 구별 가능성은 자료 공간의 선택에서 시작한다. 측정하는 모든 행렬 원소를 벡터 μ로 모으고 C로 그 오차를 기술한다고 하자. 두 예측의 차이는 역공분산으로 규격화한 뒤 잡음과 비교한다. 두 모형군 각각에 미지의 매개변수를 허용한다면 임의로 고른 대표 곡선 둘이 아니라 허용된 예측들 중 가장 가까운 것들을 비교해야 한다.

$$D^2\left(\mathcal{M}_0,\mathcal{M}_1\right)=\inf_{\mu_0\in\mathcal{M}_0,\,\mu_1\in\mathcal{M}_1}\left(\mu_1-\mu_0\right)^{\mathsf{T}}C^{-1}\left(\mu_1-\mu_0\right)\qquad(6.4)$$

여기서 M_0와 M_1은 이미 잡음이 더해진 기록 집합이 아니라 예상 자료의 집합이다. 거리가 영이면 부류들의 적어도 일부 구성원은 이 프로토콜로 구별할 수 없다. 다른 구성원까지 구별하지 못한다는 뜻은 아니다. 특히 g를 임의로 영에 가깝게 할 수 있는 추가 결합 부류는 결합 없는 부류와 맞닿는다. 따라서 유한한 잡음에서 그 모형군 전체에 보편적인 검출 가능성을 얻을 수는 없다.

특정 g 구간을 연구할 때에는 바로 그 구간의 거리를 계산한다. 또 다른 길은 독립 교정에 필요한 정확도를 정하고 어떤 포트에서 경쟁 집합들이 벌어지는지 찾는 것이다. 이로써 ‘장비는 얼마나 정확해야 하는가’라는 질문이 명확해진다. 통상 소자의 주어진 허용 변화 아래 주어진 예측들을 분리하기 위해 정확도가 필요하다.

오차 함수의 최소값이 이 비교를 대체하지 않습니다. 선택한 클래스의 가장 좋은 대표자가 어디에 있는지 알려줍니다. 이웃 클래스가 잘 맞는 경우 결과는 몇 가지 설명으로

남습니다. 이러한 기록은 실질적으로 유용합니다: 그것은 어떤 새로운 실험이 상황을 변경해야하는지 정확히 보여줍니다.

보정이 신호와 같은 방향으로 향할 때

모호함의 국소 원인은 전체 비선형 맞춤 전에 살펴보면 편리하다. 기준점 부근에서 가정한 변의 세기에 대한 미분이 벡터 h를 정한다. 통상 가중치에 대한 미분들은 행렬 J의 열을 이룬다. h가 이 열들의 공간에 거의 놓이면 분산된 표류가 찾으려는 추가 결합과 거의 같은 방향으로 자료를 바꾼다.

$$\delta\mu = h\,\delta g + J\,\delta w, \qquad \rho_{\mathrm{loc}} = \frac{\| (I - JJ^{+})h \|_{2}}{\| h \|_{2}} \tag{6.5}$$

이 표현은 자료 원소의 분산이 같고 서로 독립이라고 가정한다. 일반적인 공분산에서는 먼저 적절히 규격화한다. 행렬 J⁺는 작은 특이값의 절단 기준을 명시한 의사역행렬이다. ρloc는 교정 방향을 제약 없이 제거한 뒤 남는 신호 방향의 비율을 나타낸다. 선택한 점에서의 선형 근사를 특징짓는다.

원래 모서리 포트의 지표	값
민감도 행렬 크기	192 × 144
특이값의 상대 절단 기준	10^{-10}
수치적 랭크	93
신호 방향 노름의 잔여 비율	2,376 %
단위 g당 제약 없는 계수의 노름	575,42

수치 절단에 대한 민감도는 따로 검증했다. 문턱값 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}, 10^{-12}에서 같은 랭크 93, 잔여 비율 0,02375875, 최대 계수 146,69를 얻는다. 안정적인 이유는 스펙트럼에서 보인다. 93번째 특이값은 최대값의 1,1141 × 10^{-6}이며 다음 값은 약 3,13 × 10^{-16}이다. 프로그램은 전체 스펙트럼과 네 결과를 보존했다. 이 선형화의 수치적 조건을 검증한 것이며 제약 없는 교정 방향을 물리적으로 허용되는 유한 표류로 바꾸지는 않는다.

이 연결망에서는 투영 후 원래 노름의 약 2,38퍼센트가 남는다. 동시에 필요한 제약 없는 계수들은 매우 크다. 절댓값이 최대인 계수는 단위 g당 약 146,69이다. 따라서 작은 잔여 비율만으로 강한 유한 결합을 이 퍼센트의 표류로 모사할 수 있다고 할 수 없다. 제약된 비선형 문제는 따로 풀어야 한다. 이 구별은 매개변수 한계 없는 국소 결론을 실제 장비에 관한 주장으로 조용히 바꾸는 오류를 막는다.

기록 공간에서 이 국소적 모호함의 기하 구조를 그림 23에 보였다.

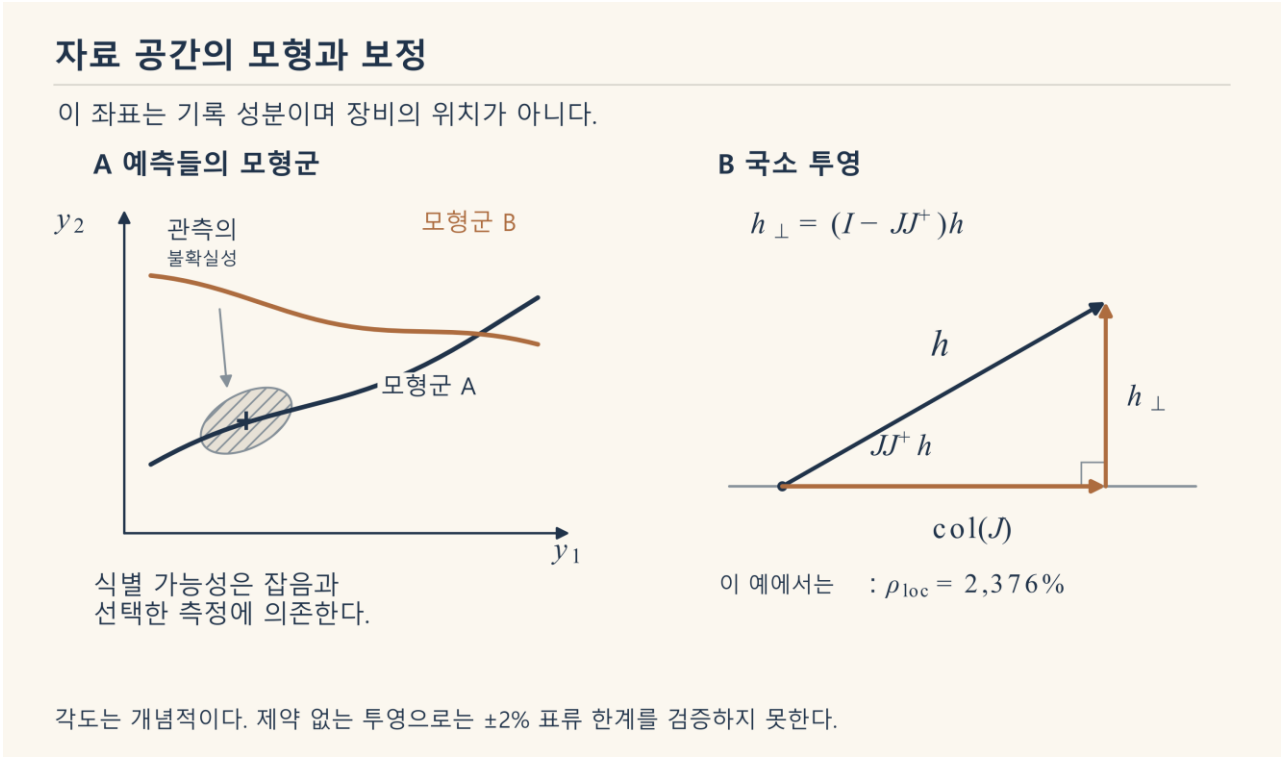


그림 23. 자료 공간과 국소 보정의 모호함. 왼쪽은 예측군과 관측 불확실성을 보여 준다. 대상의 물리적 기하 구조가 아니라 도식이다. 오른쪽은 신호 방향 h를 보정 투영과 잔차로 나눈다. 망 예에서 잔차는 원래 노름의 2,376 %다. 그림의 각도는 개념적이다. 제약 없는 투영이 작다는 것만으로 유한한 표류 한계 ±2 %와 양립한다고 정해지지는 않는다.

유용한 측정 계획은 허용 가능한 보정을 허용한 후에 차이를 증가시키는 것을 추구합니다. 이렇게 하려면 소스 위치, 판독 방법 또는 두 번째 프로브의 알려진 연산자를 변경할 수 있습니다. 원시 신호만 증가한다고 해서 개선이 보장되는 것은 아닙니다: 교정 변경 신호도 동시에 증가될 수 있습니다. 다음 장에서는 전체 유한 범위의 가중치에 적용되는 제한이 나타납니다.

구별 가능성을 더하는 측정

정보를 더하는 첫 방법은 작용 위치를 바꾸는 것이다. 가정한 숨은 결합 끝에 가까운 발생원은 먼 발생원과 다르게 계를 여기한다. 둘째는 시간 척도를 바꾸는 것이다. 느린 응답은 긴 경로를 거칠 시간이 있지만 빠른 응답은 가까운 구간과 내부 지연에 더 민감하다. 셋째는 알려진 국소 변화를 가하고 전체 응답이 어떻게 바뀌는지 검증하는 것이다. 마지막 경우에는 계의 상태뿐 아니라 제어된 개입에 대한 반응 정보도 얻는다.

가역행렬 A에서 작은 알려진 섭동 δA는 일차에서 δG = −GδAG를 준다. 이 공식은 관측 응답의 민감도와 개입 위치를 연결한다. 한 노드의 변화가 두 경쟁 구성을 크게 구별하면 그곳에 전환 소자나 추가 센서를 놓는 것이 유리하다. 이런 계획은 측정 횟수를 기계적으로 늘리는 것보다 실질적이다. 민감하지 않은 경로를 백 번 반복해도 독립적으로 보정한 새 경로 하나보다 유용한 정보가 적을 수 있다.

마지막으로 그래프의 복원과 그 물리적 매장의 복원을 구별해야 한다. 같은 그래프를 탁자 위 전선과 광학 경로, 내부 상태들의 상호작용으로 구현할 수 있다. 결합 행렬 자체는 상호작용이 어떤 공간을 통해 놓였는지 알려 주지 않는다. 따라서 이 책은 연결망 단층촬영을 검증 가능한 가설의 훈련장으로 쓴다. 숨은 결합을 찾고 모호함을 평가하며 대안을 구별하는 실험을 설계하도록 가르친다. 이 결과에서 진공에 관한 주장으로 나아가려면 별도의 물리적 근거가 필요하며 계산 실험 뒤에 이를 살펴본다.

기존 방법들 가운데 이 과제의 위치

여러 그래프를 공동 복원하는 일은 이미 독립된 연구 방향이다. 위안과 공동연구자들은 특수한 정규화를 통해 공통 구조와 차이 구조, 희소 구조를 갖는 여러 라플라시안의 추정을 연구한다. 나바로와 공동연구자들은 숨은 노드와 비슷한 연결성을 갖는 여러 연결망에서 정상 그래프 신호의 부분 관측을 다룬다. 유용한 비교 기준이 되는 연구들이지만 보장은 각 연구의 관측 연산자와 전제에 해당한다. [39] [40]

문제 설정	데이터 및 객체	비교해야 할 사항
위안 외.	여러 그래프 신호 자료 집합; 라플라시안의 공동 추정	공통 구조와 차이 구조를 정하는 방식; 추정의 전제
나바로 외.	부분적인 노드 관측; 숨은 노드의 영향	관측 통계와 그래프의 관계 및 복원 조건
이 책의 예	알려진 연결망의 제어된 포트 응답; 유한한 표류 한계	포트를 바꿀 때 배제되는 쌍과 여전히 양립하는 쌍

아래 계산의 대상은 창발 공간이라는 일반 문제보다 좁다. 노드와 기본 위상, 검출 연산자는 알려져 있고, 제한된 가중치 변화와 가능한 추가 결합은 알려지지 않았다. 수행한 예의 기여는 이런 설명들을 비교하는 검증 가능한 구성에 있다. 정확한 응답과 제한된 포락선, 위험한 반례, 선택한 대안들을 구별하는 측정이다. 구성 전체의 독립적인 과학적 새로움을 주장하려면 더 넓은 문헌과 별도로 비교해야 한다. 알려진 항등식과 여러 탐침이라는 발상 자체의 출처는 그대로 유지된다.

제7장 공통 희소 연결성 가설

특이한 신호에서 검증 가능한 구조로

모호함을 논한 뒤 작업 가설을 정식화할 수 있다. 한 계를 독립적으로 교정한 여러 방법으로 조사했을 때 소수의 같은 추가 결합들을 가리킨다고 하자. 서로 다른 과정은 대상과 다르게 상호작용하므로 세기는 다를 수 있다. 모든 신호의 일치가 아니라 결합 위치의 공통성을 가정한다. 틀릴 가능성이 있을 만큼 구체적인 가설이다. 복원한 결합들이 일치하지 않거나 새 포트의 예측이 실패하거나 편차 전체가 통상적인 교정 오차로 설명될 수 있다.

첫 단계에서는 노드가 알려진 유한 연결망을 다룬다. 지표 α는 고유한 기본 연산자 L₀α를 정한 조사 채널을 뜻한다. 노드 대응을 독립적으로 정당화했다면 공통 위상의 서로 다른 실험 구현이나 서로 다른 물리 과정일 수 있다. 두 모형에서 같은 점 지표를 쓰는 것만으로는 부족하다. 센서들이 실제로 같은 계의 요소에 접근하는지 확립해야 한다. 이 대응 없이는 행렬 구조의 일치가 관측 사실이 아니라 표기 약속이 된다.

$$L_{\alpha} = L_{0\alpha} + \sum_{e=1}^{m} g_{\alpha e}\, b_e b_e^{\mathsf{T}}, \qquad b_e = e_{a_e} - e_{b_e}, \qquad g_{\alpha e} \geq 0 \tag{7.1}$$

여기서 희소성은 가능한 쌍의 수에 비해 m이 작다는 뜻이다. 일반적인 물리 원리에서 유도하지 않으며 검증할 모형 제약으로 도입한다. 자료가 독립 조절 가능한 결합 수백 개를 요구한다면 원래 가설은 설명의 경제성을 잃는다. 개별 채널에 불편한 결합을 임의로 보지 않을 자유를 줘도 검증 가능성이 약해진다. 따라서 참여 채널에 어떤 상호작용이 존재해야 하며 어떤 민감도 한계 아래 응답 부재를 의미 있는 결과로 볼 수 있는지 분석 전에 밝혀야 한다.

공통 후보 사전과 공통 활성 구조

가능한 변의 행렬만으로는 실제 존재하는 변을 정하지 못한다. B에 열 둘이 있고 첫 탐침의 가중치가 (g, 0), 둘째가 (0, g)라고 하자. 공통인 것은 후보 사전이며 공통 활성

결합은 없다. 따라서 단일 구조라는 가설은 영이 아닌 결합의 집합 Ɛ*와 그 원소 수의 상한, 참여하는 민감한 채널을 명시해야 한다.

$$E_{\alpha}^{\mathrm{act}} = \{e : g_{\alpha e} > 0\}, \qquad E_{\alpha}^{\mathrm{act}} = E_{*} \tag{7.2}$$

등식은 검증할 결합과 영이 아닌 상호작용을 갖는다고 미리 정한 채널에만 해당한다. 물리 이론이 특정 채널의 상호작용 부재를 허용한다면 분석 전에 그 예외를 고정한다. 다음 탐침이 다른 것들과 불편하게 어긋날 때마다 도입할 수는 없다. 검출 가능성을 위해서는 주어진 정확도로 접근할 수 있는 세기 구간도 필요하다. 경계 g = 0은 영가설의 극한으로 남는다.

제8장의 두 탐침 수치 예는 더 좁은 형태를 고른다. m = 1이고 순서를 구별하지 않는 같은 쌍 하나, 0부터 3 s^{-1}까지의 g, 알려진 양의 계수 ηα를 사용해 gα = ηαg로 둔다. 첫 탐침은 $\eta_1 = 1$, 둘째는 $\eta_2 = 1{,}6$이다. 두 아날로그 모형 사이에 정한 관계이며 서로 다른 자연장의 보편적 상호작용 비가 아니다. 외부 경계에는 g = 0도 포함한다. 영이 허용되는 한 활성 결합의 존재는 확립되지 않는다.

노드들은 분석 전에 대응시킨다. 탐침마다 공칭 가중치와 포트 선택 연산자, 발생원 및 응답의 규격화를 안다. 추가 없는 모형과 공통 쌍 모형, 두 채널에 서로 다른 쌍을 허용하는 모형을 따로 고려한다. 모든 경우에 통상 가중치의 상대 변화 한계를 같게 유지한다. 따라서 같은 교정 불확실성 아래 구조의 공통성을 검증한다.

공유 후보 사전과 진정한 공유 활성 링크의 차이는 그림 24에서 볼 수 있습니다.

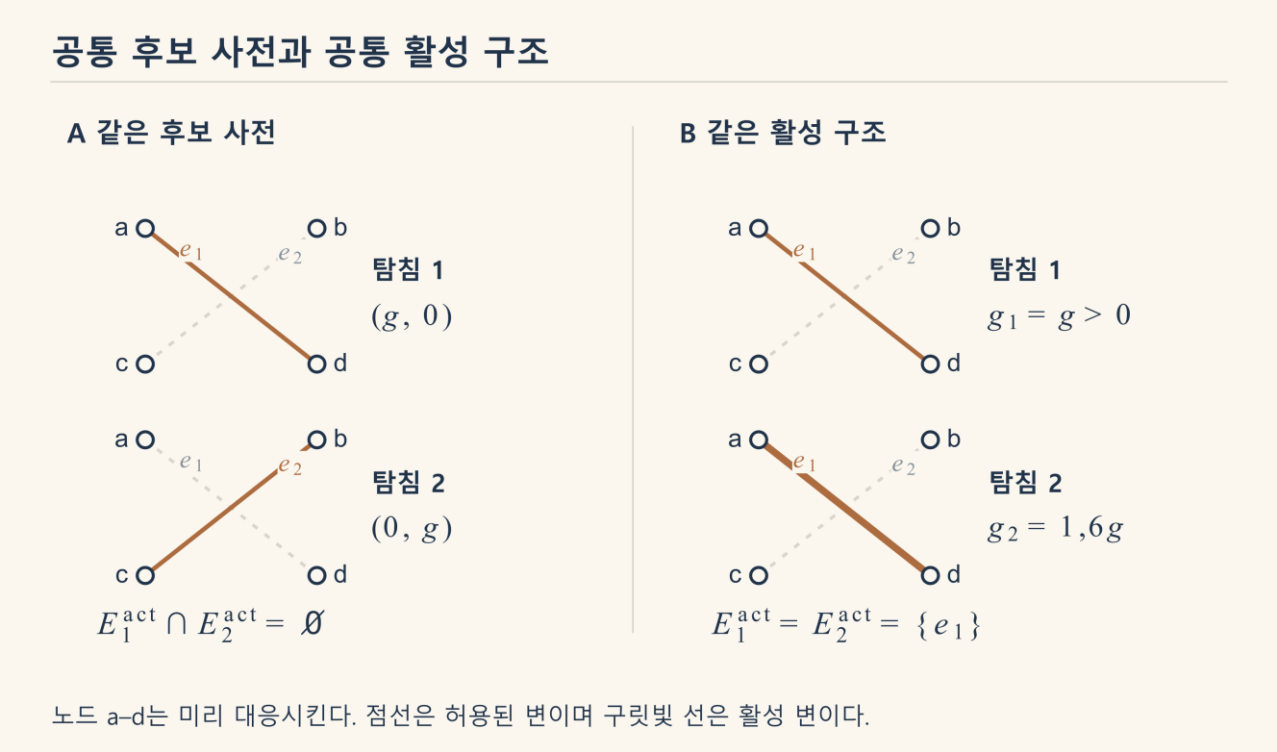


그림 24. 공통 후보 사전과 공통 활성 구조는 서로 다른 조건이다. 왼쪽 두 도식의 탐침들은 같은 변 e_1과 e_2를 허용하지만 사전의 다른 항목을 활성화하므로 활성 집합의 공통부분은 비어 있다. 오른쪽은 미리 대응시킨 노드 사이 같은 결합이 활성화되어 있다. 계수 g와 1,6g는 두 탐침 모형에 정한 민감도 비를 반영하며 자연장의 보편적 상호작용 법칙을 뜻하지 않는다.

양의 가중치가 보장하는 것

행렬 L은 모서리의 양의 가중치로 구성한다. 임의의 실수 벡터 x에 대한 이차 형식은 이웃 노드 사이 차이의 제곱들의 합이다. 여기서 고유값의 비음수성과 방정식 $\dot{x} = -Lx$의 감쇠 모드 안정성이 따라 나온다. 각 연결은 양끝의 값 차이에만 반응하므로 균일한 상태는 영 모드로 남는다. 이 성질들은 선택한 유사계의 수학적 일관성을 보장한다. 근본 공간에도 같은 동역학이 적용된다는 증거는 아니다.

$$x^{\mathsf{T}} L x = \sum_{e} w_e \left(x_{a_e} - x_{b_e}\right)^2 \geq 0, \qquad L\mathbf{1} = 0 \qquad (7.3)$$

양의 실수 s에서 연산자 $A = L + sI$는 양의 정부호이며 가역이다. L의 차원이 역시간이면 s도 같은 단위로 측정하고 $G = A^{-1}$의 차원은 시간이다. 추가 결합의 계수 g도

초의 역수로 측정한다. 벡터 b는 무차원이다. 따라서 곱 g $b^{T}G_{0}b$는 무차원이며, 뒤의 공식에서 일과 더하는 데 필요한 조건을 만족한다. 이런 단위 검증은 수학 모형을 전기회로나 역학 시험대로 옮길 때 특히 유용하다.

기존 결합에 대한 음의 증분은 따로 고려해야 한다. 최종 가중치가 음이 아니면 물리적으로 허용될 수 있지만 여기서 검증하는 추가 부류 g ≥ 0에는 속하지 않는다. 방향성 상호작용과 능동 증폭기, 비대칭 연산자도 모형의 성질을 바꾼다. 맞춤 실패 뒤 말 한마디를 덧붙여 포함할 수 없다. 부류를 확장할 수는 있지만 새로운 안정성 조건과 응답 공식, 구별 가능성의 재평가가 따라야 한다.

추가 결합 하나의 정확한 응답

하나의 연결에 대해, 파생은 성가신 매트릭스 대수에 의존하지 않고 수행 할 수 있습니다. 이전 솔루션 $x_{0} = G_{0}f$를 표시하고, 여기서 f은 주어진 외부 영향입니다. 연결을 추가한 후 방정식은 $(A_{0} + gbb^{T})\,x = f$가 됩니다. G_{0}을 곱하면 $x = x_{0} - gG_{0}b(b^{T}x)$가 됩니다. 전체 알 수 없는 수정은 이제 추가된 연결 끝의 상태 차이에 따라 단일 스칼라 $\beta = b^{T}x$에 따라 달라집니다.

$$\beta = \frac{b^{\mathsf{T}} x_{0}}{1 + g\tau}, \qquad \tau = b^{\mathsf{T}} G_{0} b > 0 \tag{7.4}$$

β를 다시 대입하고 작용 f가 임의임을 이용하면 전체 전달행렬의 변화를 얻는다. 표준 셔먼–모리슨 항등식의 특수한 경우이다. 역사적 출처를 유지하는 일이 중요하다. 제안하는 연구의 대상은 알려진 대수 공식을 자신의 성과로 삼는 것이 아니라 측정 설정과 연결성 모형의 검증이다. 여기서는 독자가 각 단계와 적용 조건을 확인할 수 있도록 특정 연결망 부류에 대해 공식을 다시 유도했다. [19]

$$\Delta G = -\frac{g}{1 + g\tau}\, u u^{\mathsf{T}}, \qquad u = G_{0} b \tag{7.5}$$

응답은 공간 분포 하나와 그 자신의 곱으로 인수분해된다. 따라서 랭크는 일을 넘지 않는다. 양의 s에서 보정은 음의 준정부호이다. 측정량의 어떤 이차 조합도 양수가 아닌 값을 준다. 그러나 u의 성분들이 서로 다른 부호를 가질 수 있으므로 개별 비대각 원소에는

양과 음의 부호가 모두 가능하다. 행렬의 부호에 대한 주장을 모든 개별 원소의 부호에 관한 주장으로 바꿀 수 없다.

일부 포트에만 접근할 수 있으면 선택 연산자 P가 분포 u를 Pu로 바꾼다. 랭크 일의 구조는 유지되지만 진폭은 매우 작아지거나 완전히 사라질 수 있다. 이때 신호 부재는 선택한 포트가 그 결합에 민감하지 않음을 뜻한다. 결합 자체가 없다는 것과 같지 않다. 센서 배치가 검증할 가설의 일부인 이유이다. 같은 대상도 한 포트 구성에서는 구별되고 다른 구성에서는 거의 보이지 않을 수 있다.

추가된 에지에서 사용 가능한 포트 행렬로의 전환이 그림 25에 표시됩니다.

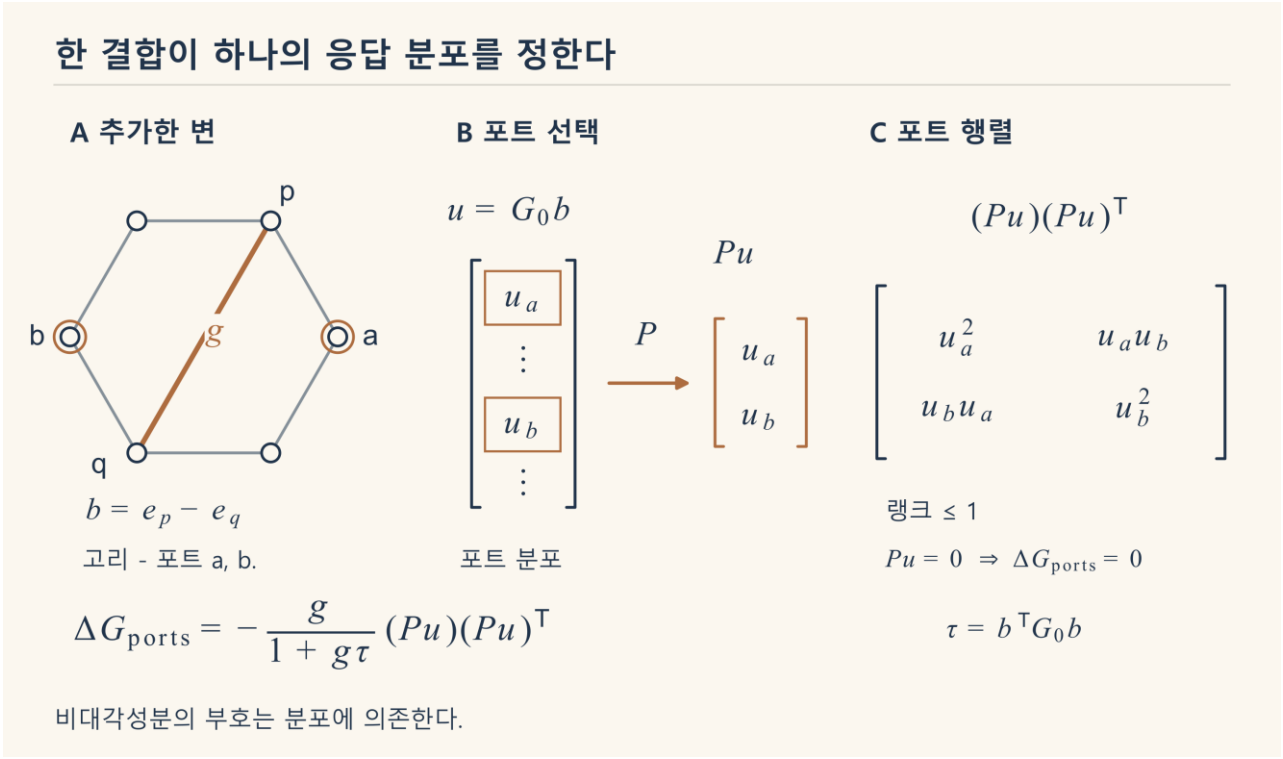


그림 25. 추가 결합 하나의 응답 인수분해. p와 q 사이 변이 벡터 b를 정하고 공칭 연산자의 역연산이 이를 분포 u로 바꾼다. 예시용 두 포트를 선택하면 성분 u_a와 u_β 만 남는다. 이들의 외적은 음의 공통 인자를 가진 관측 가능한 보정을 만든다. 랭크는 일을 넘지 않지만 개별 비대각성분의 부호는 어느 쪽도 가능하다. Pu = 0이면 선택한 포트는 추가 결합에 민감하지 않다.

강한 결합을 언제나 더 잘 측정하는 것은 아닌 이유

공식은 또 다른 한계를 드러낸다. g가 커지면 인자 g/(1 + gτ)의 진폭은 포화된다. 가중치가 다른 매우 강한 두 결합은 양 끝을 거의 똑같이 묶어 비슷한 응답을 낼 수 있다.

장비는 변화를 확실히 검출해도 정확한 세기는 제대로 추정하지 못한다. 완전히 알려진 모형에서도 검출 가능성과 매개변수 결정의 정확도가 달라지는 예이다. 센서 민감도를 높이는 방법은 신호의 g 의존성 자체가 약해 불확실성을 정하는 단계에 이르기 전까지만 도움이 된다.

$$\frac{\partial \Delta G}{\partial g} = -\frac{u u^{\mathsf{T}}}{\left(1 + g\tau\right)^{2}}, \qquad \lim_{g \to \infty} \Delta G = -\frac{u u^{\mathsf{T}}}{\tau} \tag{7.6}$$

이것은 측정 척도의 실용적인 선택을 의미합니다. 각 포트 쌍에 대해 신호 크기뿐만 아니라 알 수없는 매개 변수에 대한 도함수를 추정하는 것이 유용합니다. 가장 큰 편차를 가진 채널은 반드시 가장 작은 오류 g을 제공하지 않습니다. 여러 s의 공동 분석은 u의 프로파일과 τ의 값이 척도로 변경되기 때문에 상황을 향상시킬 수 있습니다. 그러나 그것은 무료로 정보를 생성하지 않습니다: 범위 s는 실제 장치의 모델의 기록 시간, 소음 및 정확성에 의해 제한됩니다.

여러 연결과 공통 결합 무늬

추가 결합이 여러 개이면 벡터 b들을 행렬 B의 열로 모으고 양의 가중치의 대각행렬 Γ를 도입한다. U = BΓ¹ᐟ²로 두면 편리하다. 방정식 A₀x + UUᵀx = f의 해는 작은 벡터 z = Uᵀx를 찾는 문제로 귀착된다. 식 x = G₀f − G₀Uz에 Uᵀ를 곱하면 z에 대한 m차원 선형 방정식계를 얻는다. 이를 풀면 표준 우드베리 항등식의 형태가 나온다.

$$\Delta G = -G_0 U \left(I + U^{\mathsf{T}} G_0 U\right)^{-1} U^{\mathsf{T}} G_0 \tag{7.7}$$

s > 0에서 내부 행렬은 양의 정부호이다. 따라서 보정은 다시 음의 준정부호이며 랭크는 B의 선형 독립 열 수를 넘지 않는다. 추가한 변 수보다 작을 수도 있다. 예를 들어 순환을 이루는 변들의 벡터는 선형 종속이다. 노드 일부만 측정하면 관측 랭크가 더 작아질 수 있다. 따라서 뚜렷한 특이값의 수는 섭동의 복잡성에 제한된 정보를 주지만 숨은 결합의 보편적 개수 측정기는 아니다.

다중 채널 버전에서, 에지의 공유 활성 세트는 위의 정의에 의해 주어진다. B 행렬 자체는 확장 사전으로 작성할 수 있지만 영 열 가중치는 가짜 합의를 생성해서는 안

됩니다. 이 테스트는 공유 구조 모델을 별도의 구조 모델 및 도구적 원인과 비교합니다. 일치하는 인덱스의 수는 알려진 노드 매핑 및 정량 측정 예측과 함께만 유용합니다.

보정은 가설에 들어간다

통상적인 변들도 변한다. 일차 기여는 −G₀δLG₀이며 δL은 작은 국소 증가량들의 합이다. 포트가 제한되면 이 기여가 새 결합 하나처럼 보일 수 있다. 따라서 이후 절차에서는 기준 하나를 허용 보정들의 모형군으로 바꾼다. 통상 가중치 각각의 상대 편차 절댓값이 ε = 0,02 이하라고 하자. 계산 실험에서는 생성기의 정확한 조건이지만 실제 장비에서는 독립 보정에 근거해야 한다.

잔차 벡터 r과 오차 공분산 행렬 C로 불일치 함수를 구성하면 편리하다. 경로마다 다른 정밀도와 그 사이 상관관계를 고려한다. 그러나 여러 쌍을 탐색한 뒤의 함수 최소값을 맞춤 매개변수 하나의 통상적 통계량으로 자동 해석해서는 안 된다. 알고리즘은 연속적인 결합 세기와 양끝의 이산 위치를 함께 고른다. 우연히 잘 맞을 확률은 최적화의 마지막 단계뿐 아니라 전체 탐색을 고려해야 한다.

$$\chi^{2} = r^{\mathsf{T}} C^{-1} r \tag{7.8}$$

이제 두 비교 모형은 추가 결합에서만 다르다. Hcal에서는 주어진 구간 안에서 통상 가중치가 자유롭게 바뀐다. Hcal+edge에는 같은 한계가 적용되며 추가 양의 결합을 허용한다. 완벽히 고정된 기준으로 얻은 문턱값을 이 비교에 그대로 적용할 수 없다. 제한된 부류에 대해서는 양의 행렬의 순서를 이용하고 가중치 144개 전체에 대한 전역 최소값을 찾지 않는 다른 검증을 구성할 수 있다.

모든 허용 보정의 포락선

각 통상 가중치는 $w_e = w_{0e}(1 + \delta_e)$로 쓰며 $|\delta_e| \le \varepsilon$다. 모든 벡터 x에 대해 합 $w_{0e}\delta_e(x_a - x_\beta)^2$의 절댓값은 $\varepsilon x^{\mathsf{T}} L_0 x$ 이하로 제한된다. 따라서 허용된 모든 가중치에서 이차형식의 순서가 성립한다. 공식의 '앞선다'는 기호는 이 순서를 뜻하며 행렬의 원소별 비교가 아니다.

$$\left(1-\varepsilon\right)L_{0\alpha} \preccurlyeq L_{\alpha}(\delta_{\alpha}) \preccurlyeq \left(1+\varepsilon\right)L_{0\alpha} \qquad (7.9)$$

s > 0에서 sI를 더한 모든 행렬은 엄밀히 양의 정부호다. 역행렬을 취하면 순서가 뒤집힌다. $B^{-1/2}AB^{-1/2}$로 옮겨 확인할 수 있다. A가 B보다 작지 않으면 규격화한 행렬은 항등행렬보다 작지 않고 그 역행렬은 항등행렬보다 크지 않다. 원래 변수로 돌아오면 필요한 부등식을 얻는다. 역행렬을 취하기 전에 두 한계에 같은 양의 변 기여를 더할 수 있다.

$$A_{\pm,\alpha} = sI + \left(1\pm\varepsilon\right)L_{0\alpha} + \eta_{\alpha} g b b^{\mathsf{T}} \qquad (7.10)$$

$$A_{+,\alpha}^{-1} \preccurlyeq G_{\alpha}(s) \preccurlyeq A_{-,\alpha}^{-1} \qquad (7.11)$$

특별히 조정한 상관 표류를 포함해 허용된 가중치의 어떤 분포에도 적용되는 응답의 외부 포락선을 얻었다. 변 변화의 독립성은 필요 없다. 더 나아가 탐침마다 서로 다른 벡터 δα를 허용할 수 있다. 실제로 공통 벡터라면 부류가 더 좁아지고 포락선은 여전히 유효하다. ε < 1에서는 통상 전도도의 양성이 유지된다.

한계는 열거한 변수에만 적용된다. 미지의 전기용량과 접지 누설, 방향성 결합, 숨은 능동 소자, 부정확한 규격화는 모형에 따로 포함해야 한다. 이 공식이 어떤 장비 결함에도 보호를 제공한다고 해서는 안 된다. 장점은 유한하고 명시적인 교정 구간 전체를 정확히 포괄한다는 데 있다.

행렬 한계를 측정 가능한 구간으로 바꾸는 방법

접근 가능한 포트에서만 영이 아닌, 미리 규격화한 벡터 a를 고르고 스칼라 $z = a^{\mathsf{T}} G a$를 보자. 예를 들어 a는 대각 응답 하나나 두 포트의 차이를 √2로 나눈 것을 선택할 수 있다. 행렬의 순서에서 z의 구간이 따라온다. 기록한 행렬 원소의 공분산으로 불확실성을 직접 계산할 수 있다는 점에서 스칼라는 편리하다.

$$a^{\mathsf{T}} A_{+}^{-1} a \le z \le a^{\mathsf{T}} A_{-}^{-1} a \qquad (7.12)$$

제안 된 쌍의 경우, 두 경계는 하나의 연결에 대해 이미 파생 된 공식에 따라 g에 의존합니다. R이 g = 0를 가진 이개의 역 명목 행렬의 한을 나타내게 하십시오. 다음 z_0 = a^TRa, v = a^TRb 및 d = b^TRb. 이 모든 숫자는 에지 강도를 조정하기 전에 계산됩니다.

$$z_R(g) = z_0 - \frac{\eta g v^2}{1 + \eta g d} \qquad (7.13)$$

곡선은 증가하지 않습니다. 주어진 레벨 z*의 값의 교차점은 분모가 양수일 때 분석적으로 발견됩니다. 다른 경우에, 조건은 범위 g의 끝에 검사됩니다; 무한하거나 부정적인 형식적인 해결책은 이 시험을 위한 대용품이 아닙니다.

$$g_* = \frac{z_0 - z_*}{\eta \left[v^2 - d\left(z_0 - z_* \right) \right]} \qquad (7.14)$$

각 대비는 세기의 필요 구간을 준다. 대비와 척도, 탐침 전체에서 구간의 공통부분을 취하면 해당 쌍에 g 구간이 남거나 쌍 전체가 배제된다. 노드 64개에서 코드는 사전 선별 없이 순서를 구별하지 않는 쌍 2016개 전체를 검증한다. g = 0에서는 모두 추가 결합 없는 같은 경우를 뜻한다. 이 영역에서 지표 수천 개가 남는다고 결합 수천 개를 검출한 것은 아니다.

외부 포락선은 대비마다 서로 다른 가중치가 필요할 수 있는 값도 허용한다. 따라서 쌍이 남았다는 사실만으로 양립 가능한 소자 벡터 하나의 존재를 증명하지 못한다. 가지치기 후 전체 응답의 정확한 제약 맞춤을 수행한다. 허용점을 찾으면 양립 가능성의 증거가 되지만 국소 최적화기의 종료는 그런 점의 부재를 증명하지 않는다. 이 구별 덕분에 엄밀한 배제와 유용한 수치 탐색을 따로 활용할 수 있다.

스칼라 제약 조건과 그 한계를 결합하는 논리는 그림 26에 의해 설명됩니다.

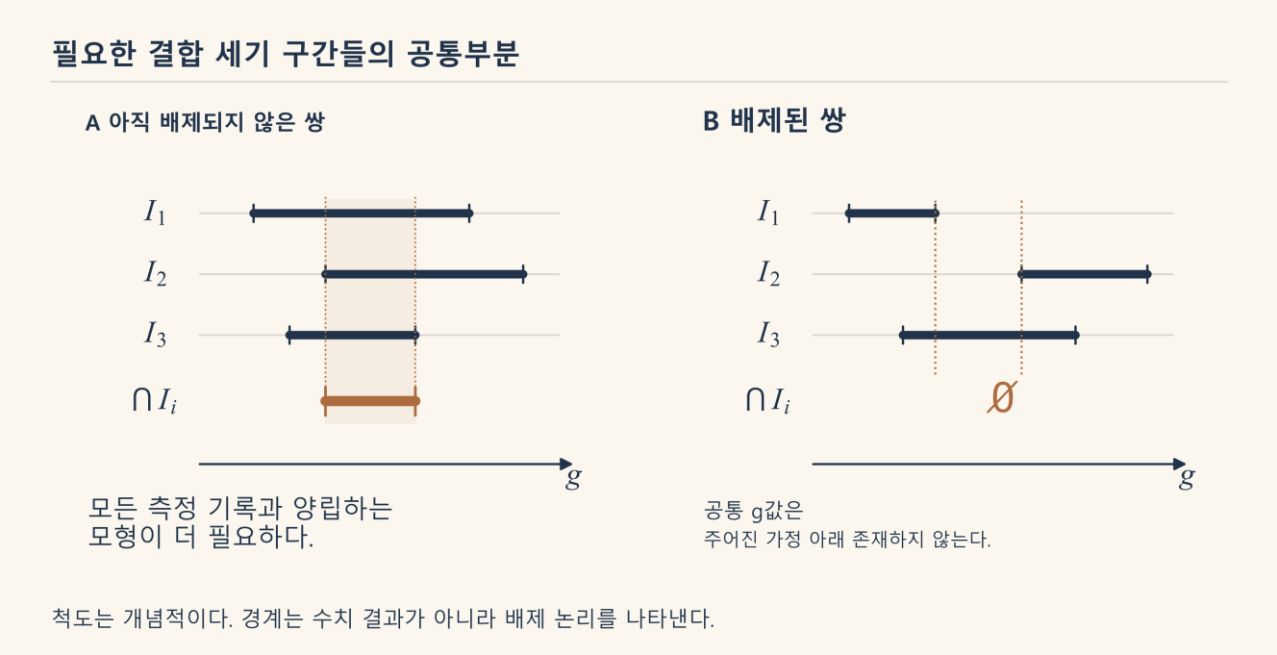


그림 26. 가정한 한 결합의 세기에 필요한 구간들. 각 대비가 g를 제약하면 구간의 공통부분을 취한다. 공통부분이 비어 있지 않으면 후보는 남지만 모든 관측과 양립하는 통상 가중치 벡터 하나가 제시된 것은 아니다. 비어 있으면 초기 전제와 선택한 동시 오차 한계 아래 해당 쌍을 배제한다. 구간 끝은 개념적이다. 외부 포락선의 논리를 설명하며 수치 탐색 결과를 그린 것이 아니다.

두 번째 탐침이 첫 번째를 반복할 때

채널들이 허용 대안들을 서로 다르게 볼 때 공통 변은 실질적인 제약이 된다. 가장 단순한 대조는 전체 연산자를 배율 변환해 얻는다. $L_2 = cL_1$이고 라플라스 매개변수에도 c를 곱하면 둘째 응답은 알려진 인자를 곱한 첫 응답의 반복이다.

$$L_2 = cL_1, \quad s_2 = cs_1, \quad G_2(cs) = \frac{1}{c} G_1(s) \qquad (7.15)$$

이러한 반복의 독립적 인 소음은 통계적 불확실성을 줄일 수 있습니다. 그러나 제로 노이즈로, 구조적 설명의 집합은 동일하게 유지: 첫 번째 채널의 허용 모델은 두 번째의 스케일 모델에 대응한다. 이것은 추가 데이터 테이블 자체가 반드시 추가 기하학적 정보를 의미하지 않는다는 엄격한 제어입니다.

다음 장에서는 두 경우를 비교한다. 한 탐침은 첫 탐침을 배율 변환한다. 다른 탐침은 방향별 공칭 전달을 바꾸고 정육면체의 반대 면에 접근한다. 이어 발견한 대안들을 분리하도록 선택한 다른 포트 구성을 도입한다. 이런 전환을 통해 어떤 정보가 결론을 바꿨고 어떤 결과가 여전히 조건부인지 밝힐 수 있다.

제8장 계산 실험과 견고성 검증

작은 실험이 필요한 이유

연구 아이디어의 첫 번째 테스트는 그 전체를 복제 할 수있을만큼 간단해야합니다. 지나치게 복잡한 시뮬레이션은 매개변수의 수 뒤에 오류를 숨기고 정확히 복구된 것을 이해하기 어렵게 만듭니다. 따라서, 유한 입방 그래프가이 책을 위해 선택되었습니다. 그것의 구조는 알려져 있으며, 추가 링크가 명시 적으로 도입되며 알고리즘은 제한된 외부 데이터 만받습니다. 이 실험을 통해 수식을 확인하고 검색 절차를 구축하며 장치를 제조하기 전에 제한 사항을 확인할 수 있습니다.

이 장의 모든 수치는 주어진 연결망을 계산해 얻었다. 첫 단계에서는 정확한 기준 아래 복원을 검증하고 둘째에서는 기준 오차 때문에 그 복원이 어떻게 무너지는지 보여 준다. 그다음 교정은 완전한 설명 모형군이 된다. 독자는 성공한 답과 위험한 반례, 선택한 모호함을 없애는 측정 변경의 순서를 전부 알아야 한다.

출발 예와 확장 검증 계열, 제한된 보정의 프로토콜은 각각의 자료 집합으로 보존했다. 섞어서는 안 된다. 포트와 보정 한계, 추론 규칙이 다르면 다른 실험이다. 모든 기록은 합성이며 시험대 제작은 측정 실습에서 따로 다룬다. 자료 집합과 프로그램의 대응은 동봉 안내에 제시한다.

알려진 격자와 알려지지 않은 연결

계에는 4 × 4 × 4 정육면체의 정수 좌표점에 놓인 노드 64개가 있다. 각 노드는 세 좌표 방향의 가장 가까운 이웃에만 연결된다. 통상 변은 총 144개이며 각 세기는 1 s⁻¹이다. 정육면체의 여덟 꼭짓점을 포트로 사용한다. 채택한 번호 순서에서 지표는 0, 3, 12, 15, 48, 51, 60, 63이다. 내부 노드를 직접 측정하지는 않지만 그 존재와 원래 결합들은 알고리즘에 알려져 있다.

좌표 (0, 1, 1)과 (3, 2, 2)인 노드 5와 58을 추가로 연결했다. 새 결합률은 0,3 s⁻¹다. 이전 격자에서는 두 점 사이에 가장 가까운 변을 적어도 다섯 개 지나야 한다. 따라서 주어진

그래프에 비해 이 결합은 기존 경로의 지름길이다. 이는 망의 기하 구조에 관한 정의다. 실제 전기 구현에서는 통상적인 도선으로 두 점을 연결해도 새 공간 차원이 생기지 않는다.

척도마다 결합 추가 후 포트 전달행렬의 변화를 측정한다. 라플라스 변환의 양의 실수 매개변수 네 개, 0,1; 0,3; 1,0; 3,0 s^{-1}을 쓴다. 처음 세 개는 맞춤에 참여하고 마지막은 예측 검증을 위해 남겨 둔다. 이 수치들은 헤르츠 단위의 주파수가 아니다. 시간 응답의 지수 가중치를 정한다. 사인파 장치로 직접 옮기려면 실수 매개변수를 적절한 복소수 식으로 바꿔야 한다.

각 척도에서 포트 행렬의 64개 원소마다 독립적인 가우스 잡음을 더했다. 첫 실행의 표준편차는 10^{-5} s다. 참행렬은 상반성을 갖지만 i → j와 j → i 방향의 잡음은 독립적으로 선택한다. 각각 따로 취득한 기록을 가정하기 때문이다. 따라서 잡음이 섞인 행렬은 정확히 대칭일 필요가 없다. 이는 특정한 기록 모형이며 물리적 네트워크의 상반성 위반이 아니다. 첫 실행에는 기본 교정 오차가 없다.

그림 27에서 세 가지 다른 개체가 표시됩니다. 알려진 입방 프레임, 선택한 포트 및 삽입된 연결입니다. 포트의 위치는 실험 조건의 일부로 읽어야합니다. 이것은 후속 섹션에서 변경 될 것입니다; 이것은 동일한 64 노드를 가진 새로운 측정 프로토콜이 될 것입니다.

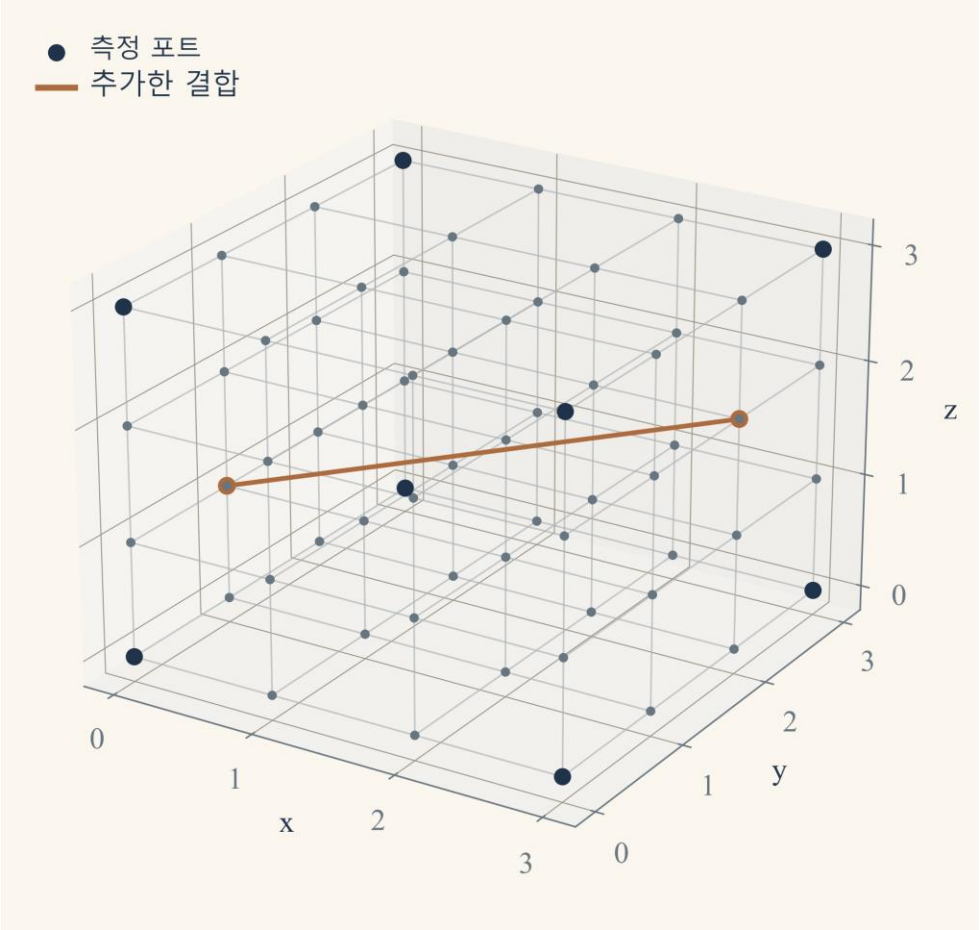


그림 27. 4 × 4 × 4 정육면체의 출발 실험. 꼭짓점 포트 여덟 개가 노드 5와 58 사이의 추가 결합 효과를 관측한다. 번호는 좌표 x, y, z에 따라 매기며 z가 가장 빨리 변한다.

알고리즘이 답을 찾는 방법

알고리즘은 노드 64개의 순서 없는 쌍 2016개 전체를 고려한다. 후보에는 기존의 국소 변도 들어간다. 양의 가중치를 더하면 통상적인 결합 강화가 된다. 각 쌍에 대해 0부터 3 s⁻¹까지 g를 맞춘다. 이전 장의 정확한 공식으로 예측을 계산하고 잡음이 있는 행렬 세 개와 비교한다. 따라서 방향을 구별한 기록 192개를 사용한다. 알고리즘에는 설명의 부류가 미리 주어진다. 알려진 노드 집합에서 정확히 하나의 양의 결합이 바뀌었다는 것이다.

난수 생성기의 초기 상태와 계산 환경은 부속 자료에 고정해 두었다. 다시 계산했을 때 마지막 자리까지 얼마나 가까운 결과가 나오는지는 수치 절차의 정밀도에 달려 있다.

따라서 안정적으로 유지되는 숫자, 선택된 쌍, 오차의 거동을 비교해야 한다. 기계의 반올림 결과가 일치한다는 사실 자체는 물리적 결과가 아니다.

프로그램 안에서 직접 구한 역행렬과 해석적 보정을 비교한다. 네 척도에서 상대 차이는 약 2,4 × 10⁻¹⁴부터 4,4 × 10⁻¹⁴ 사이다. 오차 없는 전체 보정의 두 번째 특이값과 첫 특이값의 비도 기계 정밀도 근처다. 이는 항등식과 랭크 일의 구현을 검증한다. 이 정확도는 잡음 자료로부터의 복원에 해당하지 않으며 미래 물리 장비의 가능한 정밀도를 나타내는 것은 더욱 아니다.

랭크 검증은 그림 28에 나타냈다. 여기서는 응답 변화 전체 행렬의 특이값 64개 가운데 처음 여덟 개를 보여 준다. 이 행렬은 측정하는 포트 블록 8 × 8과 다르다. 뒤따르는 값들이 거의 영이라는 사실은 오차 없는 전체 응답의 대수적 인수분해를 확인해 준다. 잡음이 있는 포트 자료로부터의 탐색은 별도의 역문제를 푼다.

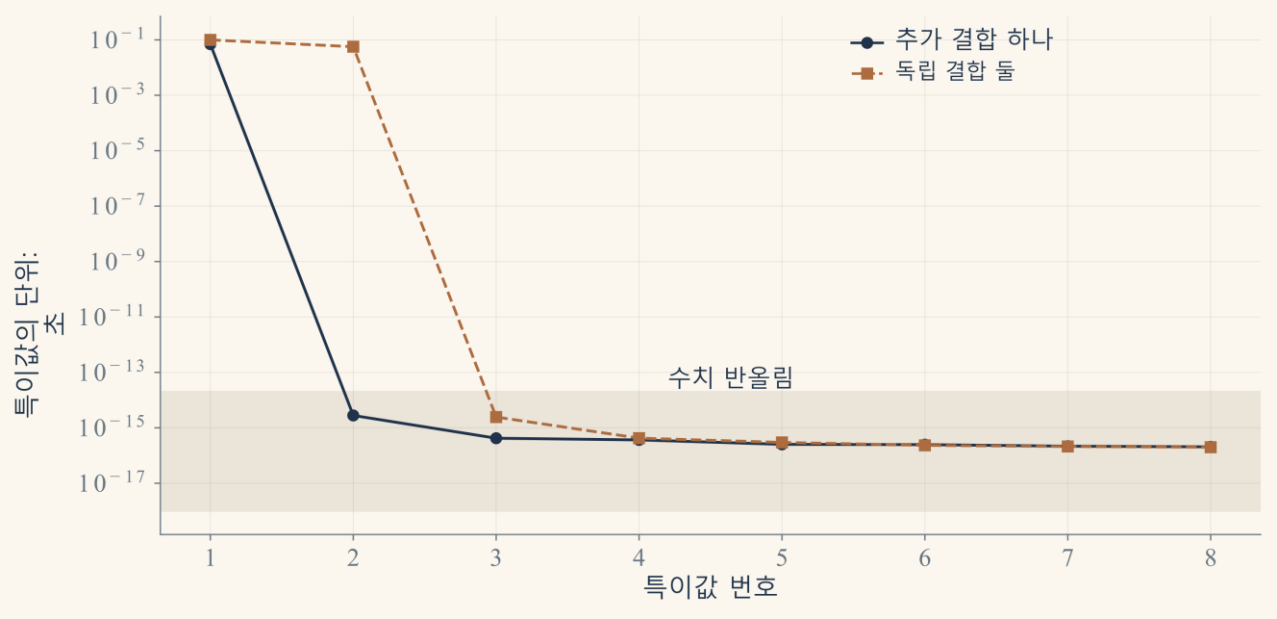


그림 28. 크기 64 × 64인 전체 응답의 처음 여덟 특이값. 랭크 일은 기준을 알고 있을 때 결합 하나를 정확히 더한 결과에 해당한다. 표시한 값의 수가 포트 수를 뜻하지는 않는다.

첫 실행에서 얻은 것

가장 좋은 후보는 실제로 쌍 5와 58이었다. 복원한 세기는 0,2994421092 s⁻¹이며, 상대 오차는 약 0,186퍼센트다. 학습 자료에서 정규화한 잔차 제곱의 합은 기록 192개에 대해 163,636이다. 이는 선택한 잡음 조건에 잘 맞는 결과와 양립한다. 다만 여러 후보 중에서

선택했으므로, 이 두 수의 비율 자체를 찾아낸 쌍이 옳을 보편적 확률로 바꾸어서는 안 된다.

물리량	첫 번째 실행 결과
실제로 추가한 쌍	5와 58
복원한 쌍	5와 58
실제로 추가한 세기	0,3000000000 s^{-1}
복원한 세기	0,2994421092 s^{-1}
세기의 상대 오차	0,18596 %
잡음 없는 검증용 응답의 예측 오차	0,17179 %
기록 하나당 검증용 χ^2	1,30606

다음 두 후보인 쌍 5와 42, 쌍 21과 58의 학습 χ^2는 각각 약 70 584와 70 763이었다. 이 특정한 저잡음 예에서 최선 후보와 검토한 가장 가까운 경쟁 후보의 차이는 크다. 검증용으로 남긴 척도 3 s^{-1}에서 오차 없는 응답의 예측 상대 오차는 약 0,172퍼센트였다. 알려진 합성 참값에 대해 계산한 양이다. 실제 실험에서는 이런 참값이 없으며 새 잡음 측정값에 대한 잔차만 직접 이용할 수 있다.

따라서 첫 실행은 신중히 제한한 문제에서 복원이 가능함을 보여 준다. 다른 노드 쌍과 잡음 수준, 기준 오차에서의 성공 비율을 평가하지는 않는다. 순방향 계산과 역탐색이 같은 연산자 부류를 사용한다는 점은 특히 유리한 조건이다. 따로 남긴 척도는 이 부류 안에서 예측을 검증하지만 모의실험을 물리 모형의 독립 검증으로 바꾸지는 않는다. 다음 단계에서는 유리한 조건 일부를 의도적으로 완화한다.

그림 29의 행렬은 응답의 공간 무늬를 보여 준다. 개별 비대각 셀의 부호는 분포 u의 성분들의 곱으로 정해진다. 따라서 양의 셀이 있다고 전체 보정의 음의 준정부호성과 모순되지는 않는다. 복원에는 특히 눈에 띄는 원소 하나가 아니라 일관된 행렬 전체를 사용한다.

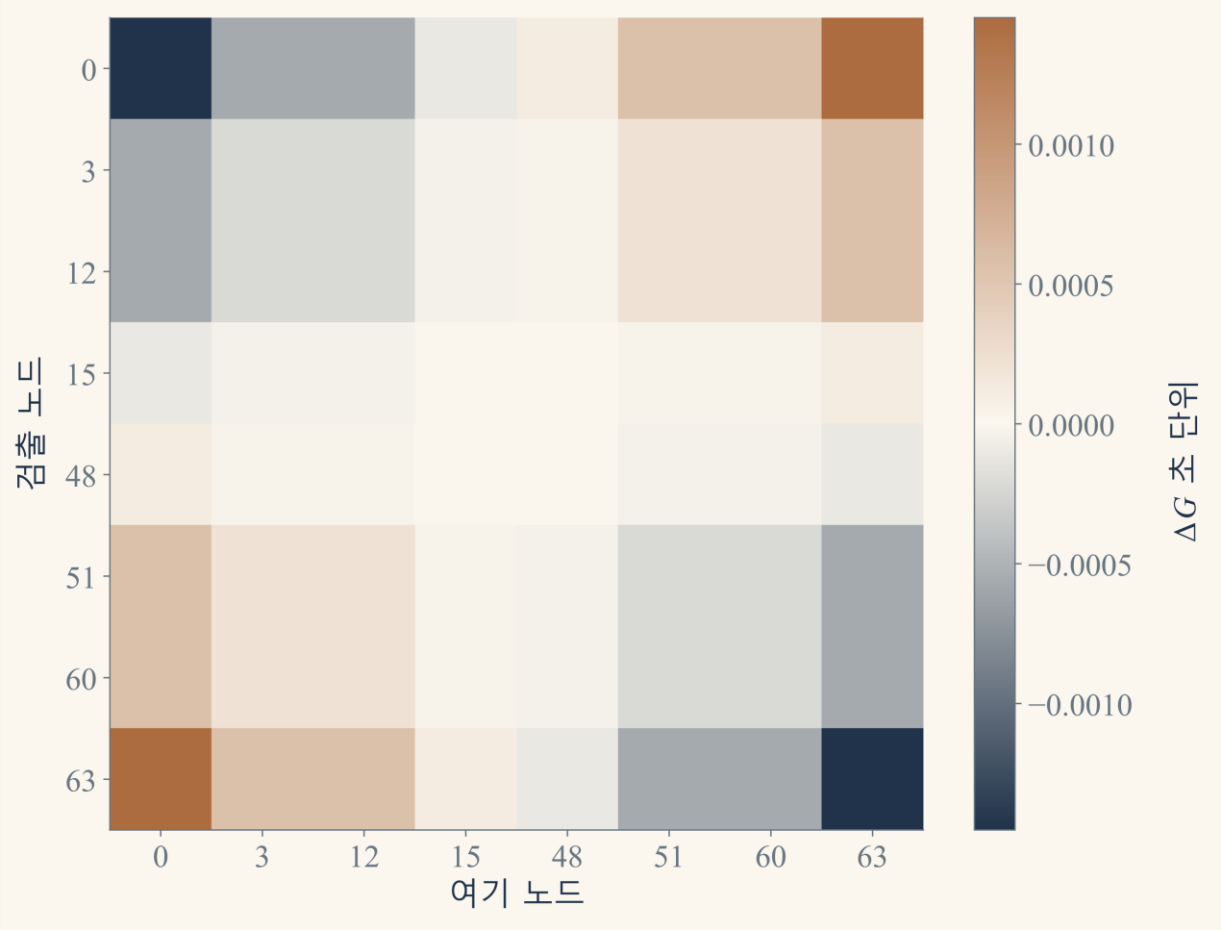


그림 29. 첫 실험에서 포트별 응답 변화. 공간 무늬는 결합 양끝의 후보에 관한 정보를 담으며, 하나의 총진폭만 쓰면 이 정보를 잃는다.

한 예 대신 일련의 검증

확장 프로그램은 여섯 시나리오에서 각각 스무 실현을 수행한다. 첫 셋은 검출 잡음의 표준편차만 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3} s로 바꾼다. 다음 둘은 알고리즘이 모르는 통상 변의 오차를 추가한다. 평균이 일인 독립적인 양의 로그정규 인자를 가중치에 곱한다. 로그 표준편차는 0,005 또는 0,02이며, 이처럼 작을 때 상대 산포 약 0,5와 2 퍼센트에 해당한다. 마지막 시나리오는 장거리 결합 대신 국소 변 5-6을 강화한다.

확장 탐색에서는 먼저 영을 포함한 세기 값 161개의 격자에서 쌍 2016개 전체를 평가하고 최선 열두 개를 정밀화한다. 공개한 자료 집합 세 개의 별도 검증은 원래 자료 생성 순서를 복원하고 가속 탐색을 각 쌍을 0부터 3 s^{-1}까지 양 끝을 포함한 전 구간에서 정밀화하는 방법과 비교한다. 검증 실행 순서는 동봉 안내에 제시한다.

시나리오	잡음 σ, 초 단위	올바르게 찾은 쌍	g 오차의 중앙값	기록당 χ²의 중앙값
정확한 기준	10^{-5}	20 중 20	0,131 %	0,973
정확한 기준	10^{-4}	20 중 20	1,306 %	0,973
정확한 기준	10^{-3}	20회 중 12회	15,913 %	0,965
기준 산포 약 0,5 %	10^{-4}	20회 중 18회	10,134 %	7,290
기준 산포 약 2 %	10^{-4}	20회 중 1회	73,378 %	75,956
국소 변 대조	10^{-4}	20회 중 19회	3,221 %	0,982

테이블의 g의 중앙값 오류는 잘못된 쌍으로 실행되는 것을 포함하여 각 시나리오의 이십개 실행 전체에서 계산됩니다. 추론된 종점이 잘못된 경우, 추정된 무게는 다른 연결을 의미하며, 실제 0,3 s^{-1}과의 비교는 동일한 물리적 양을 추정하는 정밀도가 아니라 알고리즘의 전반적인 진단 역할을 합니다. 정확하게 식별 된 쌍의 비율은 또한 작은 고정 앙상블을 설명합니다. 20에서의 20 성공조차도 완벽한 신뢰성을 확립하지 못합니다: 그 카운트에 대한 95 퍼센트 윌슨 간격은 0,839에서 1까지 대략 실행됩니다.

각 시나리오 내에서 12000에서 12019까지 서로 다른 임의 초기 상태가 사용됩니다. 이 세트는 조건의 비교를 더 투명하게 만들기 위해 시나리오 간에 반복됩니다. 따라서 모든 120 실행은 동일한 일반적인 성공 확률에 대한 독립적 인 테스트로 간주 될 수 없습니다. 또한, 메인 시리즈는 하나의 장거리 쌍을 테스트하고 컨트롤은 하나의 로컬 쌍을 테스트합니다. 결과 공유는 지오메트리와 가중치의 새로운 앙상블 없이 숨겨진 연결의 임의 위치로 전송할 수 없습니다.

세 검증 모두 같은 쌍 5-58을 선택했으며 찾은 세기의 차이는 10^{-7} s^{-1}보다 작다. 두 기록에서는 이전에 보존한 작은 차이도 일치했다. 첫 기록의 마지막 자릿수는 전체 수치 최소화 절차에 의존한다. 새 파일은 두 값을 모두 보존하며 남아 있지 않던 이전 실행 방식의 복원을 비트 단위 재현이라고 제시하지 않는다. 이 검증은 자료 집합 세 개에 관한 것이며 모든 신호에서의 전역 최적성을 증명하지는 않는다.

그림 30에서는 선택한 쌍의 정답 여부와 잔차 크기를 구별해야 한다. 잡음이 10^{-3} s이면 잘못된 쌍도 잔차가 일 정도로 자료를 설명할 수 있다. 기준 오차가 있으면 잔차가 흔히 커진다. 서로 다른 메커니즘이므로 서로 다른 대조 실험이 필요하다.

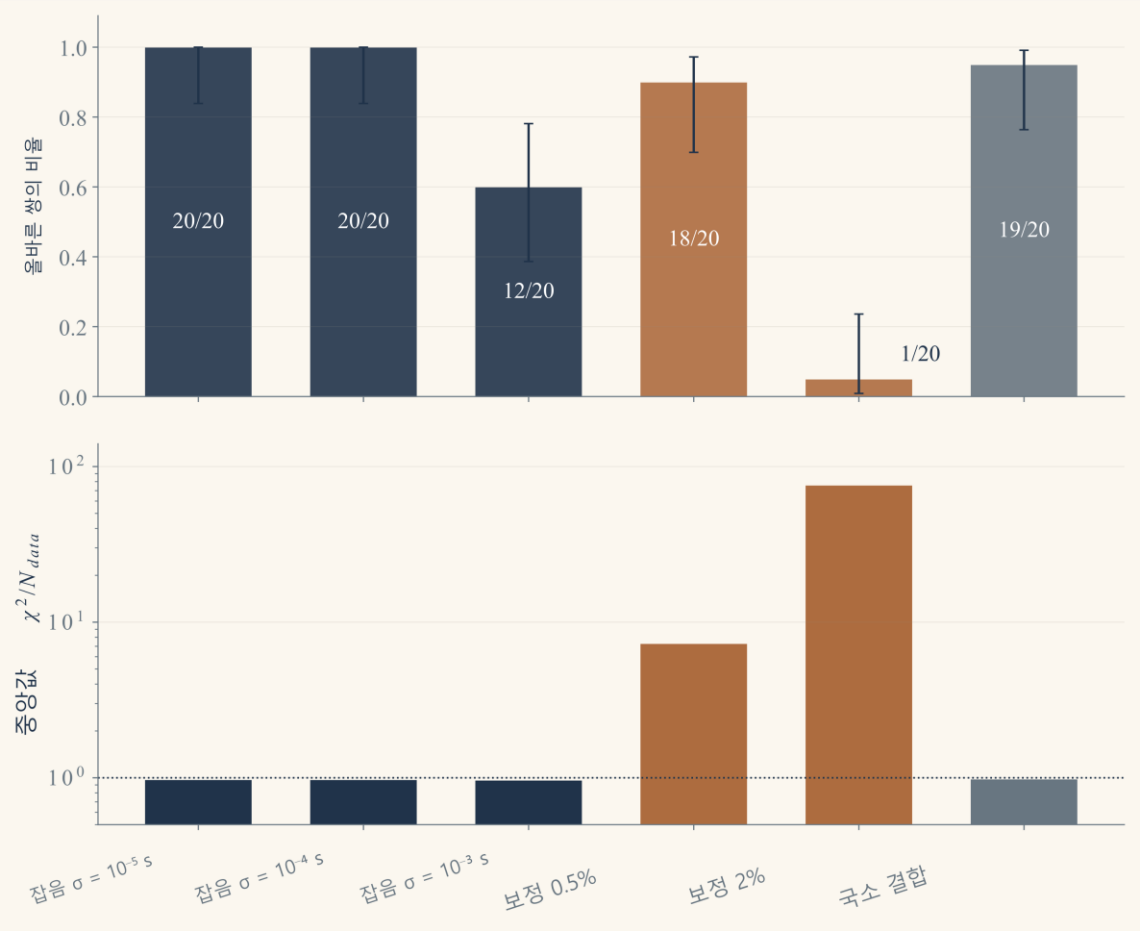


그림 30. 확장한 검증 계열. 복원과 잔차 지표는 명시한 개별 앙상블들에 해당한다. 전체 실행 수를 방법 신뢰성의 단일 표본으로 보는 것은 아니다.

기준값의 오류가 멋진 최소값보다 중요한 이유

교정이 정확할 때 잡음 증가는 주로 후보들의 구별 가능성을 악화시킨다. 가장 잡음이 큰 시나리오에서는 스무 번 중 열두 번 올바른 끝점을 찾았다. 그래도 기록당 학습 χ^2의 중앙값은 일 정도로 남는다. 이유는 간단하다. 잘못된 구성도 큰 잡음 속의 약한 신호를 때로 충분히 잘 재현한다. 허용 가능한 잔차는 모형의 필수 검증이지만 그것만으로 복원한 내부 그림이 참임을 확립하지 못한다.

고려하지 않은 기준 네트워크의 변동은 다르게 작용한다. 오차가 약 반 퍼센트이면 열여덟 구현에서 여전히 올바른 쌍을 찾지만, 세기 오차의 중앙값은 십 퍼센트로 커지고 정규화 잔차는 일을 뚜렷이 넘는다. 이 퍼센트에서는 스무 번 중 한 번만 올바른 쌍이 남는다. 알고리즘은 여전히 어떤 최선의 답을 자신 있게 선택하지만, 초기 격자를 완벽하게 안다는 전제는 이미 깨졌다. 여기서 최선이라는 말은 잘못된 후보 집합 안에서만 의미가 있다.

이 오류가 어떻게 발생하는지 정확히 이해해야 합니다. 시뮬레이션의 실제 기본 그래프는 명목 그래프와 다르지만 신호에서 차감되는 명목 응답입니다. 이 모델은 인식할 수 없는 교정 불일치를 모델링합니다. 물리적 실험에서, 동일한 조건 하에서의 실제 기준선 응답이 각 스위치 전에 측정되면, 영구적 편차의 일부가 제거될 수 있다. 따라서 주어진 비율은 보편적 인 구성 요소 수락 한도가 아닙니다. 측정 모델에서 특정 누락의 비용을 표시하고 추가 교정 절차에 동기를 부여합니다.

따로 남긴 자료의 검증도 주의 깊게 읽어야 한다. 산포 약 0,5 퍼센트에서 잡음 없는 검증용 변화 예측의 상대 오차 중앙값은 약 99 퍼센트지만, 잡음 자료에 대한 규격화한 오차는 기록당 약 1,49다. 두 수치는 모순되지 않는다. 약한 순수 신호는 복원이 나빠도 잡음과 비슷한 크기일 수 있다. 상대 오차나 규격화한 잔차 중 하나만 제시하면 부족하다. 함께 보아야 민감도와 기술의 품질을 알 수 있다.

검출 문턱값과 국소 대조

각각의 세 잡음 수준에 대해 추가 결합 없이 정확한 기준을 쓴 영가설 실현을 백 개씩 더 수행했다. 매번 쌍 선택 알고리즘 전체가 작동한다. 영가설 모형에 비해 χ²가 얼마나 개선되는지 기록한다. 경험적 95번째 백분위점은 각각 12,3293978; 12,3296483; 12,3320514다. 전체 탐색을 반복하므로 후보 선별 효과를 고려한다. 그러나 수준당 백 실현은 이 설정의 시범 문턱값일 뿐이다. 주장한 오탐지 빈도에는 여전히 독립 검증이 필요하다.

영이 아닌 각 시나리오의 스무 실현 모두에서 개선량이 해당 문턱값을 넘었다. 올바른 쌍을 한 번만 찾은 계열도 포함한다. 이는 차이의 검출과 원인의 식별을 명확히 구별한다.

기준이 틀린 시나리오에는 실제 추가 결합이 있으므로 그 자체로 표류만의 잘못된 해석을 보여 주지는 않는다. 이를 검증하려고 아래의 별도 대조를 수행했다. 국소 대조도 문턱 초과가 상호작용의 장거리 성격을 확립하지는 않음을 일깨운다.

국소 대조 역시 실질적인 의미가 있다. 변 5-6의 통상적 강화는 스무 실현 중 열아홉에서 식별되며 같은 해석적 보정 구조를 준다. 따라서 랭크 일과 큰 맞춤 개선량은 장거리 결합만의 고유한 표지가 아니다. 차이는 독립적으로 알려진 격자에 대한 복원 끝점의 배치로 정해진다. 국소 후보를 포함해야 특이한 대안들만 제시받았다는 이유로 알고리즘이 모든 변화를 비국소적이라고 부르는 일을 막을 수 있다.

통상적인 표류에 잘못된 이름이 붙을 때

추가 대조에서는 새 결합을 전혀 넣지 않는다. 통상 변 144개의 가중치만 바꾸지만 알고리즘은 편차를 계속 양의 추가 결합 하나로 설명한다. 약 0,5와 2퍼센트의 산포 각각에 대해 잡음 10^{-4} s와 생성기 초기 상태 44000부터 44019까지를 사용해 스무 실현씩 수행했다. 마흔 경우 모두에서 개선량이 표류 없는 공칭 연결망으로 교정한 문턱값을 넘는다. 원인은 알려진 소자들의 분산된 변화인데도 절차는 선택한 쌍과 양의 세기를 다시 내놓는다.

새 결합 없는 대조	공칭 임계값 이상	찾은 g의 중앙값	기록당 χ^2의 중앙값
통상 변 산포 약 0,5 %	20 중 20	0,006220 s^{-1}	5,563
통상 변 산포 약 2 %	20 중 20	0,024068 s^{-1}	76,440

여기서 우리는 어떤 변화의 잘못된 감지에 대해 이야기 할 수 없습니다: 시스템은 실제로 표준과 다릅니다. 하나의 추가된 연결에 차이를 부여하는 좁은 해석은 잘못입니다. 큰 잔류는이 설명의 불완전 함을 더 보여줍니다. 영에 대한 개선만을 살펴보고 모델의 절대 품질을 무시하면 일반 드리프트는 설득력이 있지만 오해의 소지가 있는 이름을 쉽게 가져옵니다. 따라서 향후 연구에 대한 기준은 동시에 감지 가능한 차이, 수용 가능한 완전한 설명 및 현실적인 교정 대안보다 우월성을 요구해야합니다.

최종 확장 검증에는 합성 실현 460개가 있다. 추가 또는 강화 결합이 있는 120개, 공칭 영가설 300개, 보정 오차만 있는 40개다. 이 합은 수행한 계산량을 나타내지만 같은 분포의 독립 실험으로 이루어진 한 표본이 아니다. 각 계열은 다른 질문에 답하며 비교하는 시나리오 안에서는 무작위 초기 상태를 반복한다. 통계 결론은 설정마다 따로 제시하고 각 한계를 유지해야 한다.

좋은 잔차를 남기는 표류

큰 잔차로는 결합 하나 모형의 불완전함을 알 수 있다. 더 어려운 경우는 통상 표류가 이 모형으로 잘 기술될 때이다. 이를 구성하려고 g = 0,03 s⁻¹인 쌍 5-58의 약한 공칭 응답을 골랐다. 제약 선형 문제로 통상 가중치 144개의 변화를 ±2퍼센트 안에서 맞추어 원래 세 척도의 응답에 가깝게 한다. 이어 추가 변이 전혀 없는, 이렇게 얻은 연결망의 정확한 비선형 응답을 계산한다.

가중치를 고정한 뒤에만 표준편차 10⁻⁴ s와 seed = 271828인 독립 가우스 잡음을 더한다. 원래 알고리즘은 쌍 5-58을 고르고 g = 0,02836284 s⁻¹로 추정하며 공칭 시범 문턱값 12,33에 대해 χ²를 85,69만큼 개선한다. 기록당 학습 잔차는 0,8884, 검증용 잔차는 0,7829이다. 쌍 2016개 전체를 탐색해도 같은 선택이 확인된다. 따라서 쌍을 모두 고려해도 원인 해석 오류는 남는다.

그림 31은 약한 추가 결합과 맞춰 만든 표류를 비교한다. 내부 원인은 다르지만 행렬은 가깝다. 의도적으로 가중치들의 상관된 변화를 사용한 구성이다. 위험한 경우가 존재한다는 증거이며 원래의 독립 로그정규 앙상블에서 이런 구성이 나타나는 빈도를 평가하지는 않는다.

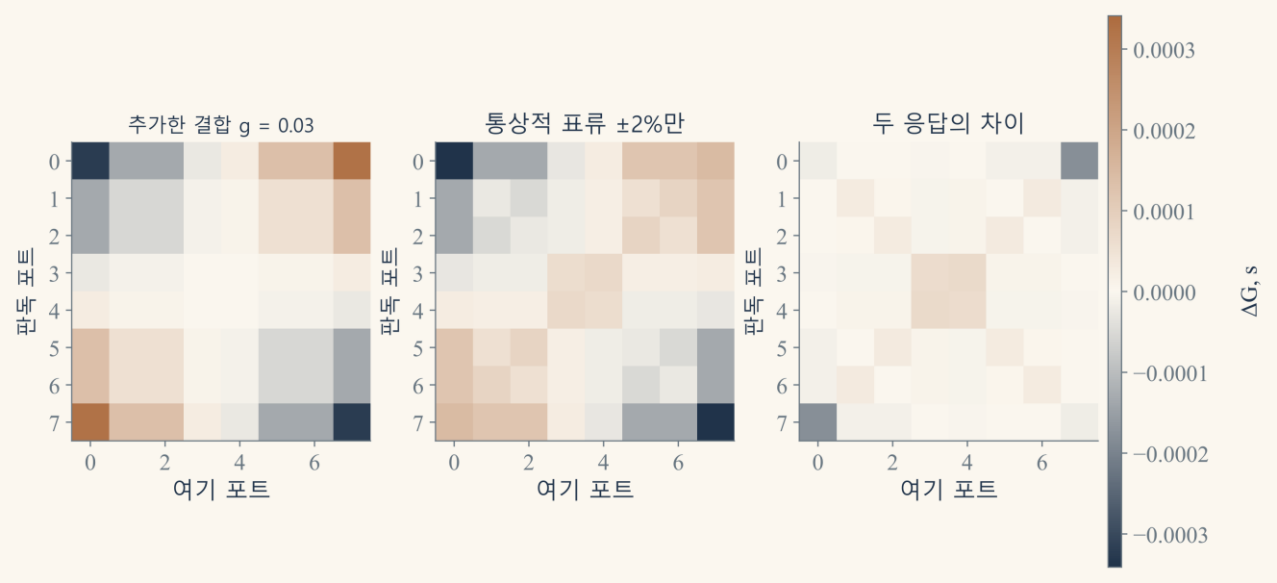


그림 31. s = 0,1 s^{-1}에서 원래 꼭짓점 포트들의 약한 결합과 제약된 표류. 모든 그림의 색 척도는 같다. 오른쪽은 검출 잡음을 더하기 전 두 정확한 응답 사이 작은 차이를 보여 준다.

동일한 데이터에 대한 모델	항목 당 χ^2	내릴 수 있는 결론
공칭 연결망에 결합 하나 추가	0,8884	좋은 설명은 원인을 결정하지 않습니다.
제약 교정만	0,6105	추가 결합 없는 허용점을 찾음
같은 교정에 결합 추가	0,6085	추가해도 잔차는 거의 바뀌지 않음

제한된 핏은 공칭 가중치로 검색을 시작하고 192 항목에서 χ^2 = 117,21로 보정 지점을 찾았습니다. 이 수는 가우스 공의 99 퍼센트 반경보다 작으며, 알려진 독립 분산을 가진 192 성분의 240,50과 같습니다. 발견 된 모든 가중치는 원래 경계를 만족시킵니다. 이것은 데이터가 정상적인 교정이 가능하다는 충분한 증거입니다.

이 문제의 옵티마이저는 계산 한계 160에 도달했으며 최종 수렴을 보고하지 않았습니다. 이것은 제시된 결론에 대한 장애물이 아닙니다: 이미 발견 된 지점은 직접 계산에 의해 검증되었으며 제한을 충족시킵니다. 글로벌 최소값이 달성된 주장은 없습니다. 연결이 있는 모델에서 잔존의 작은 추가 감소도 감지로 해석되지 않습니다. 여기서 올바른 절차는 교정 모호성입니다.

신호를 거의 보지 못하는 검증

원래 검증용으로 남긴 값 s = 3 s⁻¹은 처음 세 척도의 자연스러운 연장처럼 보였다. 그러나 꼭짓점 포트에서는 바로 이 영역에서 추가 결합이 특히 약하게 보인다. g = 0,3 s⁻¹과 잡음 10⁻⁴ s에서 신호 행렬 노름과 원소 하나의 표준편차의 비는 순서대로 s = 0,1; 0,3; 1; 3 s⁻¹일 때 75,33; 37,86; 6,75; 0,388이다.

$$\rho = \frac{\| \Delta G \|_F}{\sigma}, \qquad \mathbb{E}\left[\frac{\chi^2_{\mathrm{null}}}{64}\right] = 1 + \frac{\rho^2}{64} \tag{8.1}$$

마지막 영역에서는 추가 신호를 영으로 예측해도 기록당 기대 χ²가 약 1,00235다. 그러므로 잔차가 좋아 보여도 복원한 구조를 거의 검증하지 못한다. 잡음이 10⁻⁵ s인 더 정밀한 첫 실험에서는 상황이 낫다. 신호 대 잡음비가 열 배 커진다. 이는 특정한 영역에 관한 지적이며, 따로 남겨 둔 데이터의 예측이라는 원리 자체에 관한 비판은 아니다.

새 프로토콜의 매개변수는 새로운 기록 계열을 얻기 전에 계산한 감도로 선택한다. 그림 32는 기존 모서리 포트와 두 번째 탐침의 오른쪽 면을 비교한다. 새 영역에서 s = 0,3 s⁻¹이면 σ = 10⁻⁴ s에서 명목 신호의 노름은 표준편차의 224,88배다. 이후의 더 큰 잡음 시험 σ = 10⁻³ s에서는 이 값이 열 배 줄어도 여전히 눈에 띈다.

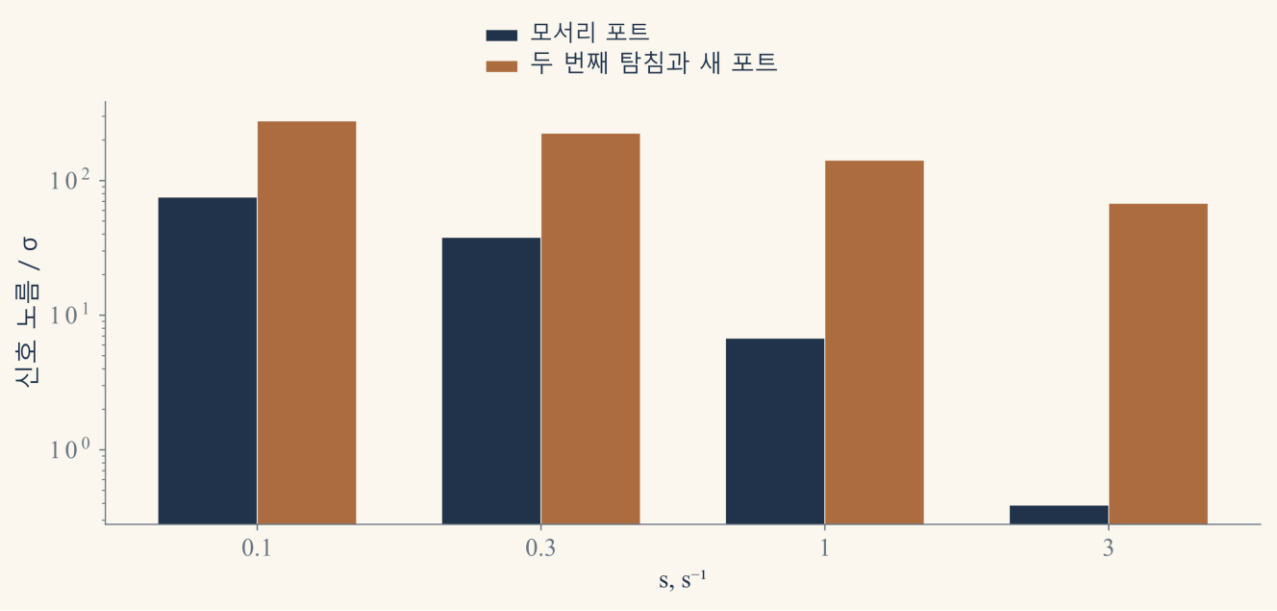


그림 32. g = 0,3 s^{-1}와 같은 σ = 10^{-4} s에서의 공칭 민감도. 두 번째 구성은 연산자와 포트를 동시에 바꾼다. 그래프는 두 변화의 기여를 따로 나누지 않고 선택한 설정의 최종 이득을 보여 준다.

s = 0,3 s^{-1}에서 둘째 탐침의 별도 기록 하나를 seed = 930001로 얻었다. 이 검증에서는 미리 정한 검증 쌍 5-58에 대해 첫 탐침의 제약 맞춤을 수행한다. 첫 탐침만으로는 외부 영역에 쌍 52개가 남는다. 따라서 선택한 쌍의 조건부 예측을 검증하는 것이며 한 채널로 유일하게 복원한 것은 아니다. 예측은 $\chi^2/64$ = 1,081, 변 없는 공칭 모형은 7,819를 준다. 여기서는 검증용 자료로 영인 공칭 응답을 실제 기각할 수 있다. 그래도 표류 추정값을 옮길 때의 오차는 별도 문제이다. 가중치 변화를 허용하는 영 교정 모형은 고정 기준과의 비교만이 아니라 전체 포락선으로 검증한다.

두 탐침이 같은 결합의 다른 끝을 본다

이제 새로운 실험이 소개되고 있습니다. 첫 번째 프로브는 큐브의 왼쪽에 있는 0, 3, 5, 6, 9, 10, 12, 15 노드를 관찰하고 모든 방향에서 공칭 가중치 1 s^{-1}을 가집니다. 두 번째는 48, 51, 53, 54, 57, 58, 60, 63 노드를 통해 오른쪽을 관찰합니다. x, y, z 방향의 공칭 가중치는 각각 2; 0,7; 1,4 s^{-1}입니다. 두번째 조사에 있는 일반적인 쌍의 힘은 조건에 의하여 1,6g와 동등합니다.

이전의 라플라스 매개변수 세 개를 쓰지만 공간 자료는 달라졌다. 생성기의 통상 가중치에는 ±1퍼센트 범위의 공통 상대 표류가 있고 분석에서는 ±2퍼센트 전 구간을

허용한다. 참 쌍은 5-58, g = 0,3 s⁻¹이다. 독립 검출 잡음은 σ = 10⁻³ s이다. 각 포트 블록에는 대각 대비 여덟 개와 규격화한 차이 대비 28개를 미리 정해 탐침당 총 108개를 사용한다.

관찰의 집합	제외되지 않은 쌍
왼쪽 면만	52
오른쪽 면만	48
왼쪽 면과 그 배율 변환 복제	51
서로 다른 두 탐침과 마주 보는 면	1

두 탐침은 각각 순수 교정을 배제하지만 가능한 둘째 끝점 수십 개를 남긴다. 공동 외부 영역에는 쌍 5-58만 남고 g 구간은 0,202부터 0,429 s⁻¹이다. 상대 가중치의 공통 벡터 하나에 대한 정확한 제약 맞춤도 찾았다. g = 0,30533 s⁻¹, χ²/384 = 0,7669이다. 따라서 이 예에서는 공통 쌍이라는 제약이 두 가지 다른 관측 체계를 모두 견뎠다.

그림 33에서 척도를 바꾼 복제는 첫 탐침의 52쌍에 비해 51쌍을 남긴다. 작은 차이는 독립 잡음 때문이다. 해당하는 오차 없는 자료에서는 수가 모두 같고 44다. 척도 항등식의 상대 오차는 약 7,4 × 10⁻¹⁶이다. 다른 탐침과 새 포트는 외부 영역을 훨씬 크게 줄인다. 새 측정 정보의 중요성을 보여 주는 예지만 어떤 부분이 비등방성만의 효과이고 어떤 부분이 포트 이동만의 효과인지는 정하지 않는다.

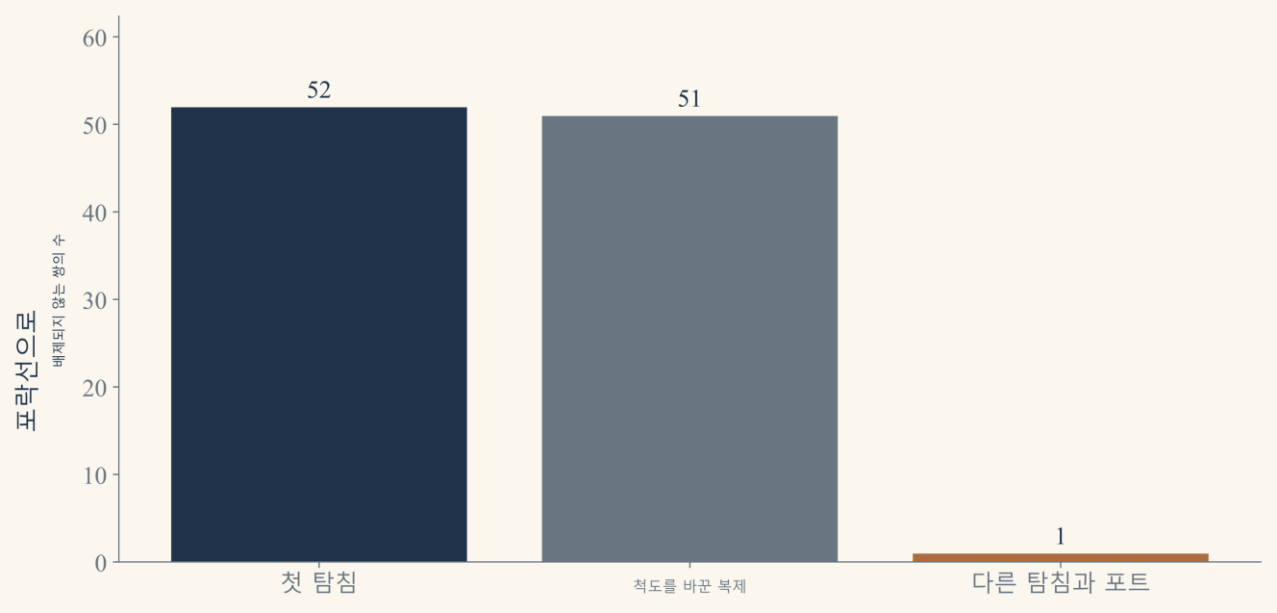


그림 33. 잡음이 있는 한 예에서 보수적으로 검증한 뒤 남은 쌍의 수. 남은 쌍에는 공동 모형이 존재하는지와 별개의 구조일 가능성에 대한 추가 검증이 필요하다.

그림 34는 둘째 탐침의 개별 대각 대비 포락선을 보여 준다. 파란 영역은 선택한 쌍의 모든 허용 가중치를 포괄하고 주황 띠는 동시 관측 구간을 정한다. 이런 여러 띠의 공통부분에서 g의 제약을 얻는다. 강한 결합의 경우 영 가중치는 이미 허용 구간 밖이다.

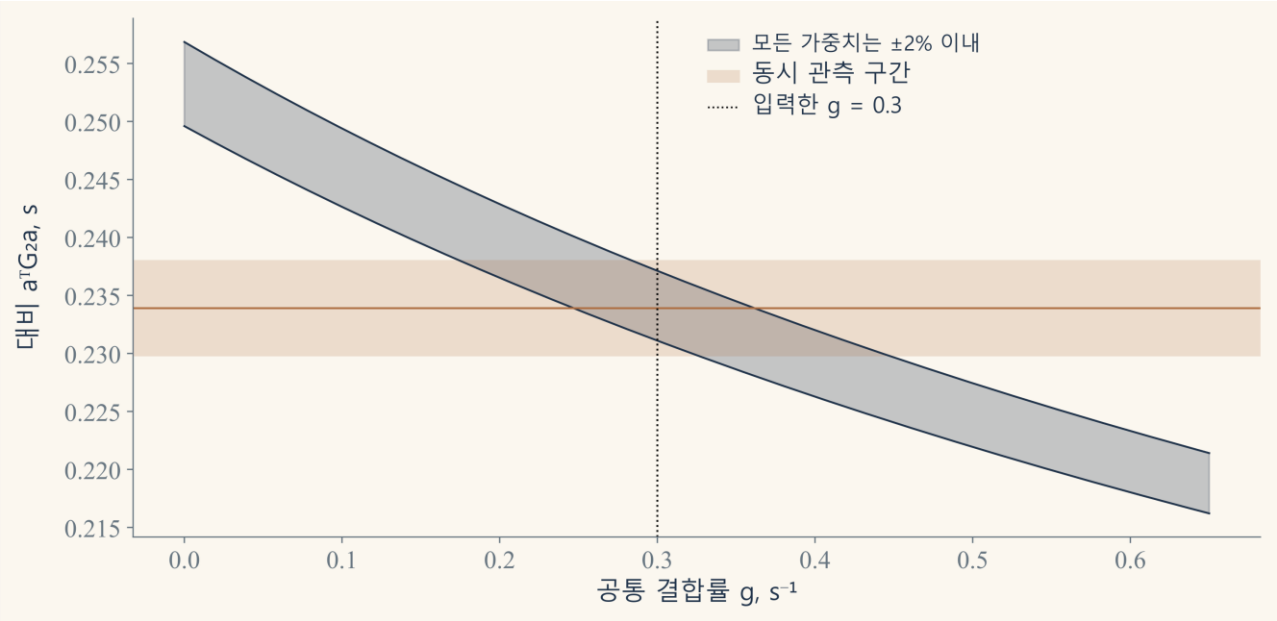


그림 34. s = 0,3 s^{-1}에서의 대비 G_2,58,58. 한계는 통상 가중치의 ±2 퍼센트 이내 모든 표류를 고려한다. 주황색 띠는 미리 정한 스칼라 관측 216개 전체에 대한 보정을 사용한다.

서로 다른 두 구조의 위험한 일치

하나의 공통 쌍은 여전히 공유 구조의 증명과 동일하지 않습니다. 다음 제어에서 첫 번째 프로브는 가장자리 5-58을 포함하고 두 번째 프로브는 가장자리 6-57을 포함합니다. 커플링 강도는 동일한 알려진 계수 1,6에 의해 관련되며, 정상 드리프트 및 등록 노이즈가 보존됩니다. 왼쪽의 관측으로부터, 끝 5은 오른쪽의 관측으로부터 쉽게 구별된다 - 끝 57. 공동 검색은 이러한 로컬 관측치를 쌍 5-57에 결합합니다.

이 혼합 후보는 스칼라 포락선만 통과하는 것이 아니다. 허용된 표류를 갖는 완전한 공통 모형은 g = 0,2933 s⁻¹에서 χ²/384 = 0,8341을 준다. 실제로 별개인 두 쌍의 모형도 χ²/384 = 0,8096으로 양립한다. 따라서 이 기록 자체가 발견한 일치가 물리적 결합 하나에 해당한다고 확립하지는 않는다. 타당한 두 설명에는 구별하는 측정이 필요하다.

이 구성 예를 살펴본 뒤 대조 배치를 설계했다. 두 탐침 모두 포트 0, 5, 6, 15, 48, 57, 58, 63에 접근하며 s = 0,3 s⁻¹에서 측정한다. 경쟁하는 두 끝점과 선택한 이웃 영역을 보는 포트들이다. 새 잡음 실현 계열을 만들기 전에 배치를 고정했다. 설계한 프로토콜의 검증이며 원래 가설을 사전 등록해 맹검으로 확인한 것으로 제시하지 않는다.

실제 변들과 잘못된 공통 후보, 새 포트 선택을 그림 35에서 비교한다.

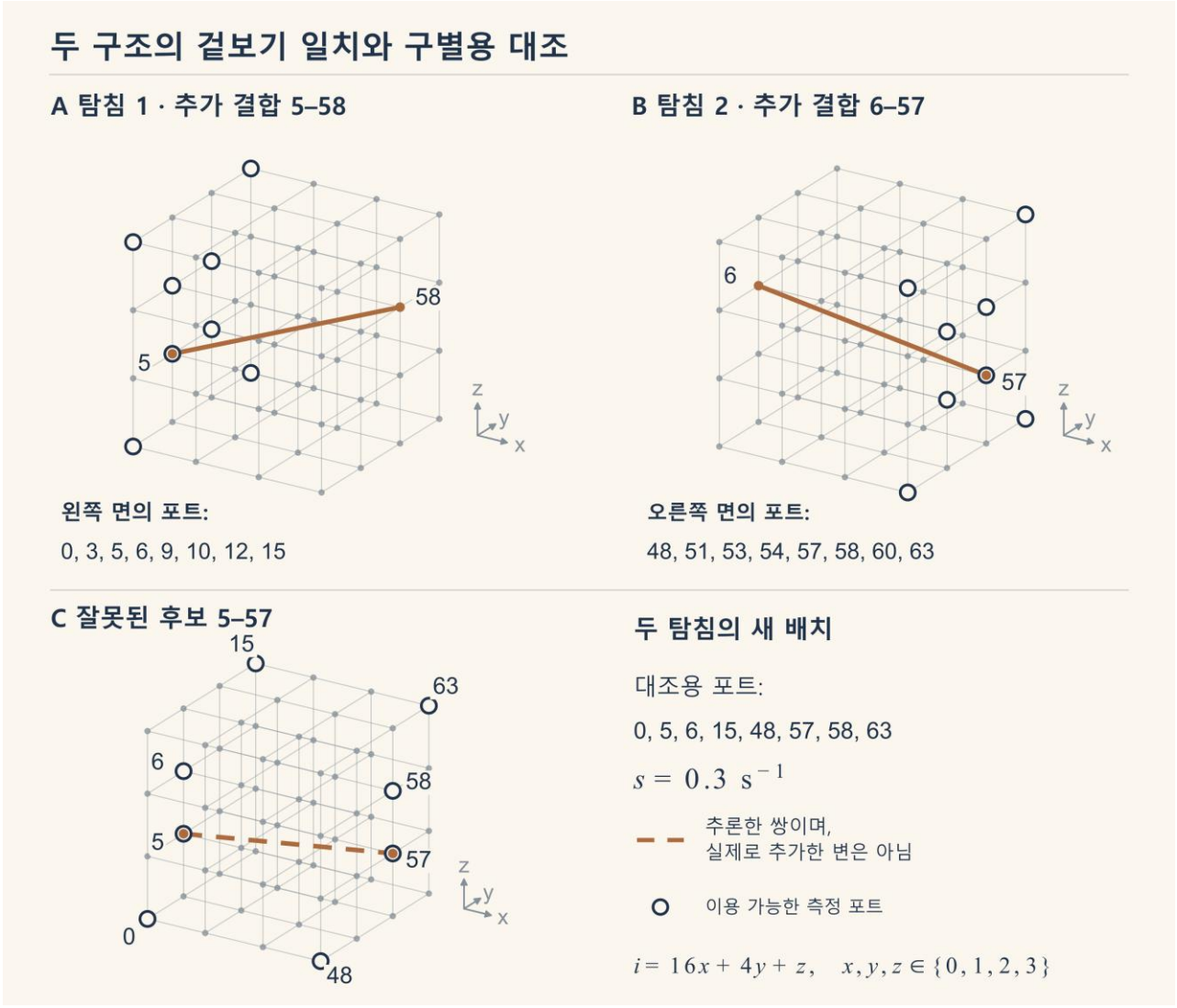


그림 35. 정확한 4 × 4 × 4 골격에서 공통성의 거짓 결론을 구성한 예. 첫 탐침에는 변 5-58을, 두 번째에는 6-57을 넣었다. 마주 보는 면의 관측은 점선으로 나타낸 잘못된 공통 쌍 5-57을 허용한다. 아래 도식은 s = 0,3 s^{-1}에서 두 탐침 모두에 접근 가능한 대조 포트다. 설명한 실험에서 이 포트들이 해당 대안들을 구별한다. 세 투영 모두 좌표와 노드 번호가 같다.

시나리오	대조 배치 전	대조 배치 후
참 공통 쌍 5-58	공통 쌍 5-58 하나	5-58이 남음
별도의 쌍 5-58 및 6-57	잘못된 공통 쌍 5-57 하나	모든 공통 쌍이 배제됨

실제 공통 쌍의 최종 외부 g 구간은 0,2348부터 0,3638 s⁻¹이다. 방향별 기록 512개 전체를 맞추면 g = 0,30021 s⁻¹과 χ²/512 = 0,8075를 얻는다. 별개 쌍의 대조에서는 최적화기의 실패 때문이 아니라 포락선으로 쌍 2016개 전체의 공통 변을 배제했다. 별개 구조 모형에는 χ²/512 = 0,8222인 허용점이 있다. 이 제한된 예에서 새 실험은 설계 목적에 정확히 맞는 일을 수행했다.

결과는 가능한 모든 추가 연결, 커패시턴스 및 숨겨진 노드에 대한 보편적 고유성을 의미하지는 않습니다. 그것은 좁은 완료 전환을 보여줍니다: 특정 모호함이 감지되고, 측정 모드가 선택되고, 예측이 도출되고, 명명 된 대안의 차별이 테스트됩니다. 다른 모호한 클래스의 경우 회로를 새로 설계해야 합니다.

공통 전자 신호와 독립 대조

두 경로의 일치는 물리적 대상 뒤의 전자회로에서도 생길 수 있다. 이를 검증하려고 첫 탐침의 변 응답과 의도적으로 같은 행렬 형판을 두 기록에 똑같이 더했다. 노드 모형에는 추가 결합이 없다. 이는 공통 검출 경로에 대한 어려운 인공 대조를 만든다. 실제 장비에서 바로 이런 형판이 나타날 빈도를 기술하는 것은 아니다.

추가 검증 전에는 공동 외부 영역에 다시 잘못된 쌍 하나가 남으며 이번에는 5-53이다. 별도 기준 기록에서는 물리적 전파를 끄고 가정한 전자 누설 경로를 유지했다. 이 기록은 원소 192개에서 χ² = 1919,59를 준다. 순수하고 알려진 가우스 잡음의 99퍼센트 한계는 240,50이다. 따라서 검증하는 연결망 동역학을 포함하지 않아야 할 채널에서 공통 신호를 관측할 수 있다.

물리 경로와 그대로 유지한 검출 경로의 분리를 기능 도식 36에 보였다.

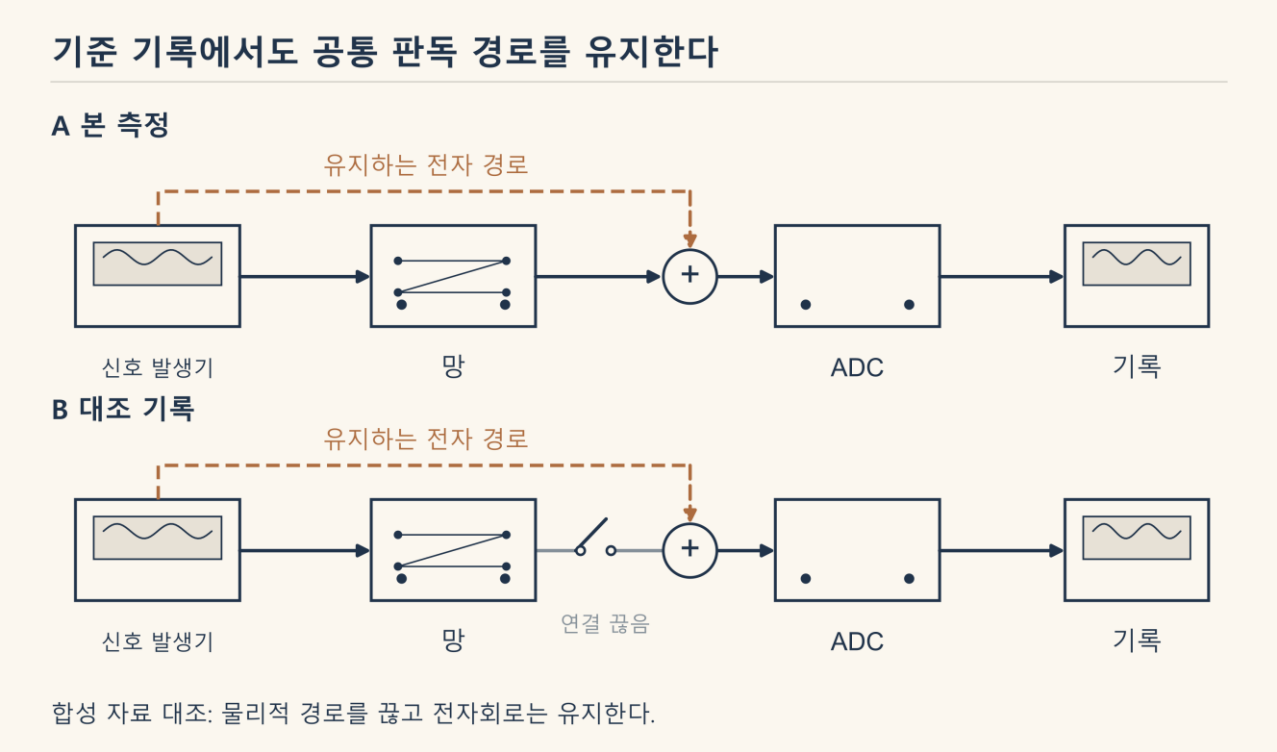


그림 36. 합성 대조에서 기준 기록의 기능적 의미. 본 측정에는 망의 응답과 공통 전자 경로의 추가 성분이 들어 있다. 대조 상태에서는 물리적 경로를 끊고 가정한 전자 경로는 유지한다. 그 기록에 남은 신호로 거짓 공통성의 통상적 원인을 검증할 수 있다. 조립한 회로도를 정하는 그림은 아니다. 실제 시험대는 전환해도 조사하는 누설 경로가 유지됨을 따로 확인해야 한다.

기준 기록을 빼면 순수 교정은 더 이상 배제되지 않는다. 뺄셈의 대가는 추가 잡음이다. 독립 취득한 두 기록의 정확도가 같으면 차이의 표준편차는 √2σ이다. 같은 기준 기록을 두 탐침에서 빼면 잔차들에 상관관계가 생긴다. 사용한 스칼라 검증의 동시 한계는 대비들의 독립성을 요구하지 않으므로 올바른 주변분산을 쓰면 여전히 유효하다. 이렇게 차감한 자료 전체를 맞추려면 공동 공분산이 필요하다.

제어 포트는 또한 이 패턴에 대한 모든 일반적인 단일 링크 설명을 배제합니다. 참조 레코드는 또 다른 지식을 추가합니다: 신호가 저장되는 측정 회로의 특정 섹션을 가리킵니다. 이러한 개입은 편차의 일반적인 원인을 식별하는 데 도움이되기 때문에 통계적 불일치보다 훨씬 강합니다.

프로토콜 선택 뒤의 새 계열

대조 배치를 고정한 뒤 각 24실현으로 된 네 계열을 수행했다. 매 실현에서 ±2퍼센트 구간의 균일분포를 따르는 통상 가중치의 공통 상대 표류와 새 가우스 잡음을 독립적으로 생성한다. 초기 상태는 각각 3600000, 3601000, 3602000, 3603000부터 시작한다. 모든 경우의 세기와 쌍, 포트 지도, 배제 기준은 프로그램에 정해져 있다. 이 계열은 이전 계산 460회와 따로 구분한다.

시나리오	순수 교정이 배제됨	대조 후 공통 쌍이 없음
제한 드리프트만	24회 중 0회	24회 중 0회
공유 한 쌍	24 중 24	24회 중 0회
다른 쌍	24 중 24	24 중 24
공통 전자 누설	24 중 24	24 중 24

실제 공통 쌍의 실현 24개에서는 해당 지표가 외부 영역에 남았다. 허용 표류만 있을 때는 순수 교정이 배제되지 않았다. 별개 결합과 복제한 전자 누설은 대조 배치 후 공통 허용 쌍이 하나도 없었다. 그림 37은 이 계수들을 함께 보여 준다. 교정 배제와 공통 변 배제는 서로 다른 판단이다.

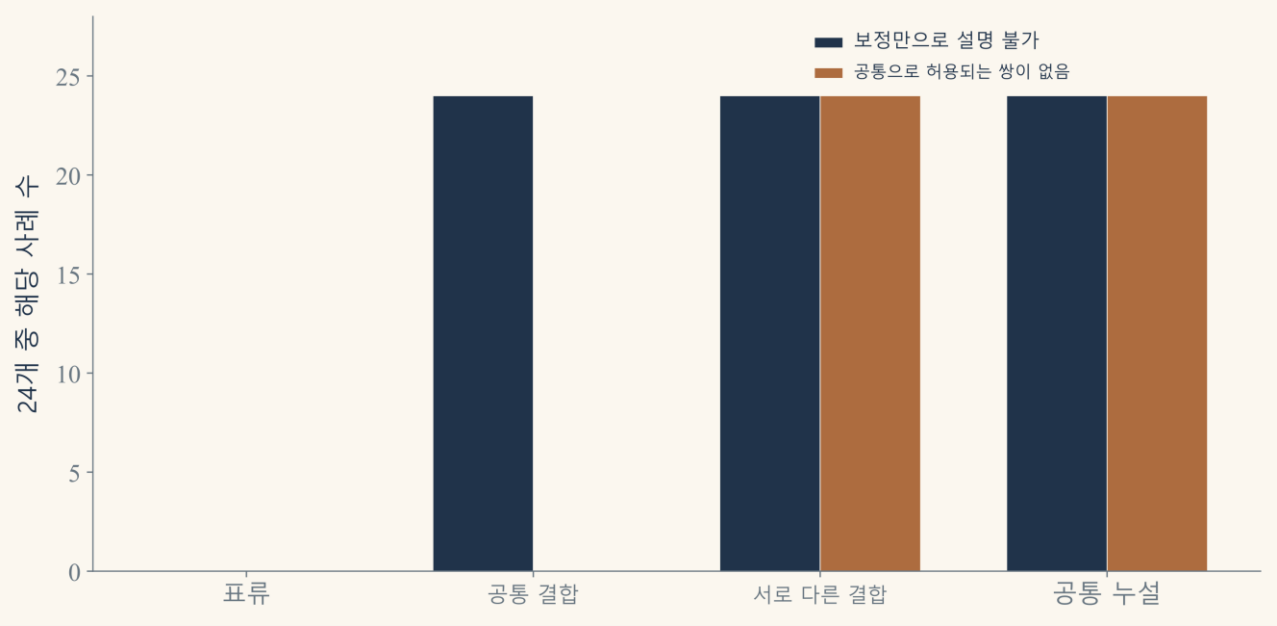


그림 37. 대조 조건을 고정한 뒤 새 합성 실현 96개의 결과. 계수는 정한 네 부류와 각 부류의 해당 기록 24개를 기술한다. 장비 오류의 보편적 확률이 아니다.

24 실험에서 거짓 제외의 제로 비율은 제로 위험을 증명하지 않습니다. 쉘에 대한 공식적인 경계는 14 장에서 이러한 작은 카운터로 추정되는 것이 아니라 노이즈 및 보정에 대한 가정에서 파생됩니다. 이 시리즈는 코드와 선택된 스크립트를 검사합니다. 모든 가능한 쌍, 알 수 없는 노드, 지연, 누수 및 교정 제한 오류의 무작위 선택은 다른 과제로 남아 있습니다.

순모형과 역모형의 관계는 여전히 밀접하다. 둘 다 정해진 선형 연결망 부류를 사용한다. 이 유리한 조건을 고려해야 한다. 역문제 문헌에서는 이산화 오차와 모형들의 지나친 일치를 낙관적인 복원의 원인으로 다룬다. 따라서 물리 실습에는 실제 기록과 기생 소자, 독립 교정 측정을 더해야 한다. [21]

제9장 망 유사체에서 인과적 물리 모형으로

방정식의 적용 한계

계산 연결망은 구성을 제어할 수 있다는 점에서 유용하다. 그러나 편리한 이 모형에도 한계가 있다. 방정식 ẋ = −Lx는 노드 사이 양의 평형화를 기술하며 도선 안의 완전한 전자기 과정을 나타내지 않는다. 분포된 장과 전송선을 따른 전파, 도체의 개별 지점 사이 에너지 이동은 포함하지 않는다. 관심 있는 시간이 이런 내부 시간보다 훨씬 길면 축약 기술이 좋을 수 있다. 신호의 한계 속도를 연구할 때는 빠진 세부 사항이 핵심이 된다.

연결된 유한 그래프의 행렬 e^{-tL}은 보통 모든 $t > 0$에서 멀리 떨어진 노드 사이에도 영이 아닌 원소를 가진다. 이유는 지수함수를 급수로 전개하면 보인다. 최단 경로가 r개 변인 쌍에서는 첫 영이 아닌 기여가 r 수준인 t의 거듭제곱에서 나온다. 짧은 시간에는 극히 작지만 반드시 정확히 영인 것은 아니다. 따라서 이상적 확산 모형에는 정확한 빛원뿔이 없다. 공식에서 이를 발견하는 것은 근사의 한계를 찾은 것이며 초광속 전달의 가능성을 발견한 것이 아니다.

전기 시험대의 인과성은 도체와 장의 더 완전한 기술이 보장한다. 집중정수 RC 모형은 빠른 과정을 제외한 뒤 사용한다. 그래프에서 선 하나인 긴 도선도 실제로는 길이와 전파 시간을 갖는다. 느린 감쇠 연구에서는 중요하지 않을 수 있지만 비정상적으로 이른 펄스 도착을 찾을 때는 결정적이다. 따라서 연결성 단층촬영 장비와 인과 구조 검증 장비에는 서로 다른 오차 모형과 교정 조건이 필요하다.

확산 꼬리와 인과적 전면의 차이를 그림 38에 설명했다.

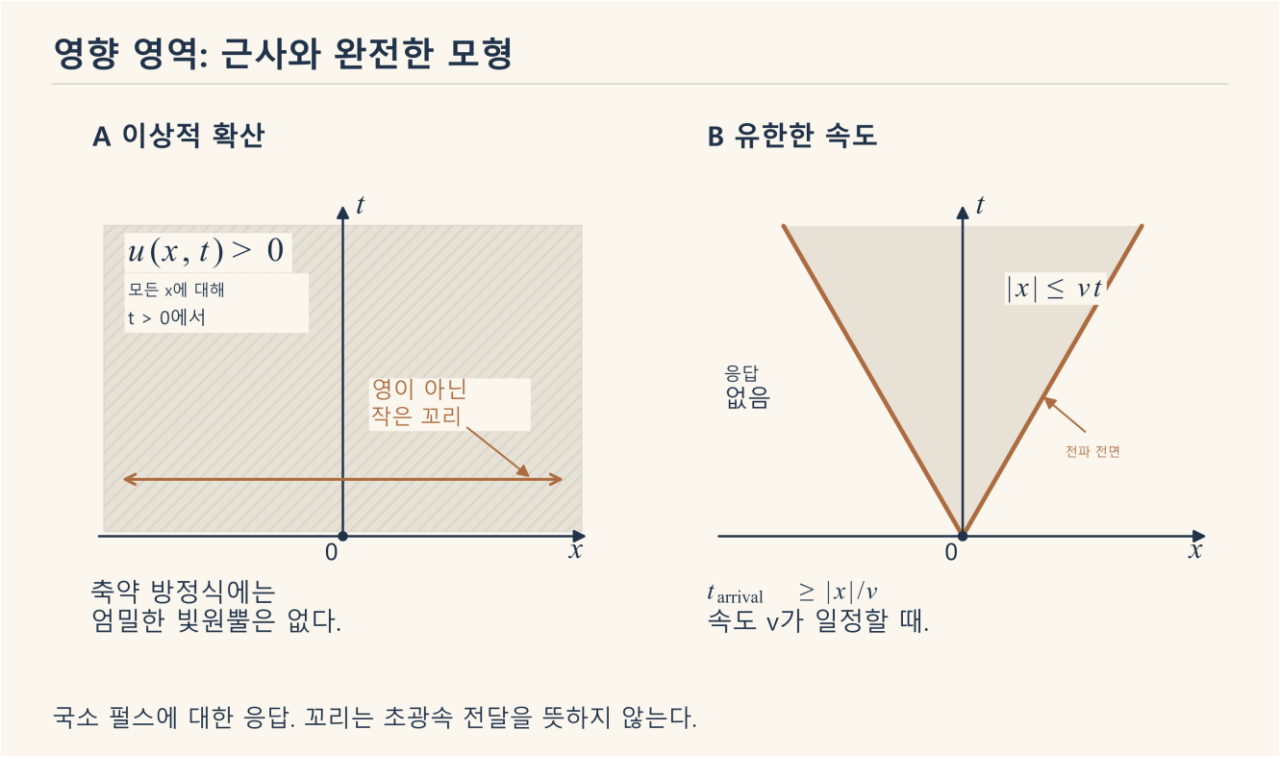


그림 38. 이상적 확산 기술과 유한한 속도의 완전한 모형에서 국소 펄스 응답의 지지영역. 왼쪽은 모든 양의 시간에 작은 수학적 꼬리가 생기며, 오른쪽은 영향이 인과적 전면에 제한된다. 그림은 개념적이고 축에 수치 척도는 없다. 일정한 속도 v는 경계를 설명하려고 골랐다. 확산 꼬리는 축약 방정식의 한계를 나타내며 물리적 초광속 전달의 증거가 아니다.

지연은 구조에서 도출되어야 한다

모델을 개선하려는 자연스러운 시도는 지연을 추가하는 것입니다. 주파수 또는 라플라스 설명에서, 순수 지연은 $\exp(-s\tau)$ 요인에 의해 주어진다. 그러나 g의 양의 가중치를 $g\exp(-s\tau)$로 임의 교체한다고 해서 결과 방정식이 수동적 물리적 연결을 설명하는 것은 아닙니다. 유용한 신호뿐만 아니라 피드백, 저장된 에너지 및 안정성 조건이 변경됩니다. 실제 전송 라인은 하나의 데코레이션 계수가 아닌 일관된 방정식 세트로 입력 및 출력 양을 관련시킵니다.

스칼라 예에서 이를 볼 수 있다. 지연 없이는 $\gamma > 0$에서 방정식 $\dot{x} = -\gamma x$가 감쇠를 기술한다. 우변의 $x(t)$를 $x(t-\tau)$로 바꾸면 특성방정식은 $s + \gamma\exp(-s\tau) = 0$이다. 순허수 근 $s = i\omega$를 대입하면 $\gamma\tau = \pi/2$에서 첫 안정성 경계가 나온다. 충분히 큰 지연은 원래

감쇠하던 규칙을 진동 불안정성으로 바꾼다. 양의 γ만으로는 이전 결론이 더 이상 보장되지 않는다.

$$\dot{x}(t) = -\gamma x(t-\tau), \qquad s + \gamma e^{-s\tau} = 0, \qquad \gamma\tau = \frac{\pi}{2} \tag{9.1}$$

이 예가 지연 모형을 금지하지는 않는다. 새로 검증해야 함을 보여 준다. 실험실 유사체에는 전송선과 알려진 공진기, 측정한 내부 회로처럼 물리적으로 이해되는 요소가 적합하다. 그러면 지연과 분산, 손실을 함께 정한다. 여러 주파수 측정으로 단순한 상수 결합이 언제 적절한 근사가 아니게 되는지 알 수 있다. 그 경계에서 숨은 자유도가 보일 수 있지만, 발견하려면 먼저 통상적인 공학적 설명이 필요하다.

통상적인 숨은 매개자의 기억

내부 변수를 제거하면 기억을 만드는 소자를 명시적으로 구성할 수 있다. 접근 가능한 두 전압 노드 V_1과 V_2가 같은 전도도 k 둘을 통해 숨은 노드 h로 연결된다고 하자. 숨은 노드에는 공통 기준 도체에 대한 전기용량 C_h가 있다. 초기 전하가 영일 때 숨은 전압의 방정식은 다음과 같다.

$$C_h \dot{V}_h + 2kV_h = k\left(V_1 + V_2\right) \tag{9.2}$$

라플라스 변환에서 $V_h = k(V_1 + V_2)/(sC_h + 2k)$이다. 전류 $I_1 = k(V_1 - V_h)$에 대입하면 양 끝의 상호 영향 계수가 s에 의존함을 알 수 있다. 전도도 행렬에는 비대각 원소 $-k\varepsilon\phi\phi(s)$가 나타나며 대각 원소도 바뀐다. 양 끝 사이 새 선만 남기고 이 변화들을 무시하면 매개자 동역학의 일부를 잃는다.

$$k_{\mathrm{eff}}(s) = \frac{k^2}{sC_h + 2k}, \qquad k_{\mathrm{eff}}\left(0\right) = \frac{k}{2} \tag{9.3}$$

정적 경우에는 익숙한, 같은 저항 둘의 합을 얻는다. 시간 영역의 상호 기여에는 감쇠하는 기억이 들어 있다. 특징적 시간 $C_h/(2k)$는 양끝 사이 기하학적 길이가 아니라 정전용량과 전도도로 정해진다.

$$K_{12}(t) = \frac{k^2}{C_h} \exp\left(-\frac{2k}{C_h} t\right) \theta(t) \qquad (9.4)$$

이 커널은 상호 작용의 양의 계수의 크기를 기술한다. 전류 방정식의 부호는 선택한 전류 방향으로 정한다. kэϕϕ의 단위는 지멘스이고 $K_{12}(t)$의 단위는 초당 지멘스이다. Θ(t)는 기억이 시간상 지연되도록 한다. 집중정수 모형 안에 정확한 공간적 빛원뿔을 만들지는 않는다.

이 예는 크론 축약을 측정 가능한 표지와 연결한다. 기록 대역이 시간 $C_h/(2k)$를 포함하면 정적으로 등가인 두 장치가 과도 응답에서 달라진다. 이 척도가 대역 밖이면 기억은 유효 상수 속에 숨는다. 따라서 발견한 주파수 의존 채널은 먼저 통상적인 에너지 저장 소자와 전송선과 비교해야 한다. 연결망 축약과 관측 동역학을 잇는 구체적인 물리적 연결이다.

숨겨진 커패시턴스 및 제외 후 나타나는 메모리 커널의 다이어그램이 그림 39에 표시됩니다.

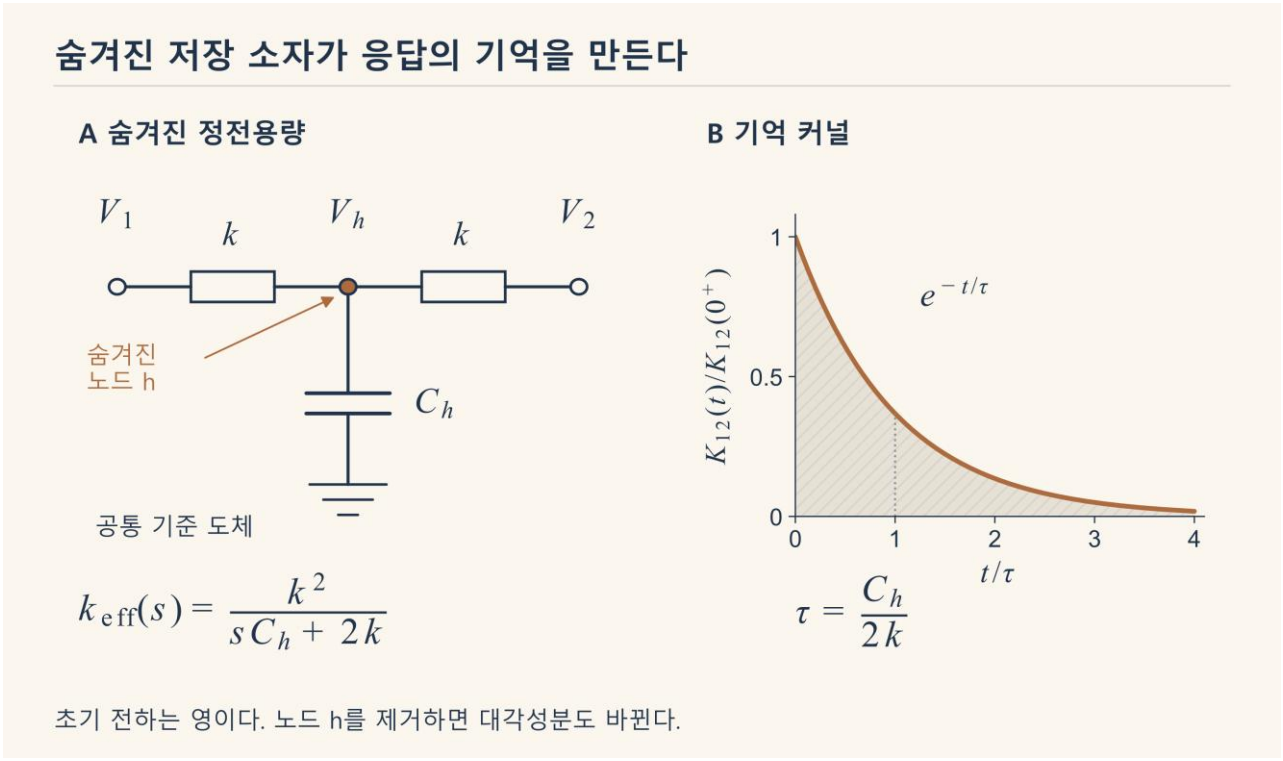


그림 39. 기억을 가진 통상적인 숨은 매개자. 같은 전도도 k 둘이 공통 도체에 대한 정전용량 C_h를 가진 노드 h를 통해 접근 가능한 노드들을 잇는다. 초기 전하가 영일 때 V_h를 소거하면 주파수에 의존하는 상호 계수가 생기고 대각성분도 바뀐다. 오른쪽은 t ≥ 0에서 시간 τ = C_h/(2k)를 갖는 정확히 규격화한 지수 커널이며 실험 곡선이 아니다. 시간 지연이 공간의 빛원뿔을 정하지는 않는다.

검증 가능한 제약으로서의 수동성

RC 연결망의 에너지 검증은 특히 명확하다. C는 전기용량의 양의 대각행렬, K는 대칭 전도도 행렬, V는 전압 벡터라고 하자. 전기용량에 저장된 전기 에너지는 이차형식 $V^{\mathsf{T}}CV$의 절반이다. 방정식 C V̇ + KV = I로 그 시간 미분을 계산할 수 있다. 공급 전력에서 저항에 소산되는 전력을 뺀 값이 나온다. 가중치가 양수이므로 연결망은 공급받은 에너지와 이전에 저장한 에너지의 합보다 더 많은 에너지를 내놓지 않는다.

$$E = \frac{1}{2} V^{\mathsf{T}} C V, \qquad \frac{dE}{dt} = V^{\mathsf{T}} I - V^{\mathsf{T}} K V \le V^{\mathsf{T}} I \tag{9.5}$$

이 부등식은 저장 에너지와 외부 흐름을 비교하는 일반적인 소산계 이론의 특수한 경우이다. 빌럼스는 저장함수와 공급함수를 이용해 해당 접근을 정식화했다. 우리 시험대에서는 조립 전과 장비 자료 양쪽에서 수동성을 검증할 수 있다는 점이 유용하다. 모형에서 예상하지 못한 에너지 증가는 부호 오류나 잘못된 변수 제거, 누락한 전원을 가리킬 수 있다. [22]

수동성은 완전한 물리적 정확성과 같지 않다. 수동 전기회로는 특정 정지 상태를 갖는 물질적 대상이며 안정적이라는 이유만으로 진공 모형이라 선언할 수 없다. 그러나 에너지 검증은 근본적 해석을 논하기 전에 잘못된 구성 일부를 배제한다. 외부 에너지에 의한 실제 증폭과 기하학적 민감도의 변화도 구별하는 데 도움이 된다. 연구 장비에서는 물리적 의미가 다른 두 원인이 비슷한 진폭 증가를 만들 수 있다.

인과적 응답과 관측량

더 일반적인 선형 모형은 신호를 발생원과 지연 커널의 합성곱으로 기술한다. 채택한 인과 구조 안에서 검출 시점은 작용 시점 뒤여야 한다. 통상적인 한계속도 c를 가진 국소 평탄 공간에서 거리 r로 분리된 두 점의 작용 커널은 r/c보다 이른 시간에 영이다. 굽은 기하 구조에서는 해당 빛원뿔로 조건을 정한다. 다른 인과 경로를 가정하면 기하 구조를 정의하고 시계 및 거리 측정과 맞추어야 한다.

$$y_i(t) = \sum_j \int_{-\infty}^{t} H_{ij}\left(t - t'\right) f_j\left(t'\right)\, dt' \tag{9.6}$$

중요한 것은 출처에 대한 통제 된 반응의 의존성입니다. 이러한 개입없이 기록 된 두 센서 간의 상관 관계는 정보의 전달을 증명하지 못합니다. 공통 소스, 공통 환경 또는 준비된 공유 상태에 의해 생성될 수 있습니다. 새로운 채널을 주장하는 것은 알려진 효과의 변화가 예측 가능하게 원위 결과를 변경하고 그 변화에 대한 시간 제한을 설정한다는 것을 보여줄 것을 요구한다. 상관 검색과 신호 속도 측정을 혼합하는 것은 동일한 통계로 다른 질문에 답하는 것을 의미합니다.

장이 주어져도 새 이론은 구체적인 관측량을 유도해야 한다. 선택한 좌표의 계량 성분이 그대로 광검출기의 판독값은 아니다. 빛의 경로와 반사체의 운동, 시계의 흐름, 위상 비교 절차를 계산해야 한다. 일부 섭동은 차동 장비의 두 경로에 똑같이 작용해 상쇄된다.

따라서 가정한 공간의 성질이 모형에서 실제여도 바로 그 구성에서는 보이지 않을 수 있다. 민감도는 장의 이름이 아니라 측정 절차의 계산으로 정한다.

상관관계의 양의성과 법칙의 공변성

가설이 무작위 공통 신호를 기술한다면 모든 채널의 허용 가능한 공분산을 정해야 한다. 기록의 어떤 선형 조합도 스펙트럼 파워가 음이 아니다. 따라서 스펙트럼 행렬 S(f)는 양의 준정부호이다. 특히 두 채널의 상호 스펙트럼 절댓값 제곱은 각 채널 자체 스펙트럼의 곱 이하이다. 임의로 그린 아름다운 각도 상관 무늬는 이 조건을 위반해 어떤 확률 과정에도 대응하지 않을 수 있다. 이런 검증은 자료 비교 전에 수행한다.

$$z^{\dagger} S(f) z \geq 0, \qquad |S_{ij}(f)|^2 \leq S_{ii}(f) S_{jj}(f) \tag{9.7}$$

공간 이론의 '공변성'은 다른 질문에 관한 것이다. 좌표를 바꿀 때 법칙을 어떻게 쓰는가이다. 기하학적 해석에는 좌표와 일관된 표현이 필요하지만 그것만으로 우선하는 기준계의 부재가 증명되지는 않는다. 격자는 특별한 방향과 시간을 정할 수 있다. 텐서 표기 뒤에 숨기는 것만으로는 부족하다. 큰 척도에서 로런츠 대칭의 복원을 가정한다면 잔여 편차를 계산하고 근사 영역을 밝히며 해당 실험 제약과 비교해야 한다.

인과성과 진폭의 해석적 성질, 유효이론의 허용 계수도 연결되어 있다. 애덤스와 공동연구자들의 연구는 특정 유효장 모형군에서 낮은 에너지의 라그랑지언이 겉보기에 허용된다고 일관된 고에너지 연장이 보장되지는 않음을 보인다. 특이한 기하 구조를 보편적으로 금지하는 결과가 아니다. 망의 규칙을 물리법칙으로 만들 때 부호와 배경 안정성, 적용하는 정리의 전제를 검증해야 할 근거다. [23]

진공으로 옮기는 데 필요한 것

완전한 해석은 먼저 자유도를 밝혀야 한다. 노드는 사건인가, 공간 영역인가, 장의 상태인가, 아니면 계산 격자의 요소일 뿐인가? 이어 그 시간 발전과 물질과의 상호작용 법칙이 필요하다. 양자 모형에서는 상태 공간과 확률 해석, 상태의 필요한 성질을 보존하는 동역학도 정한다. 유효 열린계에서는 소산을 허용하지만 손실 원인과 축약 기술의 적용 한계가 명확해야 한다.

그다음에는 이미 검증된 영역을 복원해야 한다. 먼 영역 사이 추가 결합을 도입한다면 통상적인 광학 및 역학, 중력 측정이 왜 대개 이를 알아채지 못하는지 보여야 한다. 상호작용이 작거나 민감 대역이 제한되거나 물질과 결합하는 방식이 특별해서일 수 있다. 그러나 이는 부정적인 실험 뒤마다 바꾸는 설명이 아니라 정량적 성질이어야 한다. 모형에서 반증할 수 있는 매개변수 범위가 따라 나와야 한다.

유사체 실험은 이 모든 단계에서 유용하다. 전기망은 이미 쌍곡 기하의 성질을 재현하고 해당 유효 계량에서 전파를 검증하는 데 쓰였다. 이런 장치는 수학적 연산자의 제어 가능한 구현을 보이며 실험실 공간을 근본적으로 쌍곡 공간으로 바꾸지는 않는다. 같은 논리로 이 그래프 시험대도 숨은 연결성의 복원 방법을 검증할 수 있다. 진공 구조를 측정했다고 자동으로 주장하는 것은 아니다. [24]

그래프에서 물리학으로 옮기려면 차례로 대응해야 한다. 모형 변수는 물리량에, 계수는 측정할 상호작용에, 수학적 섭동은 재현 가능한 절차에, 예상 응답은 장비 판독값에 대응해야 한다. 어느 대응이든 아직 확립되지 않았다면 결과는 수학적 또는 유사체 수준에 속한다. 그 수준에서도 실질적인 정리와 장비 해법이 가능하다. 근본적 해석에는 별도 검증이 필요하다.

이후 장에서는 같은 연구 순서의 다른 구현들을 다룬다. 콤팩트 방향에서는 선택한 장의 모드 여기와 검출을 계산해야 한다. 무작위 퍼텐셜에서는 시계와 가속도의 공동 응답을, 간섭계에서는 빛의 경로와 위상을 계산한다. 각 방향에는 고유한 물리적 전제가 있다. 예측을 비교하는 공통 방법이 한 방향을 다른 방향에서 유도하지는 않는다.

제10장 숨겨진 기하 구조의 분광학

힘의 법칙에서 알 수 있는 것

네트워크 실험 후, 새로운 질문이 발생합니다: 어떤 측정이 비정상적인 응답을 물리적인 추가 방향에 연결할 수 있습니까? 이 장에서 하나의 특정 구현이 선택되었습니다: 스칼라 필드는 일반적인 세 개의 좌표와 원을 따라 전파됩니다. 물체 사이의 힘과 동일한 필드의 동적 응답이 고려됩니다. 이것은 독립적 인 물리적 모델이며, 네트워크 아날로그에서 확립 된 가장자리는 이미 발견 된 공간의 특성으로 전송되지 않습니다.

공간 방향의 수를 모르는 실험자를 상상해 봅시다. 실험자는 작은 질량, 거리 측정기 및 중력 센서에 액세스 할 수 있습니다. 실험자는 소스를 이동하고 힘이 어떻게 약화되는지 기록합니다. 일반적인 삼차원 공간에서, 점 질량의 뉴턴의 힘은 거리의 제곱에 반비례하여 감소한다. 특정 필드의 흐름이 다른 차원의 공간에 균일하게 분산되면 소스를 둘러싼 표면의 면적이 다르게 변경됩니다. 지수를 측정하고 차원 수를 얻는 것으로 충분합니다. 그러나 그러한 추론은 조건을 숨 깁니다: 필드는 선택한 방정식에 복종해야하며, 소스는 실질적으로 포인트와 같아야하며, 상호 작용의 전파는 다른 이유로 변경되어서는 안됩니다. 이 실험은 기하학과 기하학을 힘으로 변형시키는 물리적 법칙을 공동으로 테스트합니다.

$$F(r) \propto r^{-\left(d-1\right)}, \qquad d_F(r) = 1 - \frac{d\ln|F(r)|}{d\ln r} \tag{10.1}$$

d_F는 힘으로 복원한 조작적 차원이다. 측정을 기술하는 편리한 언어이지만 세계 구조의 독립적인 정의는 아니다. 거듭제곱 법칙에서 앞의 가정들이 성립하면 d와 일치한다. 영역 사이 전이에서는 거리의 함수가 된다. 예를 들어 3,2처럼 정수가 아닌 결과 자체가 물리적 방향 수가 분수라는 뜻은 아니다. 동시에 작용하는 여러 상호작용과 발생원의 유한 크기, 물질의 불균일성, 거리 오차도 이런 결과를 만들 수 있다. 연구 과제는 곡선에 가장 특이한 이름을 붙이는 것이 아니라 현재 자료로 어떤 설명들을 구별할 수 있는지 확립하는 것이다.

물리적으로 의미 있는 추가 차원 가설은 여러 귀결을 연결해야 한다. 숨은 방향의 동일한 구조가 허용되는 공간 모드, 에너지, 정적 상호작용에 대한 기여를 정한다. 측정된 효과마다 독립적인 자유 척도를 허용하면 가설은 검증 가능성을 잃는다. 따라서 다음에서는 서로 다른 관측으로부터 일관된 척도들의 계열을 복원하는 콤팩트화 분광 연구를 다룬다. 콤팩트한 추가 차원과 중력에서의 발현이라는 생각 자체는 오래전부터 존재한다. Arkani-Hamed, Dimopoulos, Dvali의 모형에서는 중력장과 표준장에 추가 방향에 대한 서로 다른 접근이 주어진다. 바로 이 차이는 중력의 예측을 빛이나 물질에 자동으로 옮길 수 없는 이유를 보여 준다. [26]

하나의 새 매개자가 겉보기 차원을 바꿀 수 있다

성급한 발견 약속보다 유용한 반례에서 시작하자. 공간은 삼차원으로 유지되지만 뉴턴 인력에 더해 유한한 도달 거리의 상호작용이 생긴다고 하자. 표준적인 매개변수 표현을 유카와 보정이라 부른다. 무차원 계수 α는 상대 세기를, 미터로 측정하는 λ는 도달 거리를 정한다. 이 장에서는 α의 두 부호를 모두 허용한다. 로그미분 식은 전체 힘이 영이 아닌 곳에서만 쓴다. 공식은 검증 가능한 유효 기술이며 새 상호작용의 기원에는 별도 이론이 필요하다. 이 단순한 예만으로도 특이한 지수를 바뀐 차원과 동일시하는 일이 얼마나 위험한지 알 수 있다.

$$V(r) = -\frac{GmM}{r}\left(1 + \alpha e^{-r/\lambda}\right), \qquad x = \frac{r}{\lambda} \tag{10.2}$$

B(x) > 0에서는 상호작용이 인력으로 남으므로 반지름 방향 힘의 양의 절댓값을 쓰면 편리하다. 퍼텐셜을 미분하면 인자 1/r의 미분과 지수함수의 미분 두 기여가 나온다. 두 번째는 핵심적이다. 뉴턴 힘에 퍼텐셜의 보정만 곱하면 예측이 틀린다. 힘의 대괄호를 B(x)로 나타내자. 로그미분에는 통상 항 −2와 추가항 xB′/B가 들어간다. 미분 B′는 −αxe⁻ˣ다. 대입하면 d_F 식을 얻으며 양의 α에서는 삼에 추가항이 붙는다. 이 추가항의 모든 인자는 무차원이므로 단순하지만 필수적인 단위 검증을 통과한다.

$$|F(r)| = \frac{GmM}{r^2}|B(x)|, \qquad B(x) = 1 + \alpha\left(1 + x\right)e^{-x}, \qquad B'(x) = -\alpha x e^{-x} \tag{10.3}$$

$$d_F(r) = 3 + \frac{\alpha x^2 e^{-x}}{1 + \alpha\left(1 + x\right) e^{-x}} \qquad (10.4)$$

작은 x에서 보정은 거의 일정하며 주로 상호작용의 유효 세기를 바꾼다. 큰 x에서는 지수적으로 사라진다. 두 극한 사이에는 공간 차원 증가라고 잘못 부를 수 있는 구간이 생긴다. 실험 발견이 아니라 통상적인 미분으로 얻은 결론이다. 미래 장비에 유용한 조건을 준다. 충분히 넓은 거리 구간을 측정하고 전이 형태를 검증해야 한다. 좁은 구간에서는 다른 함수들도 쉽게 같아 보인다. d_F가 삼보다 크다는 사실을 오차 없이 기록해도 우선 원래 힘 모형이 불충분하다는 것만 주장할 수 있다. 다음 질문은 발견한 보정의 물리적 기원이다.

B < 0인 구간에서는 같은 로그미분을 ln|B|로 계산한다. B = 0인 점에서는 지표 d_F가 정의되지 않는다. 이때 힘의 부호를 따로 보여야 한다. 절댓값 그래프 하나만으로는 인력과 척력 사이 전이가 가려진다.

닫힌 방향과 모드 탑

이제 명시적으로 정한 모형을 보자. 세 개의 펼쳐진 좌표 외에 주기 2πR인 주기 좌표 y가 있다. 질량 없는 스칼라장이 이 방향으로 전파하며 발생원들은 같은 y에 놓인다. 주기성은 정수 n에 대해 파수 n/R을 허용한다. 통상 공간에만 접근하는 관측자는 영이 아닌 모드를 질량 있는 여기로 기술한다. R³ × S¹ 공간의 학습용 스칼라 모형이다. 스펙트럼과 정적 퍼텐셜의 관계를 유도할 수 있지만 텐서 중력이론을 대신하지는 않는다. 스핀과 추가 장, 반지름 고정 메커니즘, 물질과의 실제 결합은 아직 정하지 않았다.

$$q_n = \frac{n}{R}, \qquad m_n = \frac{|n|\hbar}{cR}, \qquad E_n = m_n c^2 = \frac{|n|\hbar c}{R}, \qquad \lambda_n = \frac{R}{|n|} \qquad (10.5)$$

먼 거리 상호작용이 익숙한 형태를 갖도록 영 모드를 규격화하면 번호 n과 −n인 모드 쌍은 같은 기여를 준다. 지수함수들의 합은 쌍곡코탄젠트가 된다. R보다 훨씬 먼 거리에서는 퍼텐셜 1/r이 남는다. R보다 훨씬 짧은 거리에서는 장이 추가 방향으로도 퍼질 수 있어 퍼텐셜이 1/r²에 비례한다. 힘은 1/r³으로 줄어든다. 채택한 기하 구조와 장 전파

규칙에서 유도되는 거동이다. 합 앞의 계수 2는 선택한 스칼라 모형에만 해당한다. 검증 없이 실제적인 중력 가설에 옮길 수 없다.

$$V_{\mathrm{sc}}(r) = -\frac{GmM}{r}\left[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nr/R}\right] = -\frac{GmM}{r}\coth\left(\frac{r}{2R}\right) \qquad (10.6)$$

$$V_{\mathrm{sc}}(r) \simeq -\frac{GmM}{r} \quad (r \gg R), \qquad V_{\mathrm{sc}}(r) \simeq -\frac{2GmMR}{r^2} \quad (r \ll R) \qquad (10.7)$$

단위를 예시하려고 R을 10마이크로미터로 두자. 첫 모드 에너지는 약 0,0197전자볼트, 주파수 E_1/h는 4,77테라헤르츠이다. 선택한 반지름의 산술적 귀결이며 검출 예측이나 기존 관측 전체가 이 경우를 허용한다는 주장은 아니다. 주파수만으로는 여기 가능성이 정해지지 않는다. 결합 연산자와 계수, 선택 규칙, 발생원 세기, 판독 방법이 필요하다. 해당 주파수의 전자기 발생기가 찾는 모드와 전혀 상호작용하지 않을 수도 있다. 이 예의 실용적 의미는 다르다. 하나의 반지름이 정적 힘의 범위와 완전한 이론에서 고려해야 할 에너지 척도를 동시에 정한다.

그림 40은 척도 구조를 얻는 두 방법을 비교한다. 왼쪽에서는 통상적인 매개자 하나가 힘 지표를 삼에서 벗어나게 한다. 오른쪽에는 서로 연결된 콤팩트 모드의 도달 거리들을 보였다. 오른쪽 계열은 더 엄격한 가설이지만 측정이 적어도 여러 항에 민감해야 검증할 수 있다.

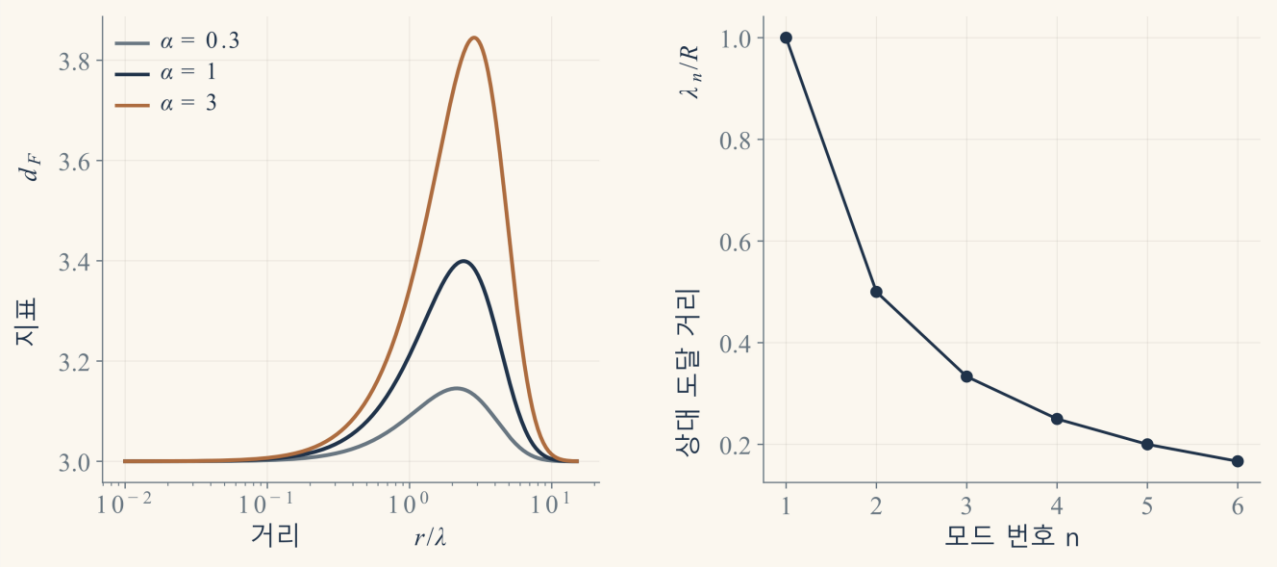


그림 40. 하나의 유카와 보정에 대한 조작적 힘 지수와 콤팩트 모드의 도달 거리. 왼쪽 곡선은 양의 α에서 계산했고 오른쪽은 λ_n/R = 1/n이다. 선택한 모형의 귀결이며 추가 차원의 관측이 아니다.

발생원과 검출기, 지연 응답

모드 스펙트럼을 장비 예측으로 바꾸려면 발생원을 정하자. 질량 m인 작은 물체가 y = 0에 있고 검출기로 향하는 직선을 따라 ε cos(ωt)만큼 변위한다. 스칼라 전하는 조건상 질량에 비례한다. 질량 M인 시험 물체도 y = 0에 놓이며 에너지 MΦ_s로 퍼텐셜과 상호작용한다. 발생원의 운동은 외부 구동기가 유지한다. ε은 거리 r보다 훨씬 작고 속도 εω는 c보다 훨씬 작다. 반지름 R을 고정한 선형 스칼라 동역학을 채택한다. 이 예를 완전히 정하면서 자연에서 구현할 수 있는지는 별도 질문으로 남긴다.

그림 41에서는 발생원 운동과 지연 응답, 힘 채널의 판독값을 하나의 측정 연산자의 서로 다른 부분으로 구별했다.

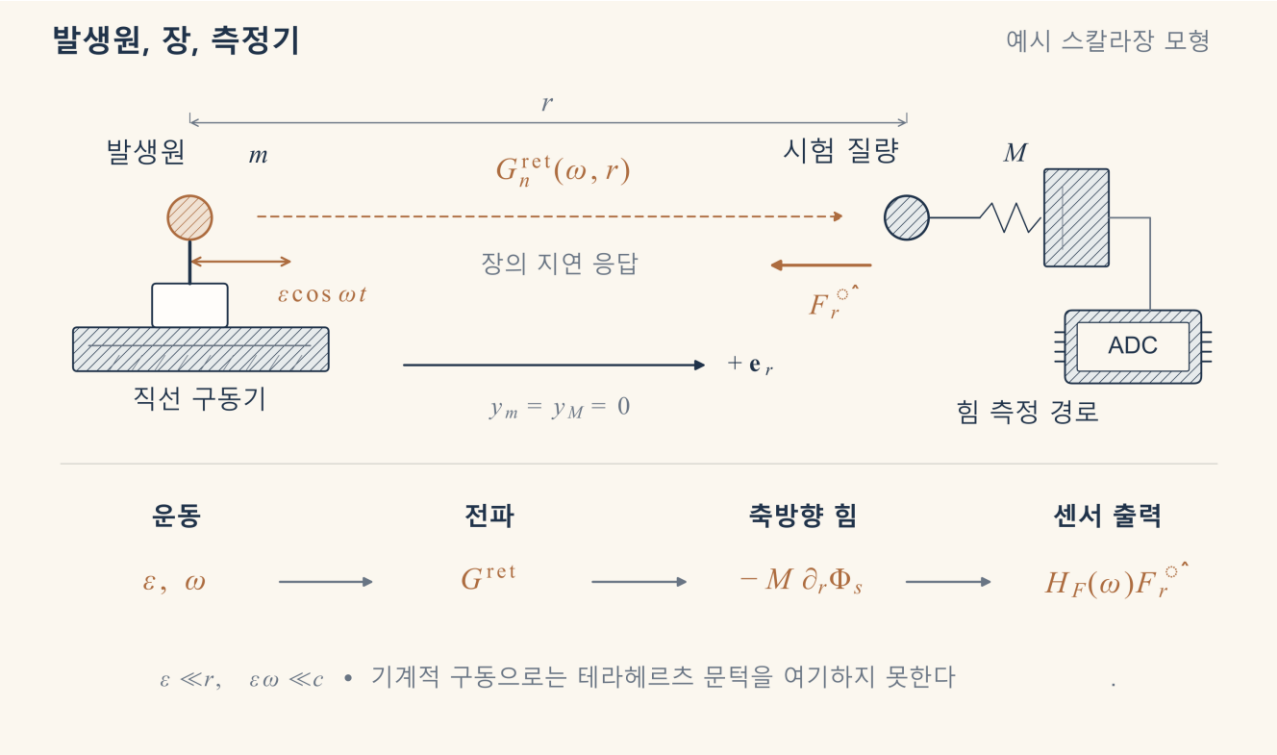


그림 41. 발생원 m과 시험 질량 M은 같은 콤팩트 좌표 y = 0에 있다. 구동기는 발생원을 양의 반지름 방향으로 이동시킨다. 힘 화살표는 끌어당기는 준정적 응답의 부호를 정한다. 운동과 디지털 출력 사이에는 그린 함수와 퍼텐셜의 공간 미분, 힘 센서의 응답이 있다. 주어진 스칼라장 모형에서 측정 원리의 구상을 나타냈다. 장 방정식에 콤팩트 문턱이 있다고 100 Hz의 기계적 여기가 테라헤르츠 발생원이 되지는 않는다.

$$\left(\nabla_{\mathbf{x}}^2 + \partial_y^2 - c^{-2}\partial_t^2\right)\Phi_s = 4\pi G_4 \rho_4, \qquad G_4 = 2\pi R G_s, \tag{10.8}$$

$$\rho_4 = m\,\delta^{(3)}\left(\mathbf{x} - \epsilon\cos(\omega t)\mathbf{e}_r\right)\delta_{2\pi R}(y) \tag{10.9}$$

여기서 Φ_s의 단위는 m²/s², 사차원 공간 밀도 ρ₄의 단위는 kg/m⁴, G₄의 단위는 m⁴/(kg·s²)다. 주기적인 델타 함수는 원주를 따라 적분하면 일이 된다. 계수 G_s는 영 모드를 분리한 뒤 원거리 스칼라 힘을 정한다. 이후 모든 위상 진폭에 exp(−iωt)를 곱한다. 따라서 밖으로 나가는 반지름 방향 파동에는 exp(ik_nr)가 포함되며, 제곱근의 가지는 허수부가 음수가 아니도록 선택한다.

$$k_n(\omega)=\sqrt{\frac{\left(\omega+i0\right)^2}{c^2}-\frac{n^2}{R^2}},\qquad G_n^{\mathrm{ret}}(\omega,r)=\frac{e^{ik_n r}}{4\pi r}\qquad(10.10)$$

ω < nc/R이면 파수 k_n은 허수다. 기여는 지수적으로 줄어들며 자유롭게 전파하는 모드를 먼 거리로 전달하지 않는다. 문턱 위에서는 k_n이 실수가 된다. 이때도 통상적인 반지름 방향 운동량은 연속적이므로 문턱이 좁은 스펙트럼선일 필요는 없다. 공명에는 추가적인 가둠, 반사, 또는 원천의 구체적인 동역학이 필요하다. 같은 함수의 정적 극한은 exp(−nr/R)/r를 주어 이미 얻은 퍼텐셜로 돌아간다. 이 검증은 모형의 두 부분을 하나의 연산자로 연결한다. 콤팩트 스펙트럼과 유카와 보정의 관계는 원문 연구 문헌에서 다루었다. 계수들은 기하학과 모드의 축퇴도에 따라 달라진다. [45]

발생원의 작은 변위는 발생원 위치에 대해 그린 함수를 미분한다. 측정할 힘을 얻으려면 검출기 위치로 한 번 더 미분해야 한다. 같은 축의 점입자 실험에서 반지름 방향 힘의 진폭은 다음과 같다.

$$\hat{F}_r(\omega)=-\frac{G_s m M\epsilon}{r^3}\mathcal{D}(\omega,r),\qquad \mathcal{D}=\sum_{n=0}^{\infty}w_n\,e^{ik_n r}\left[2-2ik_n r-\left(k_n r\right)^2\right],\qquad(10.11)$$

$$w_0=1,\qquad w_n=2\ \left(n\geq 1\right)\qquad(10.12)$$

부호는 원천에서 검출기로 향하는 반지름 축에 해당한다. ω = 0에서 첫 괄호는 영 모드에 대해 둘이며, 질량 모드에서는 2 + 2nr/R + (nr/R)²가 된다. 따라서 동적 표시값은 진폭과 위상까지 함께 정해진다. 점 근사는 물체 크기가 r보다 훨씬 작아야 한다. 아래에서는 유한한 물체들을 별도의 적분으로 계산한다.

R = 10 μm의 경우 첫 번째 임계값은 4,7713 THz이고 100 Hz의 드라이브는 ωR/c = 2,10 × 10⁻¹¹입니다. 사용 가능한 기계적 움직임은 거의 정적 인 힘을 탐구합니다. 계산된 테라헤르츠 척도의 단순한 존재는 기계적 근원을 테라헤르츠 자극자로 만들지 않는다. 그림 44의 왼쪽 패널은 r = 3R에서 무차원 동적 참조를 보여줍니다. 고주파 영역은 제안된 기계 실험의 사양이 아닌 지정된 필드 방정식의 예측으로 사용됩니다.

점질량에서 측정 가능한 돌림힘까지

실제 질량 분포에는 모양과 두께, 밀도 구조가 있다. 간격이 그 크기와 비슷하면 중심 사이 힘만으로 센서 판독을 기술할 수 없다. 모든 물질 요소 쌍의 상호작용을 더해야 한다. 회전하는 발생원에서는 각도 θ의 전체 퍼텐셜 에너지를 먼저 구한 뒤 각도에 대해 미분한다. 측정한 표면과 밀도 불균일, 구멍, 차폐판이 적분에 들어간다. 이는 장비 모형의 핵심이다. 기하 구조를 더 정확히 했을 때 사라지는 약한 효과는 공간이 바뀌었다는 증거가 아니다. 장비 자체의 기하 구조를, 발견하려는 기하 구조보다 더 정확히 알아야 한다.

$$U(\theta) = -G \int d^3x\, d^3y\, \frac{\rho_1(\mathbf{x})\rho_2(\mathbf{y})}{s(\mathbf{x},\mathbf{y},\theta)} \left[1 + \sum_{n} \alpha_n\, e^{-s(\mathbf{x},\mathbf{y},\theta)/\lambda_n}\right], \qquad \tau_z = -\frac{\partial U}{\partial \theta} \tag{10.13}$$

여기서 s는 발생원 회전 후 두 물체의 요소 사이 실제 거리이다. 밀도 단위는 세제곱미터당 킬로그램, 에너지 적분 단위는 줄, 돌림힘 단위는 뉴턴미터이다. 유용한 발생원 구성에는 여러 공간 주기가 있다. 회전하면 서로 다른 조화 성분이 생기고 각각 적분 안의 거리에 다른 가중치를 준다. 간격 변경은 독립 정보를 더한다. 상호작용 형태를 센서의 공통 증폭계수와 구별하는 데 도움이 된다. 그러나 여러 조화 성분을 미리 독립 실험으로 간주해서는 안 된다. 같은 표면이나 위치 오차가 모든 채널을 동시에 옮길 수 있으므로 공동 공분산을 분석에 포함해야 한다.

리와 공동연구자들은 간격 52 μm부터 3 mm까지 상호작용을 검증했다. 2020년 분석에서는 중력과 같은 크기인 |α| = 1의 유카와 보정 도달 거리가 신뢰수준 95%에서 38,6 μm 미만으로 제한되었다. (α, λ) 영역의 특정 단면점이며 모든 추가 방향의 반지름에 대한 보편적 한계가 아니다. 탄과 공동연구자들의 연구에서는 차폐막 운동의 억제로 잔여 표면 퍼텐셜의 영향을 줄였다. 두 예는 힘의 해석이 상호작용 모형과 측정한 장치 성질에 의존함을 보여 준다. [27] [28]

유한한 두 원판의 완전히 정한 계산

반지름 a = 5 mm, 두께 t = 100 μm로 같은 균일한 두 동축 원판을 보자. 두 물체의 밀도는 19 300 kg/m³로 정한다. 평균 간격 z_0는 50 μm이며 구동기는 이를 ε cos(ωt)만큼 줄인다. 여기서 ε = 0,1 μm이고 주파수는 100 Hz다. 센서는 축방향 힘의 첫 조화 성분을

측정한다. 이 값들은 계산할 표본을 정한다. 구동기, 차폐판, 힘 센서의 성질은 별도 모형 장치에서 검증해야 한다.

통상적인 원거리 힘과 비교하려면 β를 도입하면 편리하다. 원거리 스칼라 성분이 G_s이고 측정한 전체 계수가 G_N이면 β = G_s/G_N으로 놓는다. 두 인력 기여의 합에서는 0 ≤ β ≤ 1이다. β = 1이면 순수 스칼라 기준으로 돌아간다. 영 모드는 이미 G_N에 포함되어 있다. 추가 유카와 항들은 α_n = 2β와 λ_n = R/n을 갖는다. 아래 수치는 G_N = 6,67430 × 10⁻¹¹ m³/(kg·s²)를 사용한다.

$$V(r) = -\frac{G_N m M}{r}\left[1 + 2\beta \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n r/R}\right] \tag{10.14}$$

두 원통형 물체에 대한 적분은 유한 원판을 무한 평판으로 바꾸지 않고도 변수 둘로 줄일 수 있다. 횡방향 변위 u에서 투영들의 겹침 넓이는 A_ov(u)이다. 두 요소의 깊이 합 w에는 삼각형 가중치 b(w)가 있다. 이 기하학적 가중치들은 모든 물질 요소 쌍을 고려한다.

$$A_{\mathrm{ov}}(u) = 2a^2 \arccos\frac{u}{2a} - \frac{u}{2}\sqrt{4a^2 - u^2}, \qquad 0 \le u \le 2a, \tag{10.15}$$

$$b(w) = \min\left(w, 2t - w\right), \quad s = \sqrt{u^2 + \left(z_0 + w\right)^2}, \quad 0 \le w \le 2t \tag{10.16}$$

적분의 기하학적 양들과 간격 변조 방향을 그림 42에 모았다.

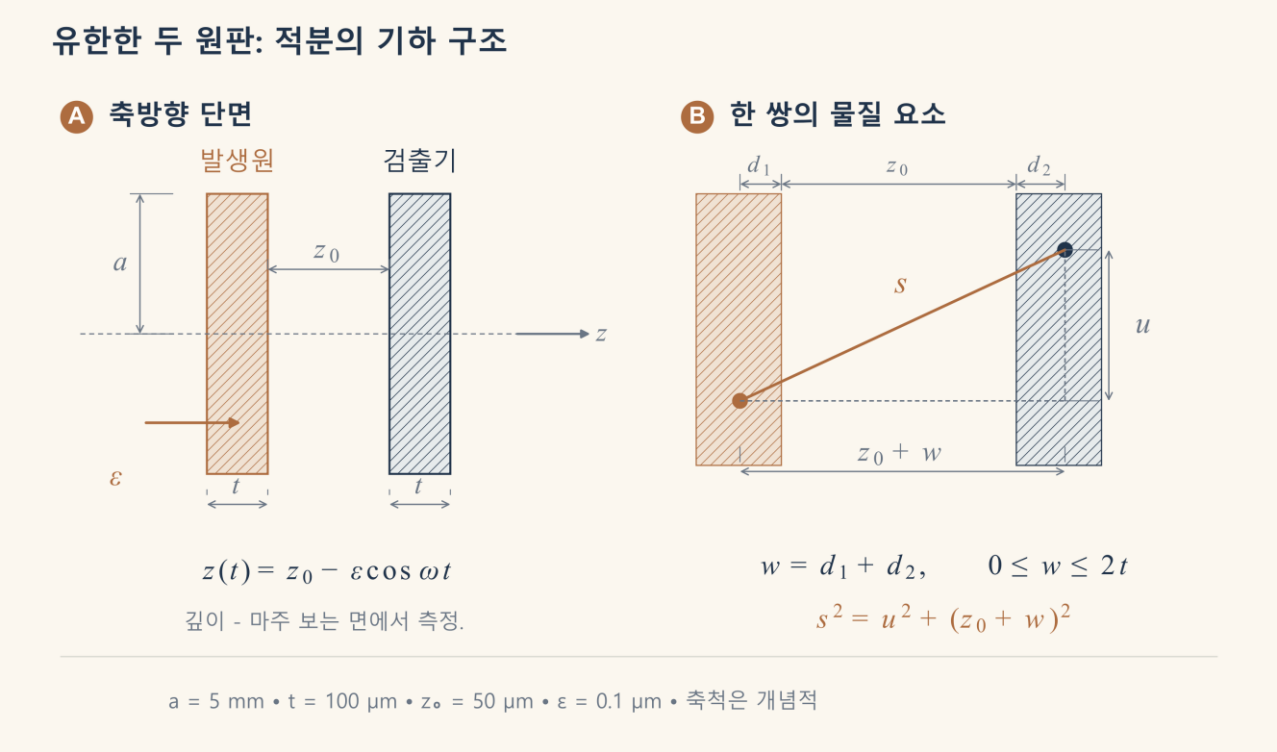


그림 42. 균일한 두 동축 원판의 반지름 a와 두께 t는 같다. 원천을 움직이면 평균 간격 z_0가 ε cos(ωt)만큼 줄어든다. 확대한 요소 쌍에서 d_1과 d_2는 서로 마주 보는 면에서 물체 안쪽으로 잰 거리다. 그 합 w는 축방향 거리 $z_0 + w$를 정하고 u는 가로 거리를 정한다. 따라서 요소 쌍의 거리는 $s = \sqrt{[u^2 + (z_0 + w)^2]}$다. 두께, 간격, 변위는 축척대로 그리지 않았다. 계산한 기하학에는 추가 차폐판을 넣지 않았다.

$$F_Y\left(z_0;\lambda,\alpha\right) = 2\pi G_N \rho^2 \alpha \int_0^{2a} u\,A_{\mathrm{ov}}(u)\,du \int_0^{2t} b\,(w)\,\frac{z_0 + w}{s^3}\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)e^{-s/\lambda}\,dw \qquad (10.17)$$

$$F_{1,Y} = -\epsilon\frac{\partial F_Y}{\partial z_0}, \qquad F_{1,\mathrm{tower}} = \sum_{n\geq 1} F_{1,Y}\left(z_0;R/n,2\beta\right) \qquad (10.18)$$

식 (10.17)의 힘 F_Y는 인력에 대해 양수다. 간격이 줄면 커지므로 첫 조화 성분의 진폭은 양수다. 프로그램에서는 커널의 도함수를 해석적으로 계산한 뒤 수치적분한다. 뉴턴 기여는 지수 인자를 일로 바꾸어 얻으며 역시 유한한 물체들에 대해 적분한다. 변조한다고 사라지는 것은 아니다. 유한 원판의 가장자리 장이 영이 아닌 힘의 도함수를 만든다.

R = 10 μm, β = 1에서의 양	계산 결과
일정한 뉴턴의 힘	1,12028 × 10^{-13} N
뉴턴 힘의 첫 조화 성분	5,66708 × 10^{-18} N
전체 모드 탑의 추가 조화 성분	1,65240 × 10^{-19} N
첫 모드 쌍의 추가 조화 성분	1,64682 × 10^{-19} N
추가 조화 성분에서 뒤 모드들의 비율	0,3377%

수치적분 차수를 높였을 때 추가 조화 성분은 그 크기에 비해 10^{-13} 미만, 뉴턴 조화 성분은 약 1,2 × 10^{-11}만큼 변했다. 이는 선택한 이상적 기하학의 수치적분 검증이다. 실제 크기, 밀도, 위치의 오차를 추정하는 검증은 아니다. ε에 대한 선형화에는 개별 모드에서 $(\varepsilon/\lambda)^2$ 차수의 별도 보정이 생긴다. ε/R = 0,01이면 주 모드는 충분히 선형 영역에 있다. 비율이 더 큰 높은 모드들은 여기서 간격에 의해 지수적으로 억제된다.

얻은 뉴턴 조화 배경은 추가 신호보다 약 34배 크다. 그 교정도 센서 민감도와 마찬가지로 과제에 포함된다. 모든 보정 후 조화 성분의 표준오차가 3 × 10^{-20} N이어야 한다면 기하 구조와 뉴턴 배경의 오차 예산도 그 안에 들어야 한다. 판독 자체 잡음이 그만큼 작다는 약속만으로 최종 정확도가 보장되지는 않는다.

민감도 지도와 경쟁 매개자

언급한 잔여 매개변수를 포함하여 이미 추정한 힘 고조파의 표준오차를 조건상 σ_F = 3 × 10^{-20} N으로 두자. R을 고정하면 공칭 양측 척도 1,96σ_F에서 β_min = 1,96σ_F/F_1(β = 1)을 얻는다. 이는 가우스 근사 아래 미리 고른 검증 하나의 특성이다. 여러 R의 탐색과 배경 형태의 불확실성에는 14장의 전체 통계 절차가 필요하다.

$$\beta_{\min}(R) = \frac{1.96\,\sigma_F}{F_{1,\mathrm{tower}}\left(R, \beta = 1\right)} \qquad (10.19)$$

R = 10 μm에서 β_min = 0,35584를 얻는다. 주어진 문턱을 넘는 척도이지 높은 검정력의 보장은 아니다. 기댓값이 1,96σ_F인 신호는 실현의 약 절반에서 위 문턱을

넘는다. 같은 양측 공칭 규칙으로 약 80%의 검정력을 얻으려면 약 2,80σ_F가 필요하며 여기서는 β 약 0,509에 해당한다. 그림 43은 이 조건부 민감도 영역을 보여 준다. 주어진 오차의 귀결이며 달성한 실험 한계가 아니다. 기존 관측 전체가 허용한다고 여기는 영역을 따로 표시하지도 않았다. 그러려면 실제 제약을 모드 탑과 물질 결합에 별도로 옮겨야 한다. 문헌의 |α| = 1 한계는 유카와 보정 하나에 해당한다. 재분석 없이 전체 탑의 정확한 경계로 바꿀 수 없다.

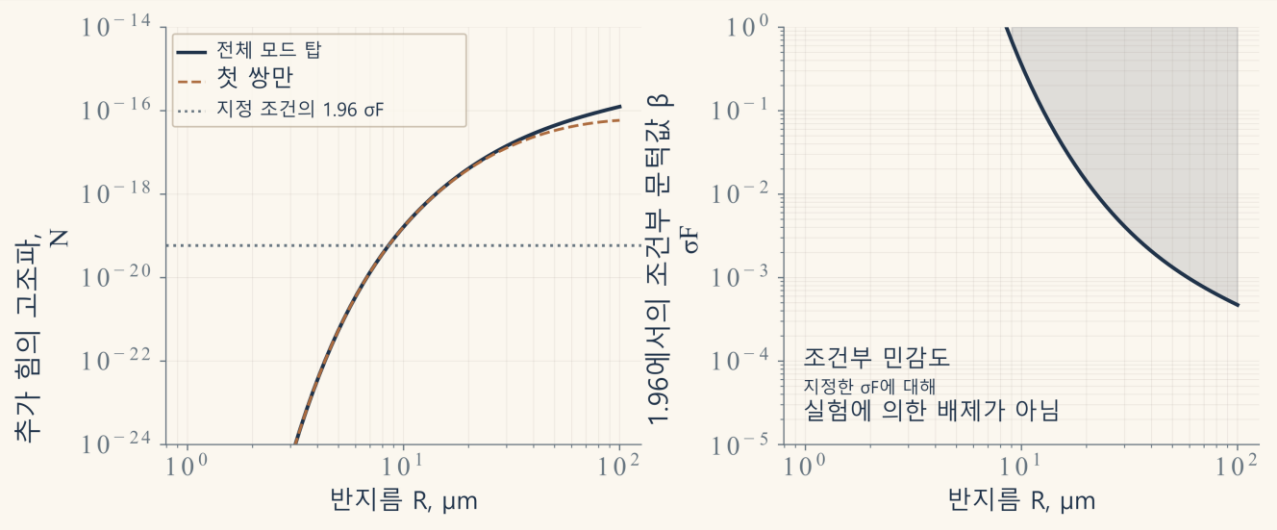


그림 43. 유한한 원판들과 주어진 잡음 예산. 왼쪽은 β = 1에서 추가 힘의 고조파를, 오른쪽은 σ_F = 3 × 10⁻²⁰ N에서 β_min을 계산했다. 음영은 이 계산의 조건부 구별 가능성만 나타낸다. 실험으로 배제된 영역을 그린 것은 아니다.

다음 테스트는 타워가 하나의 일반 중개자와 구별 할 수 있는지 여부를 묻습니다. 인공적인 기준에서는, R = 20 μm와 β = 0,1는 지정됩니다. 단일 매개체의 α 및 λ은 갭 60 및 100 μm에서의 정확한 고조파에 따라 선택된다. α = 0,2144505 및 λ = 19,77856 μm이 얻어졌다. 두 훈련 포인트는 숫자 검색의 정확성에서 타워와 일치합니다. 두 개의 매개변수가 두 개의 숫자로 조정됩니다.

새로운 갭	모드 탑과 맞춘 매개자의 차이	차이 / σ_F
20 μm	3,56857 × 10⁻¹⁹ N	11,90
30 μm	9,68061 × 10⁻²⁰ N	3,23
40 μm	2,47110 × 10⁻²⁰ N	0,82

채택한 불확도 예산에서 40 μm 데이터는 이 설명들을 거의 구별하지 못한다. 20 μm에서는 예측이 뚜렷이 갈라진다. 그림 44의 오른쪽 패널은 이 차이를 보여 주며 적합 지점들을 표시한다. 마지막 열의 값은 두 고정된 예측 사이의 거리를 지정한 오차의 단위로 표현한다. 곧바로 발견의 유의성이 되는 값은 아니다. 매개변수 불확실성, 공통 간격 오차, 실제 잡음 데이터에 대한 재적합은 겹치는 영역을 넓힌다.

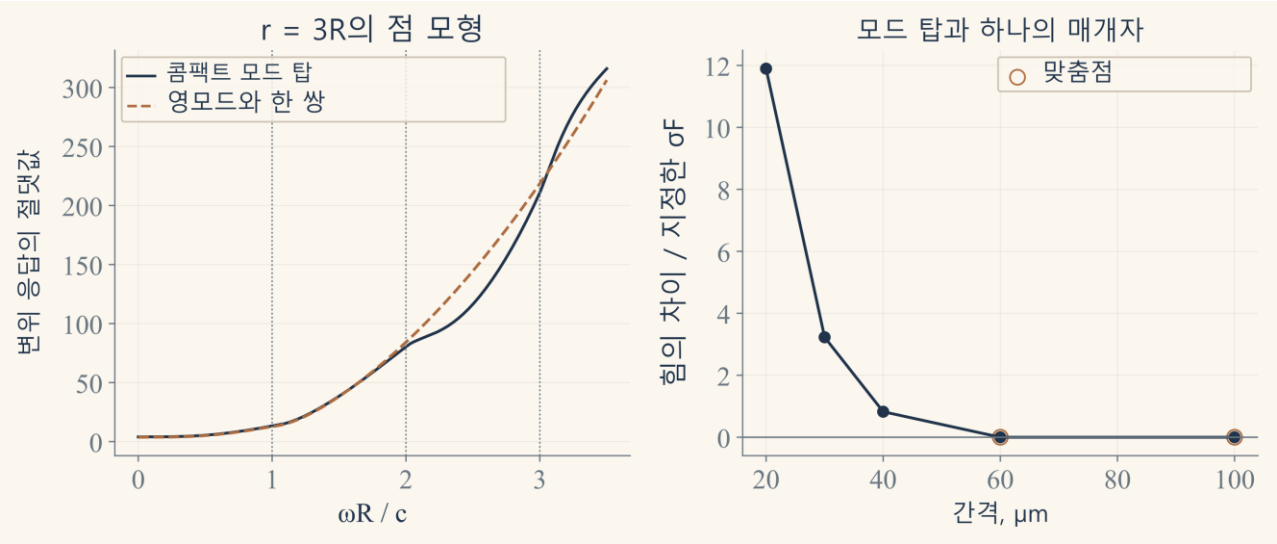


그림 44. 콤팩트 모형의 두 검증. 왼쪽은 r = 3R에서 발생원 변위에 대한 점모형의 동적 응답이다. 세로선은 문턱 ωR/c = 1, 2, 3을 나타낸다. 오른쪽은 두 학습점에서 일치시킨 모드 탑과 단일 매개자 사이 유한 원판 고조파의 차이다. 수치들은 계산으로 얻었다.

이 절의 모든 결과는 physics_revision.py로 재현한다. 유한 물체 적분을 수행하고 통상 매개자를 맞추며 두 그림을 그린다. 기하 구조 분광학의 의미를 분명히 하는 예이다. 방정식 안에 연결된 척도들이 있다는 것만으로는 부족하다. 그 기여가 경쟁 설명의 불확실성을 넘어서는 측정 영역이 필요하다.

이 실험이 허용하는 결론

선택된 스칼라 모델에서 단일 반경은 정적 범위, 전파 임계값 및 동적 응답을 결정합니다. 유한 디스크를 위한 적분은 그들을 힘 조화로 변환하고, 단 하나 중개자와 비교는 차별 간격을 나타낸다.

물리적 탐색에서는 기하 구조와 배경, 전체 오차 예산을 측정한 뒤 미리 고정한 간격 변경을 수행해야 한다. 편차가 있으면 해당 대역의 추가 상호작용이 확립될 것이다.

기하학적 해석에는 같은 연산자의 다른 예측들과의 일치 및 더 넓은 매개자 부류의 검증이 필요하다.

다음에는 시계 주파수와 장의 공간 기울기의 일관성을 다룬다. 장비 운동과 공통 교란을 따로 검증해야 한다.

제11장 공간의 공동 탐침으로서 시계와 중력계

하나의 원인과 두 관측 방법

같은 장비 둘은 판독값의 반복성을 확인할 수 있다. 서로 다른 종류의 장비 둘은 관측량 사이 관계까지 검증한다. 약한 준정적 장에서 시계 비교는 퍼텐셜 차이와, 시험 물체의 가속도는 퍼텐셜의 공간 기울기와 연결된다. 따라서 시계와 중력계를 합쳐 하나의 원인을 검증할 수 있다. 이 장에서는 선택한 통계 모형을 공동 스펙트럼과 구체적인 기하 구조, 잡음 예산, 시계 교환을 포함한 합성 실험까지 전개한다.

약한 장에서 추가 퍼텐셜을 δΦ로 쓰고 무차원량 q = δΦ/c²를 도입한다. 고정한 시계와 느린 변화에서 알려진 효과를 고려하면 점 a와 b 사이 상대 주파수 보정은 대략 q의 차이다. 주파수 비 중 무엇을 y_ab라고 하는지에 따라 부호가 달라진다. 아래에서는 공식에 쓴 정의를 그대로 사용한다. 중력 측정 경로는 퍼텐셜의 음의 공간 기울기와 연결된다. 지지대의 실제 센서는 자체 역학계에 대한 운동을 측정하므로 이 양에 대한 응답을 보정해야 한다. 장 방정식 자체는 아직 장비 판독 방정식이 아니다. 이 장의 q는 무차원 퍼텐셜만 뜻하며 망 문제의 행렬 스칼라에 쓰지 않는다.

$$q(\mathbf{x},t)=\frac{\delta\Phi(\mathbf{x},t)}{c^{2}},\qquad y_{ab}(t)\simeq q(\mathbf{x}_{a},t)-q(\mathbf{x}_{b},t),\qquad \delta\mathbf{a}(\mathbf{x},t)=-c^{2}\nabla q(\mathbf{x},t) \tag{11.1}$$

시계로 매우 작은 중력 차이를 측정할 수 있다는 것은 개별 실험들에서 확인했지만 제안한 추가 장의 증거는 아니다. 보스웰과 공동연구자들은 밀리미터 원자 표본 안의 중력 주파수 기울기를 관측했다. 쩡과 공동연구자들은 전체 높이 차가 일 센티미터인 다섯 원자 앙상블 배열에서 적색편이를 맹검 검증했다. 이 장에서 두 연구는 측정 원리와 계통효과를 검증하는 태도를 뒷받침한다. 결과를 임의의 망에 대한 완성된 민감도로 바꿀 수는 없다. 거리와 전송선, 질의 간격, 환경이 다르면 자체 평가가 필요하다. [29] [30]

평탄한 시공간의 가속 시계

공동 신호를 곡률 탓으로 돌리기 전에 곡률이 정확히 없는 경우를 살펴보면 유용하다. 관측자들의 계가 x 방향으로 균일하게 가속한다고 하자. 린들러 좌표에서 간격은 다음 형태이다.

$$ds^2 = -N(x)^2 c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad N(x) = 1 + \frac{a_0 x}{c^2} > 0 \qquad (11.2)$$

이 좌표에서 정지한 시계의 고유시간은 dτ = N(x)dt다. 두 시계의 비교에는 위치에 따른 주파수 이동이 들어간다. a_0 = 9,81 m/s²이고 기준 거리가 일 미터로 작으면 일차 항은 1,0915 × 10^{-16}이다. 지지대 위 가속도계도 영이 아닌 값을 보인다. 관찰자의 고유가속도는 $a_0/N(x)$다. 그럼에도 시공간은 평평하다. 관성 좌표로의 변환에서 이를 직접 볼 수 있다.

$$cT = \left(x + \frac{c^2}{a_0}\right)\sinh\frac{a_0 t}{c}, \qquad X = \left(x + \frac{c^2}{a_0}\right)\cosh\frac{a_0 t}{c} - \frac{c^2}{a_0} \qquad (11.3)$$

(11.3)을 대입하면 계량은 $-c^2dT^2 + dX^2 + dy^2 + dz^2$가 되어 리만 텐서 전체가 영이다. 가속 지지대 판독값의 공간 기울기조차 조석 곡률과 직접 동일시해서는 안 된다. $\alpha(x) = a_0/N(x)$에는 다음 정확한 관계가 성립한다.

$$\partial_x \alpha + \frac{\alpha^2}{c^2} = 0 \qquad (11.4)$$

두 번째 항은 선택한 가속계의 운동학을 반영한다. 국소 관성계에서 자유 시험 물체들의 상대가속도는 의미가 다르다. 초기 속도와 측정 기선의 운동을 고려하면 곡률의 조석 성분과 연결된다. 일반적으로 관측자와 신호 교환, 지지대 운동을 포함한 측정 프로토콜이 필요하다. 시계 나침반과 상대론적 지오이드 연구들은 바로 이런 조작적 질문들을 다룬다. [41] [42]

Rindler 컨트롤은 확장 프로시저에 대한 특정 요구 사항을 지정합니다. 시스템 가속을 고려한 후 곡률을 영으로 반환해야 합니다. 이제 미리 정의된 영이 아닌 조석 구성 요소로 배경에 대해 동일한 디자인을 확인하겠습니다.

영이 아닌 곡률: 시계와 조석 기울기계

이제 영이 아닌 조석 작용의 배경을 정하고 두 측정 채널을 모두 적용하자. 함수 N에 이차항을 더하면서 유클리드 공간 단면의 정적 계량을 유지한다. a_0의 단위는 가속도이고 κ는 초의 역수의 제곱이다. 두 추가항이 모두 작은 $N > 0$ 영역을 고려한다. 주어진 국소 기하학적 예이며 응력을 만드는 발생원을 아인슈타인 방정식에서 유도하지 않는다. 지구장 모형이라고 선언하는 것도 아니다.

$$ds^2 = -N(x)^2 c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \qquad N(x) = 1 + \frac{a_0 x}{c^2} + \frac{\kappa x^2}{2c^2} \tag{11.5}$$

곡률의 부호를 검증할 수 있도록 다음 공식으로 리만 텐서의 규약을 고정한다. 좌표 x^0는 ct이다. 이후 프라임 기호는 x에 대한 미분을 나타낸다. 이는 여기서 정적 단면의 고유 공간 길이도 측정한다.

$$R^{\rho}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\mu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma} \tag{11.6}$$

시간과 x 부문에서 영이 아닌 접속 계수는 $\Gamma^0{}_{0x} = \Gamma^0{}_{x0} = N'/N$과 $\Gamma^x{}_{00} = NN'$다. 이를 대입하면 $R^x{}_{0x0} = NN''$를 얻는다. 정지한 관찰자의 정규직교 틀로 옮기면 두 시간 성분을 N으로 나눈다. $\alpha = c^2 N'/N$이 양의 x축 방향으로 측정한 지지대의 고유가속도라면 결과를 조석 기울기의 단위로 나타내면 편리하다.

$$\mathcal{K}(x) = c^2 R_{\hat{0}\hat{x}\hat{0}\hat{x}} = c^2 \frac{N''}{N} = \partial_x \alpha + \frac{\alpha^2}{c^2}, \qquad \mathcal{K}\left(0\right) = \kappa \tag{11.7}$$

정적 시계를 $x = 0$과 $x = \pm h$에 놓자. 같은 고유주파수 ν_0를 가진 양 끝 발생원이 중앙 관측자에게 빛을 보내면 중앙에서는 수신 주파수와 자체 시계를 비교한다. 각 광선의 주파수는 $-u\cdot k$에 비례한다. 정적 계량에서 파동벡터의 공변 시간 성분 보존이 정확한 비를 정한다. 따라서 기록한 이동 $y_\pm$는 $N(\pm h) - 1$이다. 그 합은 선형 가속항을 없앤다.

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{\left(u^\mu k_\mu\right)_R}{\left(u^\mu k_\mu\right)_E} = \frac{N_E}{N_R}, \qquad C_2 = y_+ + y_- = \frac{\kappa h^2}{c^2} \tag{11.8}$$

둘째 채널은 같은 기선 양 끝의 정적 가속도계 둘의 판독 차이에 중앙 지지대의 판독값을 더한 것이다. 축은 x 방향으로 맞춘다. 유한차분은 미분을 추정하고 별도로 측정한 가속도 제곱은 운동학적 기여를 제거한다. 얻은 양에는 독립적인 물리적 해석이 있다. 회전하지 않는 국소 관성 틀에서 가까운 자유 물체들은 상대 조석 가속도를 겪는다. 양의 κ에서는 압축 방향이다. 측정 틀과 지지대 운동의 관계는 시계 나침반 프로토콜의 일부이다. [41]

$$\widehat{\kappa}_{g} = \frac{\alpha(h) - \alpha(-h)}{2\hbar} + \frac{\alpha\left(0\right)^{2}}{c^{2}}, \qquad \delta a_{\parallel} = -\mathcal{K}\,\xi_{\parallel} \tag{11.9}$$

그림 45는 가속하는 평탄한 배경과 양의 조석 곡률에서 같은 시계 및 가속도계 프로토콜을 비교한다.

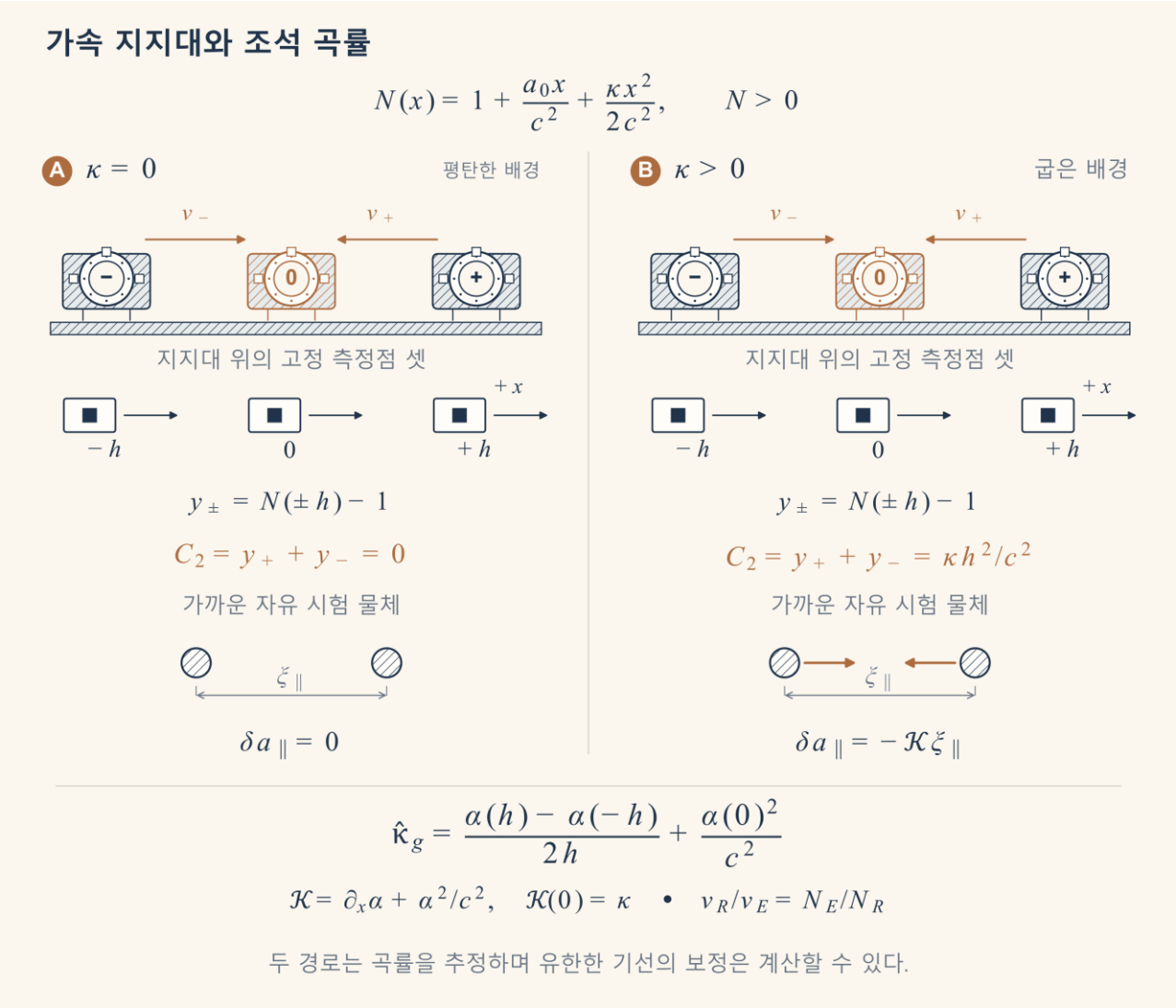


그림 45. 양끝 원자시계는 가운데 시계 하나로 빛을 보낸다. 세 측정점 모두 지지대에 유지되며 가속도계 축은 +x를 향한다. 주파수 이동은 N(±h) − 1로 정의한다. 그 합은 선형 가속항을 없앤다. 가속도 기울기에는 별도의 중앙 보정 α(0)²/c²가 필요하다. 아래 쌍들은 시계 지지대가 아니라 자유 시험 물체다. 양의 κ는 압축을 준다. 이는 주어진 국소 계량이며 지구의 장을 도출해 그린 것이 아니다. 유한한 기선은 기울기 추정에 계산 가능한 보정을 남긴다.

a_0 = 9,81 m/s², κ = 3 × 10⁻⁶ s⁻², h = 100 m로 고르자. 그러면 C_2 = 3,33795 × 10⁻¹⁹이고 중앙 곡률 성분은 3,33795 × 10⁻²³ m⁻²이다. 지지대 가속도 차이는 5,999999998 × 10⁻⁴ m/s²이다. 운동학적 보정은 1,07077 × 10⁻¹⁵ s⁻²이다. 이를 더한 κ 추정값은 유한

기선 때문에 주어진 값과 −5,01 × 10⁻²⁵ s⁻²만큼 다르다. 국소 근사에서 기선 200 m의 해당 자유 상대가속도는 −6 × 10⁻⁴ m/s²이다.

평균 후 전체 표준오차를 독립 시계 채널 셋 각각에 10⁻²⁰, 가속도계 각각에 2 × 10⁻⁵ m/s²로 정하자. 계산 조건이며 장치가 달성한 성능이 아니다. 공통 중앙 시계가 두 주파수 차이에 모두 들어간다. 공분산이 σ²이므로 C₂의 오차는 2σ가 아니라 √6 σ이다. 주파수 전달은 교정되었다고 가정한다. 미지의 추가 상관관계가 있으면 예산을 다시 계산해야 한다.

기하 구조에는 서로 다른 두 오차가 있다. 공통 반기선의 표준오차는 1 mm이고 양 끝 장비의 중점과 중앙 장비 사이 위치 오차는 10 μm이다. 후자가 특히 중요하다. 중점 변위 b가 C₂에 선형항 2a₀b/c²를 더한다. 중심 정렬의 독립 측정을 대칭이라는 약속으로 대체할 수 없다. 이 오차들을 고려한 일차 선형 불확실성 전파는 시계에서 σ(κ) = 2,2102 × 10⁻⁷ s⁻², 기울기계에서 1,4142 × 10⁻⁷ s⁻²를 준다. 주어진 신호와 이 오차들의 비는 13,6과 21,2이다. 고정 구성의 조건부 예산이다.

κ = 0인 린들러 대조에서는 같은 시계 대비가 국소 곡률과 마찬가지로 정확히 영이다. 가속도의 유한차분에는 계산 가능한 잔여량 −1,28 × 10⁻⁴³ s⁻²만 남는다. 따라서 프로토콜은 가속하는 평탄계와 주어진 곡률 배경을 구별한다. 계산에는 높인 산술 정밀도를 사용했다. 일 근처의 수 셋을 통상적으로 빼면 시계 대비를 잃기 때문이다. 이 계산상 주의가 시계 정확도를 정하지는 않는다. 이제 무작위 퍼텐셜로 돌아간다. 그 공동 신호 자체는 여기서 수행한 조석 대조를 대신하지 못한다.

확률장의 검증 가능한 형판

출발점에서는 제한된 현상론적 가설이면 충분하다. q는 평균이 영이고 모든 점에서 같은 분산을 가지며 공간 상관은 척도 ℓ에서 줄어든다고 하자. 시간 상관은 특징적 시간 τ_c로 감쇠한다. 가장 단순하고 편리한 경우는 거리의 가우스 의존성과 시간차의 지수 의존성을 결합한다. A는 q의 제곱평균제곱근 진폭이고 ℓ은 미터, τ_c는 초로 측정한다. 증명된 양자중력 이론에서 나온 선택이 아니다. 관측 관계를 미리 유도하고 어떤 센서 구성이 가장 유용한지 정할 수 있는 구체적인 검증 대상을 정한다.

$$C_q(r,\Delta t) = \langle q(\mathbf{x},t)q(\mathbf{x}+\mathbf{r},t+\Delta t)\rangle = A^2 \exp\left(-\frac{r^2}{2\ell^2}\right)\exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau_c}\right) \qquad (11.10)$$

상관함수를 아름다운 모양만 보고 고를 수 없다. 어떤 점들의 집합에서도 그 값의 행렬은 신호의 모든 선형 조합에 대해 음이 아닌 분산을 주어야 한다. 여기서는 조건이 성립한다. 공간 가우스 커널과 시간 지수 커널은 양의 정부호이며 그 곱도 필요한 성질을 보존한다. 그러나 확률적으로 허용된다고 물리적으로 완결된 것은 아니다. 어떤 동역학으로 장이 생기고 물질과 어떻게 결합하며 기준계를 바꿀 때 어떤 변환을 따르는지 설명해야 한다. 주어진 공분산은 선택한 관측계의 통계를 기술할 뿐 인과적 응답이나 영향 전달 속도를 스스로 정하지 않는다.

상관 길이가 큰 극한은 특히 중요하다. 모든 시계가 ℓ보다 훨씬 작은 영역에 있으면 장이 주파수를 거의 같게 옮겨 차이 측정에서 효과가 억제된다. 시계가 아주 정밀하다는 이유만으로 완전히 공통인 이동에 연결망이 더 민감해지지는 않는다. 반대 극한인 거리보다 ℓ이 훨씬 작은 경우 시계들은 거의 독립된 값을 보고 차이의 분산은 포화된다. 그 사이에 공간 척도의 정보가 있다. 따라서 단일 거리가 아니라 서로 다른 기선이 필요하다. 시간 대역이 같을 때 선택한 커널에서 두 영역을 보여 주는 분산 공식이 곧바로 나온다.

$$\mathrm{Var}(y_{ab}) = 2A^2\left[1-\exp\left(-\frac{d_{ab}^2}{2\ell^2}\right)\right] \qquad (11.11)$$

$$\sqrt{\mathrm{Var}(y_{ab})} \simeq A\frac{d_{ab}}{\ell} \quad \left(d_{ab}\ll\ell\right), \qquad \sqrt{\mathrm{Var}(y_{ab})} \to \sqrt{2}A \quad \left(d_{ab}\gg\ell\right) \qquad (11.12)$$

그림 46에서 작은 베이스와의 차이 억제가 왼쪽에 표시되고 모델의 시간 스트립이 오른쪽에 표시됩니다. 그림의 수평 축에 있는 ℓ_c라는 지정은 텍스트에서 사용되는 ℓ의 동일한 값을 의미하며 여기에는 별도의 두 번째 공간 척도가 없습니다.

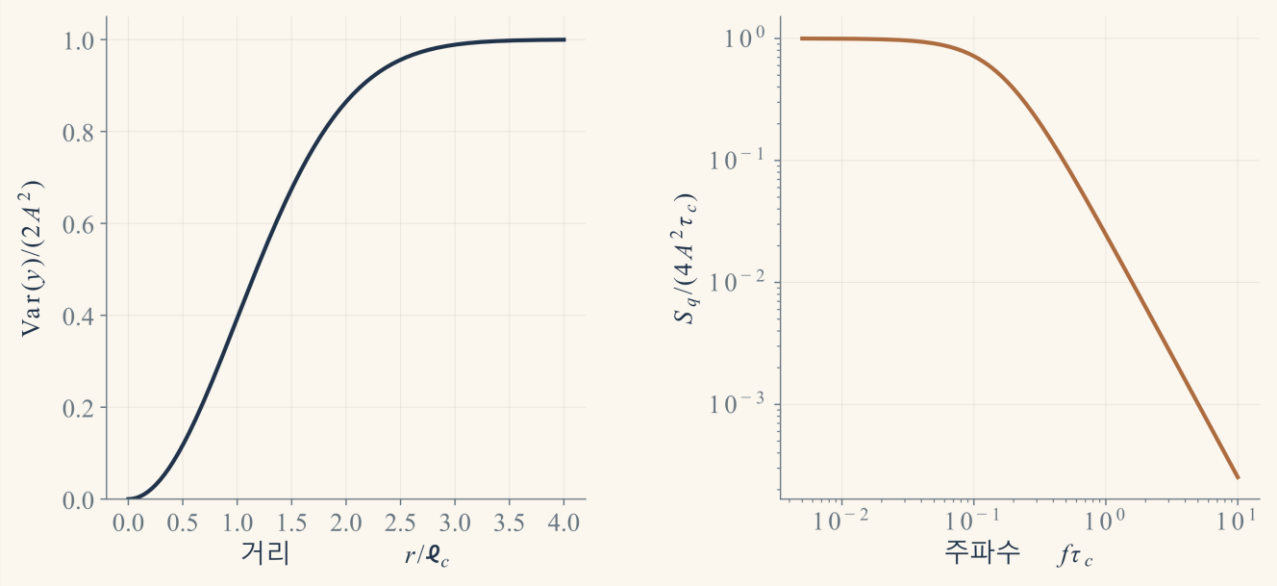


그림 46. 선택한 공분산의 공간 부분과 시간 부분. 왼쪽은 두 시계 차이의 분산을 2A²로 정규화한 값이며, 오른쪽은 하나의 q의 정규화된 로런츠 스펙트럼이다. 그림에서는 본문의 표기에 대해 ℓ_c = ℓ이다.

하나의 물리적 해석과 그 한계

일관된 시계 및 중력계 신호에도 통상적인 원인이 있을 수 있다. 움직이는 질량은 퍼텐셜 −GM/|x − x_s(t)|를 만든다. 그 차이와 기울기가 같은 준정적 계수로 두 채널에 들어간다. 따라서 이런 연결망의 첫 물리적 결과는 공통 장의 추정이며 그 장의 기원은 따로 확립해야 한다. 압력과 지지대 운동, 가까운 질량 분포의 보조 측정도 과학 실험의 일부가 된다.

공간적 가우스 템플릿의 경우, 준정적 뉴턴 해석이 명시적으로 구성될 수 있다. 선택된 시스템에서 우리는 포아송 방정식이 만족되도록 양의 배경 분포 주위에 작은 밀도 변동을 설정했습니다. 그런 다음

$$\delta\rho(\mathbf{x},t) = \frac{c^2}{4\pi G}\nabla^2 q(\mathbf{x},t), \qquad P_{\delta\rho}(\mathbf{k},f) = \frac{c^4 k^4}{\left(4\pi G\right)^2} P_q(\mathbf{k},f) \tag{11.13}$$

스펙트럼의 양성은 유지된다. 세 공간 차원에서 가우스 커널은 제곱평균제곱근 밀도 $c^2\sqrt{15}\,A/(4\pi G\ell^2)$를 준다. 아래 수치 예에서는 4,15 kg/m³이다. 이 해석에 필요한 분포된 물질 배경의 통계를 특징짓는 값이며 측정 밀도나 존재 증명이 아니다. 국소적으로 음인

δρ는 배경 밀도보다 작음을 뜻한다. 가우스 법칙은 작은 요동의 근사로 남는다. 무한한 꼬리를 음의 전체 질량의 문자 그대로의 모형으로 여겨서는 안 된다.

이런 장은 원천이 없는 영역에서 엄밀한 조화 퍼텐셜이 아니다. ∇²q는 보통 영이 아니다. 따라서 모형을 바꾸지 않고 주변이 진공이라는 가정과 이 물질적 설명을 동시에 채택할 수는 없다. 실제 배경에는 물질의 운동 법칙, 질량 보존, 스펙트럼 측정도 필요하다. 관계식 (11.13)은 원천과 퍼텐셜의 정적 연결을 완성하지만 원천의 유체역학이나 탄성학을 대신하지 않는다.

지수 시간 공분산은 제로 타임 시프트에서 꼬임이 있는 프로세스에 해당합니다. 제한된 대역의 스펙트럼 패턴에 적합하지만 모든 주파수에서 완전히 부드러운 메트릭은 추가적인 자외선 설명이 필요합니다. 여기서 작동 신호는 걸러진다; 물리적 소스를 구성할 때, 고주파 스펙트럼은 실험 대역 위에서 부드럽게 차단되어야 한다. 조건 2πfℓ/c ≪ 1은 준정적 근사의 사용을 허용한다. 노이즈의 공간적 상관성은 제어된 효과의 전송 속도를 결정하지 않는다.

확률적 반고전 중력에서는 계량 응답의 무작위 부분을 에너지–운동량 요동 및 아인슈타인–랑주뱅 방정식과 연결한다. 더 깊은 동역학적 설정의 예이며 여기서 선택한 가우스 커널의 기원을 유도한 것은 아니다. [43] 이 장에서는 기준계와 대역, 퍼텐셜이 검증할 유효 모형이라는 지위를 고정하면 충분하다.

주파수 차이와 기울기의 스펙트럼

주파수 영역에서 선택한 시간 법칙은 로런츠 스펙트럼을 준다. 아래에서는 단측 스펙트럼 밀도를 쓴다. 음이 아닌 주파수 전체의 적분이 총분산이다. 따라서 분자의 계수 4는 추가 물리가 아니라 규격화 규약에 따른다. 무차원 q의 스펙트럼 밀도 단위는 헤르츠의 역수이다. 점 i와 j 사이 공간 커널을 K_ij로 나타내면 임의의 두 시계 비교의 상호 스펙트럼을 얻을 수 있다. 네 항은 네 점 쌍에 대응한다. 두 비교에 모두 참여하는 시계는 공통 장비 오차도 만든다. 이 오차는 가정한 장과 따로 고려해야 한다.

$$S_q(r,f)=\frac{4A^2\tau_c}{1+\left(2\pi f\tau_c\right)^2}\exp\left(-\frac{r^2}{2\ell^2}\right),\qquad K_{ij}=e^{-d_{ij}^2/\left(2\ell^2\right)},\qquad f\ge 0 \tag{11.14}$$

$$S_{y_{ab}y_{cd}}(f)=\frac{4A^2\tau_c}{1+\left(2\pi f\tau_c\right)^2}\left(K_{ac}-K_{ad}-K_{bc}+K_{bd}\right) \tag{11.15}$$

중력 측정 예측은 같은 커널을 공간 미분하여 얻는다. r = x − x′로 두자. 가속도에는 각각 미분 하나가 있으므로 공분산에는 두 점 좌표에 대한 혼합 이차 미분이 들어간다. 분리 거리가 영일 때 한 성분의 제곱평균제곱근은 c²A/ℓ다. 영이 아닌 기선에서는 공분산이 거리뿐 아니라 측정 성분의 배향에도 의존한다. 따라서 종방향과 횡방향 경로는 다른 정보를 담는다. 이 차이는 장이 기울기로 주어지는 성질에서 나온다. 독립적인 임의 각도 함수를 맞춤에 추가해서는 안 된다. 그러면 두 측정의 공통 물리적 의미를 잃는다.

$$\langle \delta a_i(\mathbf{x},t)\delta a_j\left(\mathbf{x}',t\right)\rangle = c^4A^2\left(\frac{\delta_{ij}}{\ell^2}-\frac{r_ir_j}{\ell^4}\right)e^{-r^2/\left(2\ell^2\right)},\qquad a_{i,\mathrm{rms}}=\frac{c^2A}{\ell} \tag{11.16}$$

짧은 기선에서는 퍼텐셜 차이가 대략 미분과 거리의 곱이다. 여기서 실용적 검증을 얻는다. 기선을 따른 시계 신호는 알려진 계수 d/c²와 선택한 부호를 통해 가속도 투영에 대응해야 한다. 상대 진폭을 정하므로 스펙트럼 봉우리 둘의 일치보다 유용하다. 그러나 d가 ℓ보다 훨씬 작고 시간 필터가 같으며 두 장비의 응답 모형이 올바를 때만 성립한다. 한 채널은 일 분 평균을 내고 다른 채널은 빠른 진동을 기록했다면 전체 제곱평균제곱근을 직접 비교할 수 없다. 단순한 차원 검증으로 측정 대역 불일치가 고쳐지지는 않는다.

$$y_{ab}\simeq -\frac{\delta a_{\parallel}d_{ab}}{c^2}\qquad \left(d_{ab}\ll \ell\right) \tag{11.17}$$

서로 다른 두 장비의 교차스펙트럼

S₀(f) = 4A²τ_c/[1 + (2πfτ_c)²]와 K(x,z) = exp[−|x − z|²/(2ℓ²)]를 도입한다. 스펙트럼 진폭에는 exp(−i2πft)를 곱하며 상호 스펙트럼은 S_uv = ⟨ũṽ*⟩의 순서로 정의한다. 혼합

채널은 같은 커널을 한 번 미분해 얻는다. ∂K(x,z)/∂z_i = (x_i − z_i)K/ℓ²이므로 가속도의 부호를 명시적으로 유지한다.

$$S_{y_{ab},a_i(\mathbf{z})}(f) = -\frac{c^2 S_0(f)}{\ell^2}\left[(x_a - z)_i K(\mathbf{x}_a, \mathbf{z}) - (x_b - z)_i K(\mathbf{x}_b, \mathbf{z})\right] \qquad (11.18)$$

식 (11.18)의 단위는 (m/s²)/Hz이다. 첫 채널은 무차원이고 둘째는 가속도이다. 가속도 자체 스펙트럼의 단위는 (m/s²)²/Hz이다. 공동 행렬을 구성할 때 이 서로 다른 차원을 유지해야 한다. 수치 역행렬 계산에는 각 채널의 특징적 잡음으로 규격화하면 편리하다.

시계 a를 x = +d/2에 놓고, 시계 b을 x = −d/2에 놓고, 중력계를 x = 0에 놓습니다. 그것의 긍정적인 방향은 긍정적인 x와 일치한다. 그런 다음 교차 스펙트럼의 음의 부호는 양의 전위차가 반대 방향으로 가속도를 지시한다는 것을 의미합니다. 행렬의 세 가지 신호 요소는 간단한 형태를 취합니다.

$$S_{yy} = 2S_0\left(1 - e^{-d^2/\left(2\ell^2\right)}\right), \qquad S_{aa} = \frac{c^4 S_0}{\ell^2}, \qquad S_{ya} = -\frac{c^2 S_0 d}{\ell^2} e^{-d^2/\left(8\ell^2\right)} \qquad (11.19)$$

$$\gamma^2 = \frac{|S_{ya}|^2}{S_{yy} S_{aa}} = \frac{x}{\sinh x}, \qquad x = \frac{d^2}{4\ell^2} \qquad (11.20)$$

선택한 공분산의 귀결이다. d/ℓ → 0이면 결맞음은 일로 가지만 시계 차이의 분산도 동시에 영으로 간다. d/ℓ ≫ 1이면 시계들은 거의 독립된 퍼텐셜을 보고 중앙 중력계는 양쪽과 모두 약하게 연결된다. 두 극한 사이에서는 γ²의 최대값 하나가 아니라 잡음을 고려해 기선을 골라야 한다. d = ℓ에서 이상적 결맞음은 0,98966이다.

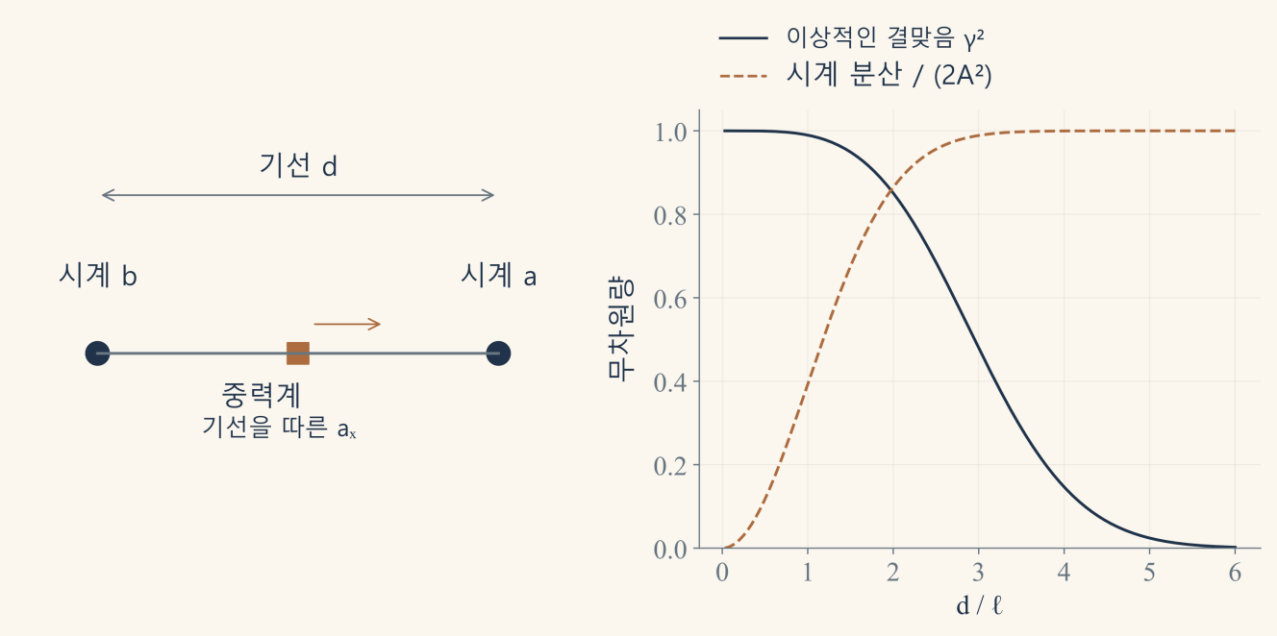


그림 47. 두 시계와 가운데 중력계. 가속도의 양의 방향은 b에서 a로 향한다. 오른쪽은 이상적인 신호 결맞음과 시계 경로의 상대 분산을 나타낸다. 짧은 기선에서의 높은 결맞음에는 측정 차이의 작은 진폭이 동반된다.

그림 47은 여러 기선의 측정이 유용한 이유를 설명한다. 공간적 장파장 영역에서 신호의 비는 주로 기울기를 정하고 상관 길이 자체에 대한 정보는 약하다. d ≈ ℓ 근처와 더 긴 기선에서 측정하면 스펙트럼 행렬의 형태가 바뀌어 A와 ℓ을 분리하는 데 도움이 된다. 거의 영인 기선에서 시간만 늘려서는 풀 수 없는 매개변수 추정 문제다.

공통 측정 대역

이론 스펙트럼은 질의 시간 창과 전송선, 처리 알고리즘을 거친 뒤에만 관측된다. 시계는 개별 주기에서 평균 위상이나 주파수를 측정할 수 있다. 중력계에는 고유한 주파수 민감도와 기계적 공명 또는 원자 펄스열이 있다. 공동 분석 전에 각 채널에 진폭과 위상을 포함한 복소 전달함수 H(f)를 대응시킨다. 이 함수들을 고려해 공통 대역으로 옮긴다. 응답이 불확실하거나 거의 영인 주파수를 무분별한 나눗셈으로 복원할 수 없다. 잡음을 증폭하고 정보가 없는 곳에 구조가 있는 듯한 인상을 만들기 때문이다.

$$S_{ab}^{\mathrm{obs}}(f) = H_a(f)H_b^{*}(f)S_{ab}^{\mathrm{field}}(f) + S_{ab}^{\mathrm{noise}}(f) \qquad (11.21)$$

주파수 차이의 준정적 공식에는 특히 장 변화의 특징적 시간이 기선의 빛 전파 시간보다 훨씬 길어야 한다는 조건이 있다. 사용하는 대역에서 곱 2πfd/c가 작아야 한다. 변화가 더 빠르면 신호 경로의 기여와 선 양 끝의 운동, 비교하는 사건의 선택을 모두 계산해야 한다. 자동으로 추가 잡음에 포함할 수 있는 보정이 아니다. 물리적 예측 자체를 바꾼다. 느린 영역에서도 플랫폼 운동과 높이 변화, 선의 열팽창, 주파수 전달의 잔여 오차가 신호 일부를 모사할 수 있다. 따라서 시간과 기하 구조, 교정을 주요 자료와 함께 기록해야 한다.

f_min과 f_max 사이 이상적 직사각형 주파수 창에서 선택한 로런츠 과정의 분산 비율은 아크탄젠트 차이로 표현된다. 예비 예산에 편리한 공식이다. 가정한 장의 어느 부분을 장비가 실제로 보는지 곧바로 알려 준다. τ_c가 실험 시간보다 매우 길면 과정이 거의 일정한 표류처럼 보인다. 질의 간격보다 너무 짧으면 대부분의 파워가 대역 밖에 남으며 필터가 불충분할 때 주파수 겹침을 만들 수 있다. 따라서 보이는 신호의 부재는 τ_c 구간과 자료 선택 모형을 명시해야만 의미가 있다.

$$B\left(f_{\min}, f_{\max}\right) = \frac{2}{\pi}\left[\arctan\left(2\pi f_{\max}\tau_c\right) - \arctan\left(2\pi f_{\min}\tau_c\right)\right], \qquad \mathrm{Var}_{\mathrm{band}}(q) = A^2 B \tag{11.22}$$

공통 교란과 시계 교체를 포함한 합성 실험

ℓ = 1000 m, τ_c = 10 s로 알려진, 완전히 정해진 한 사례를 보자. 기준 거리는 1000 m, 스펙트럼 셀의 주파수는 f₀ = 0,01 Hz, 입력 진폭은 A = 10⁻²⁰이다. 시계 출력 잡음은 n_y = 10⁻¹⁸/√Hz, 중력계 잡음은 n_a = 10⁻⁷ m/s²/√Hz로 정한다. 이 값들은 계산의 입력 조건이다. 이런 정확도를 가진 네트워크를 실제로 만들었다는 보고가 아니다.

도입한 A는 한 성분의 전체 제곱평균제곱근 가속도 8,99 × 10⁻⁷ m/s²에 해당한다. 이는 계산 실험을 위해 선택한 값이지, 새 우주론적 장에 대해 확립된 허용 영역이 아니다. 그 장이 기존의 모든 측정과 양립한다고 여기서 주장하지 않는다. 위의 뉴턴적 해석은 이 패턴에 얼마나 강한 물질 배경이 수반될 수 있는지 보여 준다.

시계 주파수는 일 초 동안 평균하며 시간 표지는 창 중앙에 둔다. H_y = sinc(πfT_y)이고 sinc(z) = sin(z)/z이다. 중력계에는 f_c = 0,1 Hz와 채택한 푸리에 진폭 부호를 갖는 교정된

단일극 함수 H_a = 1/(1 − if/f_c)를 고른다. 출력 잡음에 양의 공통 상관 ρ_n = 0,3을 포함한다. 각 주파수에서 관측 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{S}^{\mathrm{obs}} = \mathbf{H}\mathbf{S}^{\mathrm{field}}\mathbf{H}^{\dagger} + \mathbf{N}, \qquad \mathbf{H} = \mathrm{diag}\left(H_y, H_a\right), \tag{11.23}$$

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_y^2 & \rho_n n_y n_a \\ \rho_n n_y n_a & n_a^2 \end{pmatrix}, \qquad |\rho_n| \le 1 \tag{11.24}$$

교란 행렬 (11.24)는 양의 준정부호이다. 필터링도 신호 행렬의 양성을 보존하므로 규격화한 합의 촐레스키 분해로 복소 가우스 관측을 생성할 수 있다. 프로그램은 seed 20261113을 사용하며 구성마다 독립 스펙트럼 실현 4096개를 만든다. 얻은 값은 공분산이 알려진 합성 자료이다.

둘째 구성에서는 시계들을 교환하고 중력계와 전자 채널은 유지한다. 식별자 a와 b는 장비에 붙는다. 교환하면 장의 S_ya는 부호가 바뀌지만 선택한 공통 전자 교란은 그대로다. 이런 교란 거동은 프로토콜에서 검증할 가정이다. 교환이 전자회로 자체나 진동과의 결합도 바꾸면 그 변화의 별도 모형이 필요하다.

그림 48은 시계 식별자와 중력계의 고정 방향, 교환 때 전자 채널을 유지하는 방식을 보여 준다.

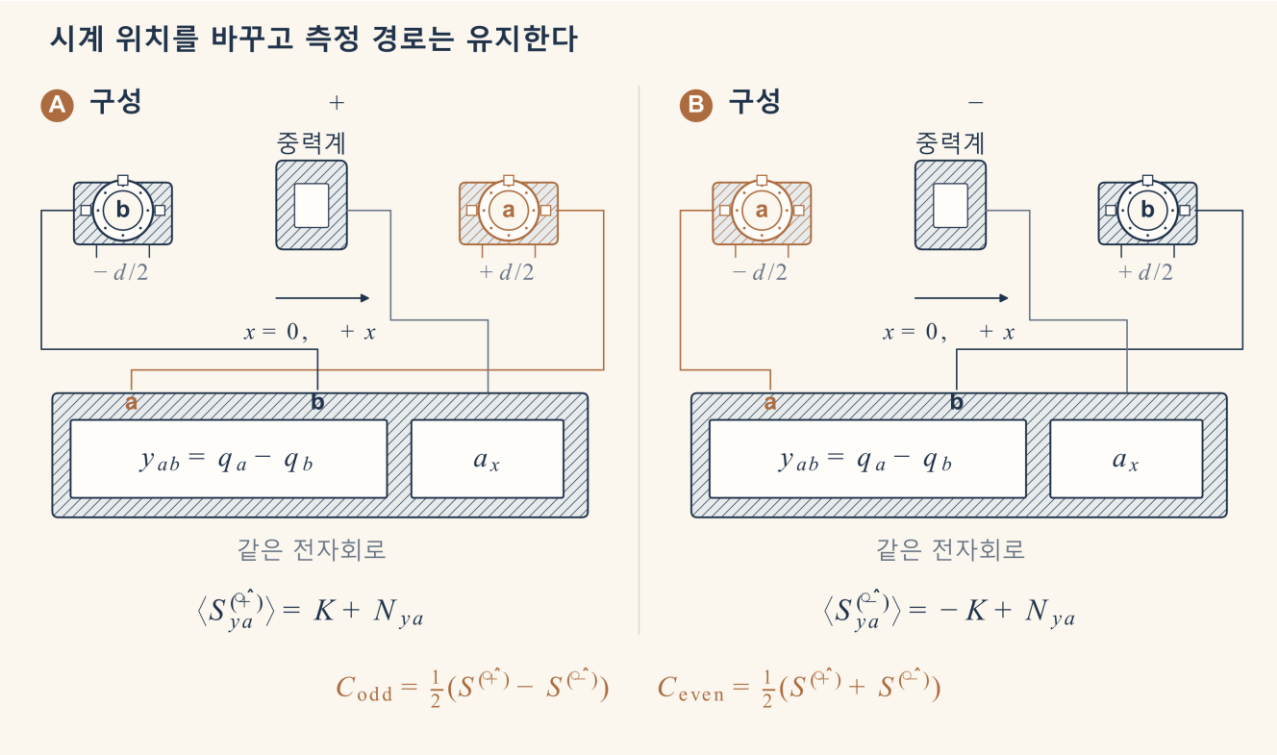


그림 48. 첫 구성의 시계 a는 +d/2, 시계 b는 −d/2에 있다. 두 번째에서는 물리적 위치만 바꾼다. 전자적 비교는 y_ab = q_a − q_b의 정의를 유지하며 중력계도 중심에서 양의 축을 바꾸지 않는다. K는 필터링한 장의 교차스펙트럼이다. 선택한 공통 전자 교란 N_ya는 이 개입에 대해 짝대칭이라고 가정한다. 이는 구체적인 실험에서 검증해야 할 전제다. 통상적인 공간 중력 기여도 부호를 바꾸므로 자동으로 배제되지는 않는다.

$$C_{\text{odd}} = \frac{\hat{S}_{ya}^{(+)} - \hat{S}_{ya}^{(-)}}{2}, \qquad C_{\text{even}} = \frac{\hat{S}_{ya}^{(+)} + \hat{S}_{ya}^{(-)}}{2} \tag{11.25}$$

평균적으로 홀대칭 성분은 장의 H_yH_a* S_ya를, 짝대칭 성분은 공통 교란 N_ya를 포함한다. K = H_yH_a* S_ya(A = 1)로 두자. 음이 아닌 값으로 제한하기 전의 진폭 제곱 추정값은 Re(K* C_odd)/|K|²이다. 추정 편향을 검증할 때는 잡음 자료의 음의 값도 보존해야 한다. 물리적 한계를 제시할 때는 경계 A² ≥ 0을 따로 고려한다.

물리량	이 계산의 결과
이상적인 신호 γ²	0,98966

물리량	이 계산의 결과
첫 번째 구성에서 관찰된 γ^2	0,001678
주입된 A^2	$1{,}0000 \times 10^{-40}$
복원한 A^2	$1{,}2252 \times 10^{-40}$
주어진 공분산에 따른 A^2의 표준오차	$1{,}6575 \times 10^{-41}$
복원한 A	$1{,}1069 \times 10^{-20}$
공통 교란만 있는 별도 실험의 A^2 추정값	영에서 표준오차의 0,157배

관측 결맞음이 거의 590배 줄어드는 것은 시계 잡음의 역할을 보여 준다. 그래도 정한 수의 독립 실현을 누적하면 홀수 교차스펙트럼을 분리할 수 있다. 공칭 구간 $A^2 \pm 2\sigma$는 $[8{,}94 \times 10^{-41};\ 1{,}56 \times 10^{-40}]$이며 입력값을 포함한다. ℓ와 τ_c, 전달함수, 공분산을 고정한 계산이다. 이를 함께 맞추면 불확실성이 넓어진다.

대조 실행에서는 장을 끄고 공통 교란을 유지했다. 짝대칭 성분은 예상값 $3{,}000 \times 10^{-26}$에 대해 $3{,}102 \times 10^{-26}$ $(m/s^2)/Hz$를 주며 홀대칭 A^2 추정값은 영에서 표준오차의 0,157배만 벗어난다. 이 실행 하나는 해당 개입의 논리를 검증한다. 잘못된 판단 빈도는 새 잡음과 장치에 실제 존재하는 공통 원인 부류를 사용한 별도 계열로 정해야 한다.

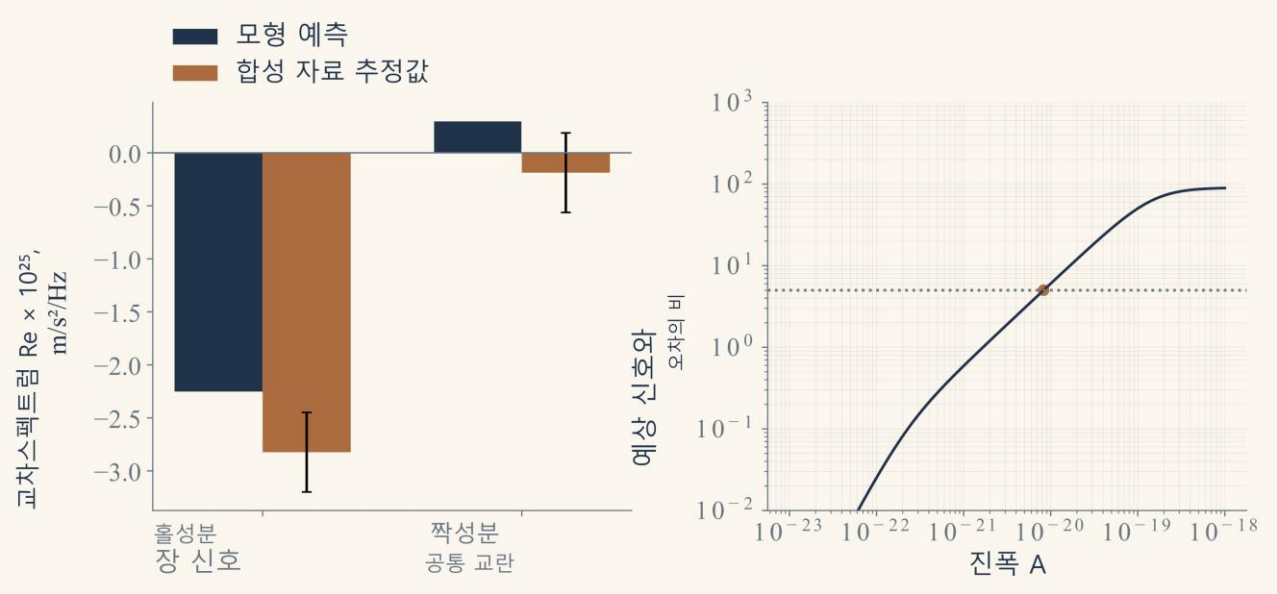


그림 49. 합성 공동 실험. 왼쪽은 교차스펙트럼 실수부의 예상값과 얻은 값이며, 선분은 주어진 모형에서 표준오차 하나를 나타낸다. 오른쪽은 다른 매개변수를 고정하고 A를 바꿀 때 홀수 장 신호와 그 오차의 예상 비다.

그림 49의 오른쪽 패널에서 기대 신호 대 오차의 비가 다섯에 이르는 값은 $A \approx 8{,}28 \times 10^{-21}$이다. 이는 고정한 모양에 대한 조건부 감도 문턱이며 보편적인 발견 유의성이 아니다. $A = 10^{-20}$에서는 기대 비가 6,03이다. 독립적인 스펙트럼 셀의 유효 폭이 0,001 Hz이면 단순 추정 $T \approx 2M/\Delta f$는 중단 시간을 빼고도 두 구성에 약 94,8일을 준다. 이 기간은 곧바로 간섭과 교정의 안정성 요건을 부과한다.

시계 교환은 장과 특정한 불변 전자 결합을 구별한다. 통상적인 공간 중력장도 가정한 장과 함께 부호가 바뀐다. 따라서 실험은 공통 기울기 신호를 확립하고 통계적 형태를 검증하지만 양자적 기원을 자동으로 정하지 않는다. 이를 위해서는 발생원에 대한 외부 정보와 추가 구성이 필요하다.

장을 장비의 공통 원인과 구별하는 방법

같은 탁자 위 두 장비에는 상관관계의 공통 원인이 많다. 지지대와 전원, 온도, 기준 발진기, 소프트웨어 처리를 공유한다. 독립 측정기도 질량 운동과 압력 변화, 물의 재분포 같은 통상적인 중력 섭동 하나에 함께 반응할 수 있다. 따라서 실제 연결망에는 보조 채널과 제어된 구성 변경이 필요하다. 지점 간 시계 교환과 전자회로 일부를 유지한 기선

변경, 서로 다른 시계 전이의 비교, 알려진 신호의 맹검 주입이 유용하다. 각 개입은 가정한 장과 특정 교란이 서로 다른 예측을 준다는 이유로 선택한다.

정의상 성립하는 검증은 피해야 한다. 같은 국소 주파수들에서 세 상대 주파수를 계산했다면 합 y_ab + y_bc + y_ca는 대수적으로 영이다. 이런 삼각형이 닫힌다고 새 기하 구조가 확인되지는 않는다. 전달 채널이 실제 독립적일 경우 그 일관성을 검증할 수는 있지만 결과의 의미는 장비에 관한 것이다. 마찬가지로 모든 쌍의 높은 상관관계도 보편적 장의 독립 증거가 아니다. 공통 기준 오차도 같은 낮은 랭크의 행렬을 만들 수 있다. 기하학적 결론에는 변하지 않은 공통 전자회로로 재현할 수 없는 공간 재배치에 대한 반응이 필요하다.

완전한 물리적 검색의 결과는 배경 매개변수와 함께 유효한 A, ℓ 및 τ_c의 영역을 포함해야 합니다. 완료된 예제는 알려진 ℓ 및 τ_c을 사용하여 이 문제의 한 섹션을 처리하는 방법을 보여줍니다. 다른 매개변수를 복원하려면 여러 개의 베이스와 주파수 대역이 필요하며, 곡률을 추론하려면 조석 제어가 필요합니다. 서로 다른 채널이 호환되지 않는 매개 변수를 요구하는 경우 선택한 커널이 거부됩니다. 그들이 동의한다면, 다음 연구 대상은 공통 분야의 원천이됩니다. 간섭계 장에서 동일한 원칙이 완성 된 광 경로에 적용됩니다.

제12장 간섭계가 들을 수 있는 것

빛은 완결된 경로를 측정한다

간섭계는 서로 다른 경로를 지나 검출기에서 다시 만난 광파의 위상을 비교한다. 흔히 매우 정밀한 자로 묘사된다. 공간 연구에서는 첫 근사에서만 유용한 그림이다. 판독값은 거울 운동과 빛의 전파, 위상 기준, 판독 방식에 의존한다. 이론이 계량을 바꾸면 이 요소들이 함께 일관되게 바뀔 수 있다. 먼저 공간이 일정량 늘었다고 선언한 뒤 계산 없이 같은 양을 장비 출력에 부여할 수 없다. 어떤 사건들을 비교하며 어떤 물리적 위상이 측정 지점으로 돌아오는지 정해야 한다.

통상적인 영역에서는 두 팔의 길이 차이의 작은 변화가 위상 이동과 연결된다. 단순 왕복에서 계수에는 4π/λ_laser가 들어가며, λ_laser는 레이저 파장이다. 그러나 이 식은 특정한 기하학과 기계적 변화의 낮은 주파수에 적용된다. 공진기가 있으면 빛이 팔을 여러 번 지나며, 빠른 섭동에서는 경로의 서로 다른 부분이 서로 다른 장 값을 겪는다. 전달함수에는 주파수 영점과 위상 지연이 생긴다. 광출력을 높이면 잡음 예산의 일부는 개선되지만, 선택한 구성이 감응하지 않는 주파수의 물리적 신호가 되살아나지는 않는다.

$$\delta\varphi \simeq \frac{4\pi}{\lambda_{\mathrm{laser}}}\,\delta L_{\mathrm{diff}} \qquad \text{단순한 저주파 이중 통과 조건에서} \qquad (12.1)$$

따라서, 기하학적 프로브를 설계할 때, 교란 모델이 먼저 지정되고, 그 다음에 전체 응답이 계산되고, 그 후에 팔 길이, 주파수 대역 및 기록 방법이 선택된다. 일부 경우에, 넓은 대역폭은 스펙트럼의 형상을 구별하는데 최적이다. 다른 경우, 최대 예상 신호의 좁은 영역이 더 중요합니다. 2026의 Nature Communications에 실린 Sharmila, Vermeulen 및 Datta의 연구는 주파수 및 간섭계 출력의 척도 서명에 대한 추정 변동의 여러 클래스와 체계적으로 관련이 있습니다. 그것은 그러한 시퀀스의 생산성을 확인하지만, 공간의 양자 구조의 발견을보고하지 않습니다. [33]

좌표가 신호가 되어서는 안 된다

약하게 섭동된 공간의 계량은 배경 계량과 작은 장 h_μν의 합으로 쓸 수 있다. 그러나 h의 성분 자체는 좌표 선택에 의존한다. 작은 좌표 변환에서 변환 함수의 미분만큼 바뀐다. 연구자가 좌표 이름만 바꿨는데 계산 신호가 달라진다면 장비 판독값에 대응하는 신호가 아니다. 계산에서 빛의 궤적과 거울의 세계선, 위상 비교 사건을 일관되게 변환해야 한다. 불변 결과는 임의로 고른 섭동 성분이 아니라 물리적으로 정한 위상이나 고유시간이다. 공간의 특이한 거동을 스칼라 함수 하나로 나타내는 가설에서 특히 중요한 조건이다.

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu \tag{12.2}$$

단순한 예는 잘못된 예측을 얻기 얼마나 쉬운지 보여 준다. 장파장 근사에서 팔 길이가 같은 표준 간섭계는 공간 섭동의 특정 텐서 조합에 민감하다. 팔의 단위 방향을 u와 v로 쓰면 기하학적 텐서는 u_i u_j와 v_i v_j 차이의 절반이다. 이 텐서의 대각합은 영이다. 따라서 공간 길이의 순수하고 동일한 등방 변형은 이런 차동 조합에서 상쇄된다. 모든 스칼라장 검출의 보편적 금지는 아니다. 계량의 다른 성분과 거울 운동, 다른 팔 길이, 유한 파장에는 별도 계산이 필요하다. 그래도 스칼라 잡음을 팔 길이 차이와 자동으로 동일시하는 일은 이미 틀린다.

$$D^{ij} = \frac{1}{2}\left(u^i u^j - v^i v^j\right), \qquad D^{ij}\delta_{ij} = 0, \qquad h_{ij} \propto \delta_{ij} \Rightarrow D^{ij}h_{ij} = 0 \tag{12.3}$$

일반 선형 모형에서는 각 센서 출력을 장과 응답 커널의 합성곱으로 나타내면 편리하다. 커널에는 공간 경로와 지연, 편광 민감도, 선택한 판독 단위로의 환산이 들어간다. 이런 커널 둘을 장의 상관관계에 적용하면 센서들의 교차스펙트럼 밀도를 얻는다. 아래의 개략적 식은 계산 구조를 강조하며 선택한 이론의 구체적 식을 대신하지 않는다. 그 식이 나오기 전에는 장비가 진폭 h에 대한 민감도를 달성했다고 주장할 수 없다. h와 측정 전압의 관계 자체도 아직 정해지지 않을 수 있기 때문이다.

$$s_A(f) = \int d^3k\, R_A^{\mu\nu}(\mathbf{k}, f)\, h_{\mu\nu}(\mathbf{k}, f) + n_A(f) \tag{12.4}$$

횡파의 완전한 대조 예

완결된 계산을 위해 알려진 물리 모형인 선형 근사의 약한 평면 횡방향 무대각합 중력파를 골랐다. 계량 섭동을 위상으로 바꾸는 엄밀한 기준이다. 해당 대역에서 같은 텐서 부문으로 귀착되는 새 가설은 얻은 응답함수를 사용한다. 다른 장 구조의 가설에는 자체 계산이 필요하다. 이 대조 예 자체를 양자 기하의 새 메커니즘이라고 선언하지 않는다.

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \left[\delta_{ij} + e_{ij} h\left(t - \frac{\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}}{c}\right)\right] dx^i dx^j, \qquad (12.5)$$

벡터 n은 전파 방향, e_ij는 선택한 편광 텐서, h는 무차원 작은 진폭이다. 팔 길이가 같은 단순 간섭계의 팔은 단위벡터 u와 v 방향으로 길이 L을 갖는다. 빔 분할기는 원점, 먼 거울들은 점 Lu와 Lv에 있다. 횡방향 무대각합 좌표계에서는 초기 좌표속도가 영인 자유낙하 거울들이 일차 근사에서 이 좌표를 유지한다. 빔 분할기의 시간은 그 고유시간과 같다.

마지막 조건으로 양 끝의 운동 모형이 완성된다. 여기서 좌표가 고정된 거울에 임의로 정한 '늘어남'을 더하면 같은 효과를 두 번 센다. 거울을 단단히 붙잡거나 현가장치의 기계적 공명 영역에 들어가면 세계선이 바뀌므로 측정한 기계적 전달함수를 응답에 포함해야 한다. 이후에는 중요한 기계적 공명보다 높은 작업 대역의 자유 질량과 파브리–페로 공진기 없는 광학계를 고려한다.

t를 빛이 빔 분할기로 돌아오는 시각으로 두고 T = L/c, μ = n·u라 하자. ds² = 0에서 작은 추가 광행 시간은 교란되지 않은 광선을 따른 h_ij u_i u_j 적분의 절반을 c로 나눈 값이다. 왕로와 복로에서는 장 함수의 인수가 다르다.

$$I_-(t) = \int_0^L h\left(t - 2T + \frac{(1-\mu)\,l}{c}\right) dl, \qquad (12.6)$$

$$I_+(t) = \int_0^L h\left(t - T(1+\mu) + \frac{(1+\mu)\,l}{c}\right) dl, \qquad (12.7)$$

$$\delta T_u(t) = \frac{u^i e_{ij} u^j}{2c}\left[I_-(t) + I_+(t)\right] \qquad (12.8)$$

첫 적분에서 광자는 빔 분할기에서 출발하고 둘째에서는 먼 거울에서 출발한다. 이미 작은 h 안에서 궤적 자체의 보정은 다음 차수를 주므로 이 차수에서는 고려할 필요가 없다. 두 광선을 빔 분할기의 같은 사건으로 돌아온 뒤 비교하므로 완결된 측정의 결과이다. 전체 광행 시간으로 표현한 정확한 응답과 장파장 근사와의 차이는 라흐마노프와 로마노, 휠런의 원 연구에서 자세히 다룬다. [44]

간단한 간섭계의 폐쇄 광 경로와 단일 왕복의 세 가지 이벤트가 그림 50에 표시됩니다.

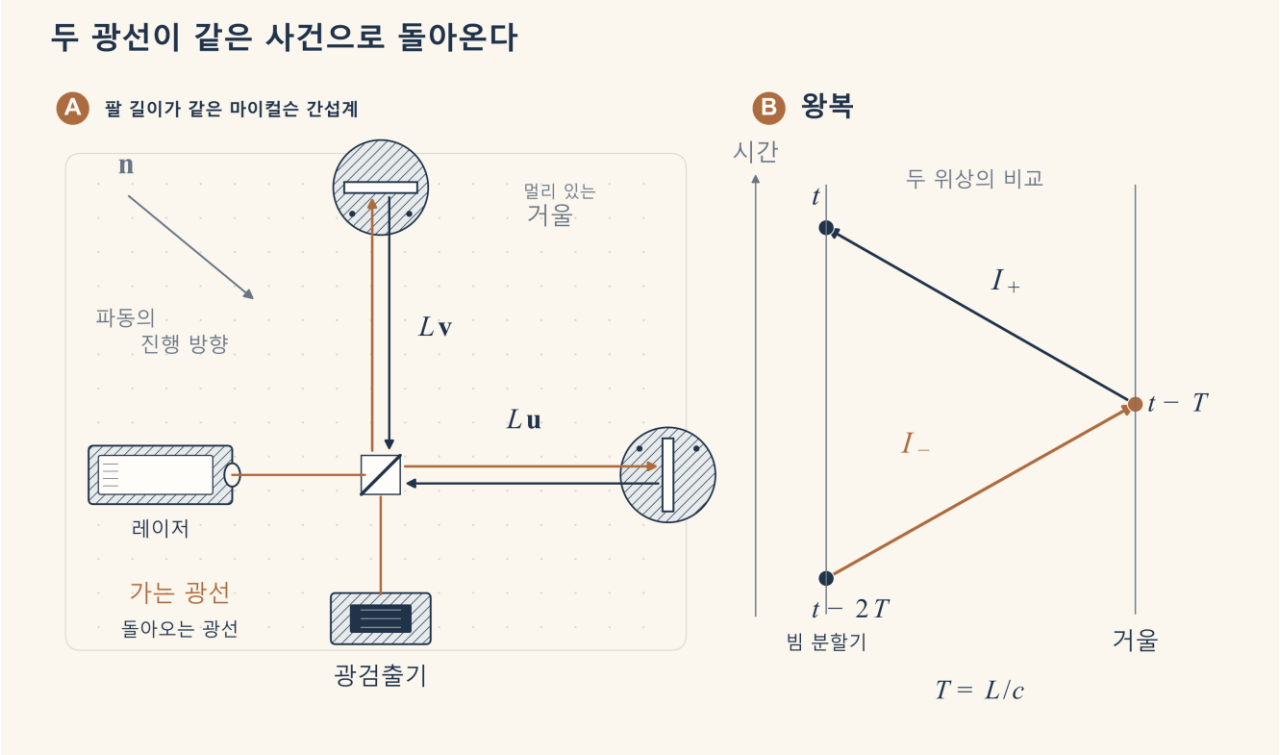


그림 50. 팔 길이가 같은 단순한 마이컬슨 간섭계에서 각 광선은 먼 거울까지 L, 되돌아오며 L을 지난다. 구릿빛과 파란 부분은 왕로와 복로를 구별하며 보기 쉽도록 약간 떨어뜨려 그렸다. 오른쪽은 출발과 반사, 공통 위상 비교 사건으로의 귀환을 정한다. 거울의 운동 조건은 선택한 TT 모형의 자유 질량에 해당한다. 파브리–페로 공진기는 없다. 비스듬한 파동에서는 I_-와 I_+를 따라 장의 서로 다른 인수를 적분에 유지하며 한 시점으로 대체하지 않는다.

주파수와 방향은 측정 응답에 들어간다

h(t) = h_ω exp(−iωt)를 대입하자. 적분 (12.6)과 (12.7)은 각각 유한 구간의 지수함수 적분이다. Ω = ωL/c와 sinc(z) = sin(z)/z를 도입하며 연속적으로 sinc(0) = 1로 둔다. 그러면 다음과 같다.

$$\delta T_u = T\left(u^i e_{ij} u^j\right) \mathcal{T}(\Omega, \mu) h_\omega e^{-i\omega t}, \qquad \mathcal{T} = \frac{t_- + t_+}{2}, \tag{12.9}$$

$$t_- = e^{i\Omega\left(3+\mu\right)/2} \operatorname{sinc} \frac{\Omega\left(1-\mu\right)}{2}, \qquad t_+ = e^{i\Omega\left(1+\mu\right)/2} \operatorname{sinc} \frac{\Omega\left(1+\mu\right)}{2} \tag{12.10}$$

양의 위상 인자는 경로의 장을 빛의 귀환보다 앞서 만났음을 반영한다. 부호는 채택한 exp(−iωt)에 해당한다. Ω → 0에서 두 인자 모두 일로 간다. 양의 위상 지연을 ω_laser(δT_u − δT_v)로 정의하자. 두 팔의 차이는 다음을 준다.

$$\widehat{\delta\varphi} = \frac{4\pi L}{\lambda_{\text{laser}}} \mathcal{F}(\omega, \mathbf{n}, e) h_\omega, \tag{12.11}$$

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2}\left[\left(u^i e_{ij} u^j\right) \mathcal{T}(\Omega, \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}) - \left(v^i e_{ij} v^j\right) \mathcal{T}(\Omega, \mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\right] \tag{12.12}$$

여기에는 빛의 경로와 텐서 민감도, 선택한 거울 운동을 반영했다. 함수 F는 무차원이다. 서로 직교하는 팔의 평면에 수직 입사하고 편광이 e_xx = 1, e_yy = −1이면 특히 단순한 형태로 줄어든다.

$$\mathcal{F}_\perp = e^{i\Omega} \operatorname{sinc}(\Omega), \qquad f_{\text{null},1} = \frac{c}{2L} \tag{12.13}$$

첫 영점은 전체 빛 경로의 서로 다른 부분이 서로 상쇄될 때 생긴다. L = 40 m에서는 3,7474 MHz다. 이 주파수에서 선택한 수직 평면파는 장 자체가 영이 아니어도 일차의 차동 위상을 만들지 않는다. 입사 방향을 기울이면 팔을 따른 위상이 바뀌므로 다른 방향의 영점과 진폭은 달라진다. 프로그램에서는 수직 입사 극한을 일반식과 대조한다. 계산 격자에서 무차원 진폭의 차이는 $4{,}1 \times 10^{-16}$을 넘지 않는다.

전달함수의 첫 영점이 생기는 메커니즘은 그림 51에서 전체 경로 기여들의 상쇄로 볼 수 있다.

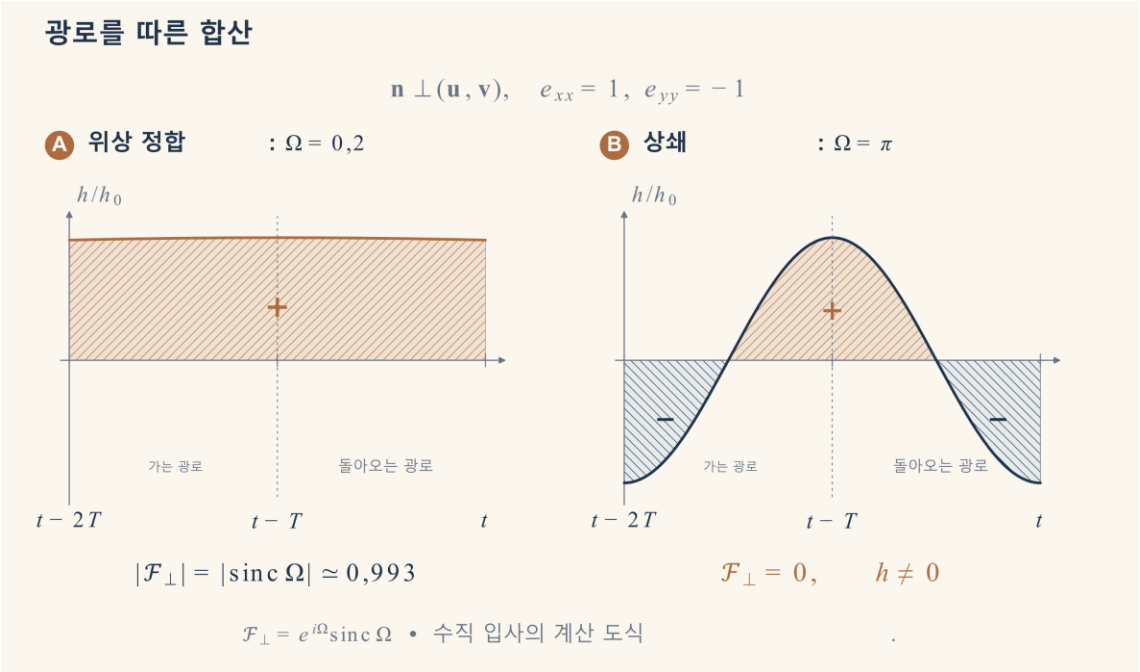


그림 51. 수직 입사하고 편광이 e_xx = 1, e_yy = −1인 조화 TT 파동의 실수 직교 성분을 나타냈다. 위상 영점은 전체 경로의 중간에 두었다. 피적분함수는 cos[Ω(t′ − t + T)/T]에 비례한다. Ω = 0,2에서는 기여들이 거의 맞지만, Ω = π에서는 양과 음의 면적이 서로 상쇄된다. 홀수 직교 성분도 적분하면 영이다. 따라서 장이 영이 아니어도 F⊥ = 0이다. 이는 정확한 계산을 나타낸 도식이며 검출기 기록이 아니다. 다른 방향에서는 영점이 달라진다.

진폭 h가 정한 하나의 방향과 편광을 갖는 정상 확률 과정이면 그 스펙트럼에 |4πLF/λ_laser|²을 곱해 S_φ로 옮긴다. 방향과 편광에 분포가 있으면 해당 적분이 필요하며 두 장치에는 그 사이 공간 위상도 필요하다. 따라서 계산한 응답은 정확히 명시한 모형 부문에 해당한다. 모든 스칼라 또는 '홀로그래피' 요동을 길이 잡음으로 바꾸는 보편적 변환기는 아니다.

단순한 간섭계의 예시 수치 예산

L = 40 m, 레이저 파장 1064 nm, 판독 광검출기 입력의 광출력 10 mW, 양자효율 η = 0,8로 두자. 직교 위상 성분의 이상적인 균형 판독에서 푸아송 잡음의 단측 위상 밀도를

S_φ,shot = 2/Ṅ 으로 정한다. 여기서 Ṅ = ηP/(hν)는 검출 광자의 유효 흐름이다. 출력은 판독에 해당하며 긴 팔이나 공진기 안의 출력과 자동으로 같지는 않다.

$$\dot{N} = \frac{\eta P \lambda_{\text{laser}}}{hc}, \qquad \sqrt{S_{\varphi,\text{shot}}} = \sqrt{\frac{2}{\dot{N}}} \qquad (12.14)$$

추가로 독립적인 기술적 및 전자적 위상 잡음을 10^{-8}과 3×10^{-9} rad/√Hz로 정한다. 고려하는 대역에서의 예시적 상수 수준이다. 제곱합의 제곱근으로 전체 위상 잡음을 얻는다. 실제 장비의 잡음에는 주파수 의존성과 상관관계가 있을 수 있으며 측정한 전달함수가 이 단순한 수치들을 대신한다.

전력 스펙트럼 밀도의 제곱근을 진폭 스펙트럼 밀도(ASD)이라고 합니다. 위상 노이즈의 경우, 그 단위는 헤르츠의 제곱근 당 라디안입니다. 아래 표에서 모든 노이즈 구성 요소는 이러한 값 중 하나로 줄어듭니다.

구성 요소	설정하거나 계산한 값
유효 광자 흐름	$4{,}2850 \times 10^{16}$ s^{-1}
푸아송 위상 ASD	$6{,}8318 \times 10^{-9}$ rad/√Hz
기술적 위상 ASD	$1{,}0000 \times 10^{-8}$ rad/√Hz
전자적 위상 ASD	$3{,}0000 \times 10^{-9}$ rad/√Hz
총 위상 ASD	$1{,}2477 \times 10^{-8}$ rad/√Hz
F = 1에서의 위상 계수	h 단위당 $4{,}7242 \times 10^{8}$ rad

$$\sqrt{S_h^{\text{equiv}}(f)} = \frac{\sqrt{S_{\varphi,\text{total}}(f)}}{\left| 4\pi L \mathcal{F}(f)/\lambda_{\text{laser}} \right|} \qquad (12.15)$$

수직 입사의 저주파 극한에서 등가 변형률 잡음은 $2{,}6411 \times 10^{-17}$/√Hz다. 1 MHz에서는 $2{,}9778 \times 10^{-17}$/√Hz, 3 MHz에서는 $1{,}1328 \times 10^{-16}$/√Hz, 10 MHz에서는 $2{,}5653 \times 10^{-16}$/√Hz다. 이는 장치에서 기록한 결과가 아니다. 위상 잡음이 그대로인데도 수치가 다른 것은 계산한 응답의 주파수 의존성 때문이다.

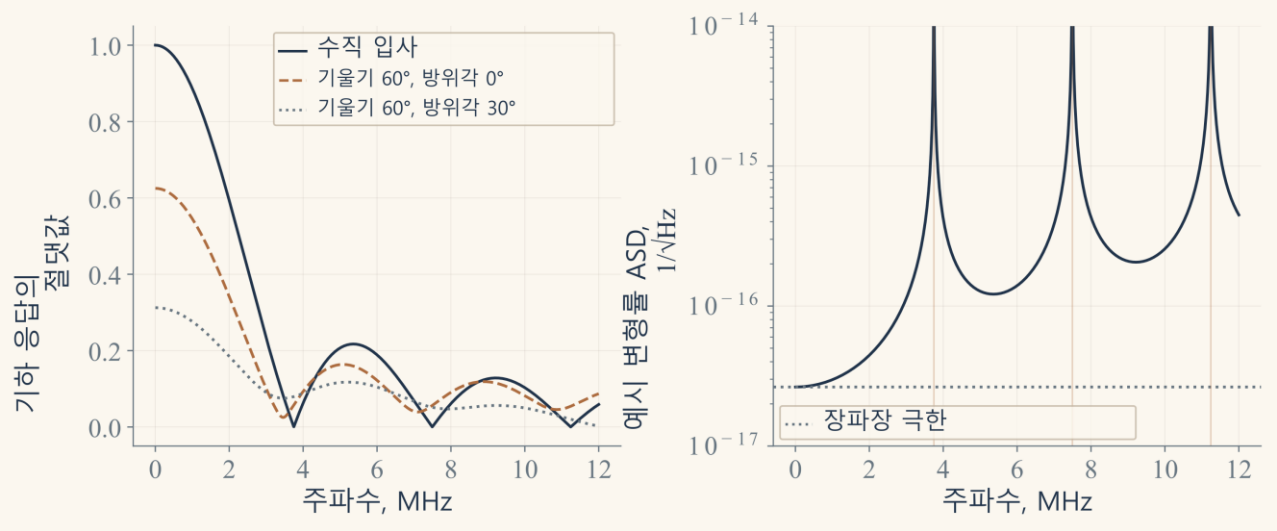


그림 52. 선택한 TT 편광에 대한 단순한 40미터 간섭계의 응답. 왼쪽은 수직 입사와 두 비스듬한 방향이며, 오른쪽은 주어진 위상 예산 아래 수직 입사의 등가 변형률 잡음이다. 세로선은 기하학적 영점을 나타낸다. 영점 근처에서는 위상을 h로 환산하는 일이 불안정해진다.

그림 52는 최적화에서 가설의 형태를 고려해야 하는 이유를 보여 준다. 출력을 늘리면 푸아송 기여는 줄지만 기하학적 영점이 사라지지는 않는다. 길이나 방향을 바꾸면 민감하지 않은 영역에는 없던 정보가 더해진다. 예시용 확률적 TT 장에서는 표를 이용해 대역의 스펙트럼을 정하고 예상 자료를 계산할 수 있다. 새로운 요동 기제에서는 먼저 그 장이 실제로 이 부문에 속하는지 검증해야 한다.

단순 예산에는 공진기와 복사압, 압축광, 복잡한 광학 경로의 기술적 손실이 들어 있지 않다. 해당 구현을 선택할 때 계산한 위상의 의미를 유지하며 추가해야 한다. 여기서는 선택한 수준에서 과제를 완성했다. 장과 빛의 경로, 자유로운 양 끝, 응답함수, 지정한 잡음 예의 모든 수치를 하나의 사슬로 연결했다.

상관관계는 수학적으로 허용되어야 한다

간섭계 연결망에서는 가정한 장이 일관된 신호를 만들 수 있고 장비 자체 잡음 일부는 독립적이라는 점이 유용하다. 그러나 원하는 상관관계를 임의로 표에 쓴다고 가능한 확률 과정을 기술하는 것은 아니다. 각 주파수에서 스펙트럼 행렬은 에르미트이고 양의 준정부호여야 한다. 두 채널에서는 익숙한 한계가 나온다. 상호 스펙트럼 절댓값의 제곱은 자체 스펙트럼들의 곱을 넘지 않는다. 모형이 이를 위반하면 측정 시간을 아무리 늘려도

물리적으로 의미 있어지지 않는다. 개별 쌍의 허용성이 전체 집합의 허용성을 보장하지 않으므로 연결망 전체 행렬의 양성을 검증해야 한다.

$$\mathbf{S}(f) = \mathbf{S}^{\dagger}(f), \qquad \mathbf{z}^{\dagger}\mathbf{S}(f)\mathbf{z} \geq 0, \qquad |S_{AB}(f)|^{2} \leq S_{AA}(f)S_{BB}(f) \tag{12.16}$$

알고리즘 검증에는 확실히 허용되는 출력 상관 형판을 쓸 수 있다. $S_0(f)$는 스칼라 과정의 음이 아닌 스펙트럼 밀도이고 공간 커널은 음의 거리 제곱을 지수로 갖는 함수라고 하자. 커널에 복소 응답계수 R_i와 그 켤레를 곱해도 양성은 유지된다. 맹검 디지털 주입과 독립 잡음 및 공통 잡음의 분리 평가, 기선 계획에 편리한 형판이다. 가능한 신호 통계를 기술하지만 물리적으로 일관된 계량 요동이 이런 신호를 만들 수 있음을 아직 증명하지는 않는다. 형판에서 중력 해석으로 옮기려면 앞서 다룬 빛 경로 계산이 필요하다.

$$S_{ij}^{\mathrm{template}}(f) = R_i(f)R_j^{*}(f)S_{0}(f)\exp\left(-\frac{d_{ij}^{2}}{2\ell_{c}^{2}}\right), \qquad S_{0}(f) \geq 0 \tag{12.17}$$

같은 이유로 각도와 거리마다 임의의 추가 계수를 주고 잘 맞는 결과를 기하 구조의 발견이라고 부를 수 없다. 장비를 회전하면 공통 장 모형에 따라 응답이 바뀌어야 한다. 장비 간격을 바꾸면 같은 공간 구조에 맞게 상관관계가 바뀌어야 한다. 회전이 배선과 광섬유 장력, 냉각 조건도 동시에 바꾸면 관측 차이는 순수한 기하학적 검증이 아니다. 실험 계열에는 서로 다른 여러 개입이 필요하다. 일부는 주로 가정한 물리 응답을, 다른 일부는 구체적인 장비 결합 경로를 바꾼다. 이런 계열들을 비교해야 공통 신호의 원인을 구별할 수 있다.

Holometer가 보여 준 것

Fermilab Holometer는 차동 위치의 빠르고 상호 연관된 변화를 포착하도록 특별히 설계되었습니다. 2017 설치에 대한 설명은 약 40 미터의 팔을 가진 두 개의 인접한 독립적인 간섭계와 최대 수십 메가 헤르츠의 상관 관계를 보여줍니다. 2021 작업은 각 39 미터 간섭계의 한 팔이 특정 회전 섭동에 대한 감도를 위해 구부러진 구성을 사용했습니다. 이 발견은 공간적으로 일관된 회전 변동의 특정 모델을 제한했습니다. 이 실험은 특이한

가설이 테스트 가능한 스펙트럼 예측으로 바뀔 수 있음을 보여줍니다. 그들은 공간의 가능한 양자 속성이 배제된다는 것을 의미하지는 않습니다. [31] [32]

변형률 스펙트럼 밀도와 플랑크 시간의 비교는 특히 신중하게 읽어야 한다. 변형률은 무차원이므로 스펙트럼 밀도의 차원은 시간이다. 단위 비교 자체는 올바르다. 그러나 스펙트럼 밀도 민감도는 미터로 표현한 순간 거리 측정 오차와 다르다. 분산을 얻으려면 명시한 대역에서 스펙트럼을 적분하고 공간 응답을 고려해야 한다. 양자 모형의 매개변수로 옮기려면 규격화와 상관관계의 추가 가정이 필요하다. 이를 밝히지 않은 플랑크 민감도라는 말은 장치가 플랑크 길이의 개별 구간을 직접 구별한다는 잘못된 인상을 주기 쉽다.

실용적인 교훈은 또한 모든 부정적인 결과의 한계입니다. 하나의 섭동 대칭에 민감한 구성은 다른 것에 대해 거의 또는 전혀 반응하지 않을 수 있습니다. 각 예외 후에 이론이 변경되면 어떤 이전 버전이 거부되고 어떤 새로운 가정이 추가되는지 공개적으로 기록해야합니다. 미래의 프로그램의 경우, 진정으로 다른 모델의 세트를 미리 작성하고 여러 구성에 대한 각각의 응답을 계산하는 것이 더 유용합니다. 그런 다음 새로운 실험은 특정 방식으로 설명 공간을 줄입니다. 이러한 계정이 없으면 높은 정확도조차도 공간 구조에 대한 지식으로 변환하기가 어려운 숫자가 남을 위험이 있습니다.

서로 다른 측정 전략으로서 QUEST와 GQuEST

처음 발표된 QUEST 계열에서는 탁상형 간섭계 둘로 상관된 길이 요동을 탐색했다. 파트라와 공동연구자들은 13부터 80메가헤르츠 영역의 한계를 보고했다. 누적 시간은 10^4초였으며 40메가헤르츠의 변형률 민감도는 헤르츠의 제곱근당 3×10^{-20}이었다. 같은 논문에는 더 넓은 대역에서 개별 간섭계의 설계 민감도가 헤르츠의 제곱근당 2×10^{-19}미터라고 제시되어 있다. 이는 단위와 지위가 다른 양들이다. 설계값과 측정 결과, 상관관계 평균의 결과를 서로 바꾸어 써서는 안 된다. [34]

QUEST의 다른 발전 방향은 압축광과 연결된다. 베르가민과 공동연구자들의 2025년 연구는 이런 적용을 위한 광원을 조사하여 최대 6,8데시벨의 압축을 기록했다. 조사한 100메가헤르츠 대역에서는 적어도 3데시벨이 유지되었다. 이는 특정 광원과 측정 절차의

특성이다. 큰 장비에 넣으면 광학 손실과 위상 잡음, 모드 불일치로 이득 일부를 잃을 수 있다. 따라서 광원 특성을 완성된 간섭계 명세에 자동으로 옮길 수 없다. 부품, 부분계, 완전한 과학 측정 경로를 차례로 확인하는 예다. [35]

GQuEST는 강한 광학장 속 작은 위상을 통상적으로 검출하는 대신 가정한 섭동과 관련된 광자를 분리해 세는 다른 판독 구상을 쓴다. 버묄런과 공동연구자들의 2025년 논문은 구현 가능한 설계를 제시하고 선택한 지오엔트로픽 요동 모형들에 대한 이점을 평가한다. 설계와 예상 정보의 연구이며 양자중력을 검출했다는 보고가 아니다. 배경 광자와 검출 효율, 필터링, 손실을 자체 평가해야 하는 방법이다. 특정 간섭 판독 방식의 한계를 넘는다는 주장이 모든 양자적 및 기술적 측정 한계를 없앤다는 뜻은 아니다. [36]

이 방향들은 최고 성능 수치 하나로 장비를 고를 수 없는 이유를 보여 준다. 상관 측정과 압축광, 광자 계수는 다른 과제를 풀며 약점도 다르다. 자신의 가설에 대한 예상 출력 통계를 계산하고 같은 물리 신호와 시간, 실제적인 손실 조건에서 방법들을 비교해야 한다. 한 접근의 대역이 더 좁으면 진폭 이득과 함께 상관 형태의 정보를 잃을 수 있다. 다른 접근이 넓은 스펙트럼을 유지하면 바로 그 신호 형태가 가설과 배경을 구별하는 데 도움이 될 수 있다. 기준은 개별 민감도 수치가 아니라 설명들을 구별할 능력이다.

측정 신호에 대한 세 가지 작업 사이의 차이는 그림 53에 표시됩니다.

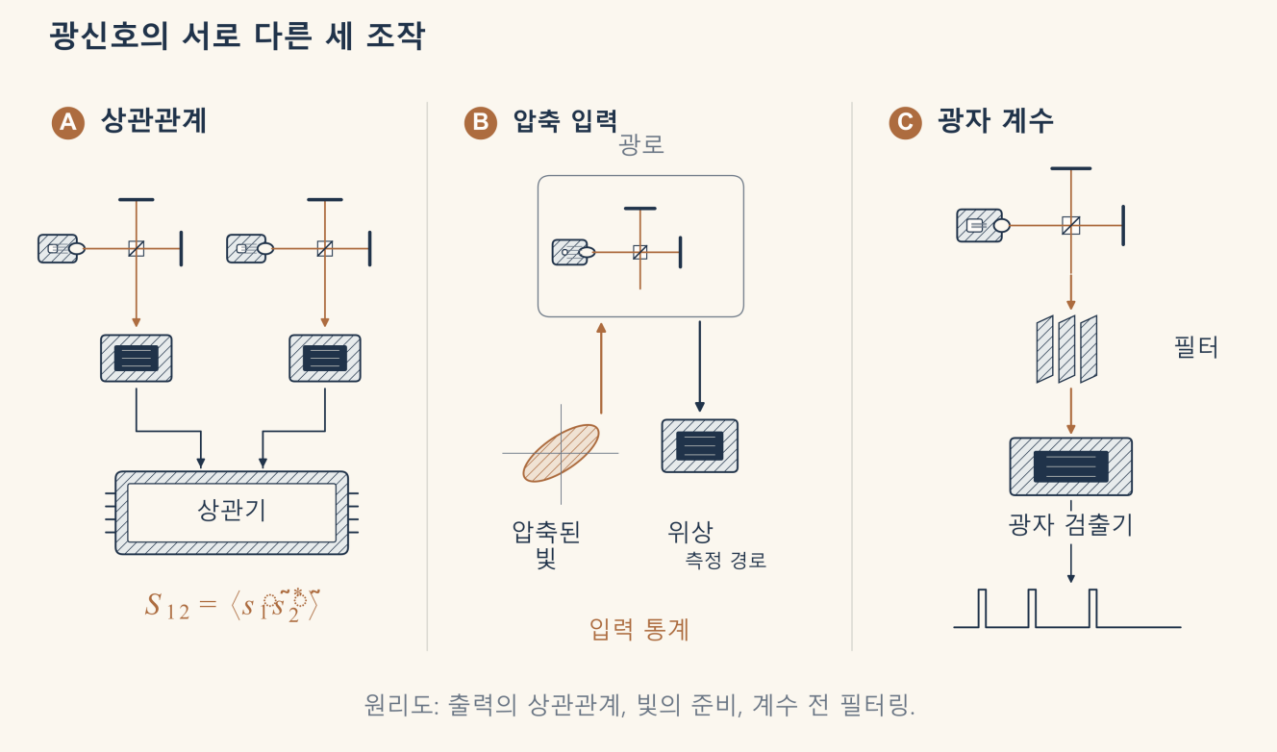


그림 53. 왼쪽에서는 독립적인 두 간섭계 출력을 교차스펙트럼 추정에 쓴다. 가운데의 준비한 압축광은 개별 광학 입력의 양자 통계를 바꾼다. 개념적 화살표는 전체 포트 지도가 아니라 조작을 뜻한다. 오른쪽은 광학 필터링 뒤에 개별 광자를 검출한다. 세 전략의 원리를 나타냈으며 Holometer, QUEST, GQuEST의 정확한 배선도가 아니다. 각 접근의 이득에는 손실과 대역, 배경, 출력 통계를 따로 평가해야 한다.

평균으로 대조를 대신할 수 없는 이유

잡음이 독립이면 두 채널의 평균 상호 스펙트럼은 영으로 가고 추정의 무작위 오차는 독립 표본 수에 따라 줄어든다. 약한 신호와 독립 가우스 잡음의 근사에서는 추정 실수부의 분산이 자체 스펙트럼들의 곱을 평균 횟수의 두 배로 나눈 정도이다. 여기서 중요한 구별이 나온다. 스펙트럼 파워 문턱은 대략 시간의 제곱근에 반비례해 개선되며 확률 신호의 진폭 스펙트럼 밀도 문턱은 시간의 네제곱근에 반비례해 개선된다. 모든 측정법의 법칙이 아니라 해당 상관 절차의 귀결이다. 최적 상관 방법과 공통 잡음의 역할은 앨런과 로마노의 연구에서 자세히 전개했다. [37]

$$\mathrm{Var}\left[\mathrm{Re}\hat{S}_{12}\right] \simeq \frac{S_{11}S_{22}}{2M}, \qquad M \sim T\Delta f \quad \text{독립적인 유효 평균화의 경우} \qquad (12.18)$$

공통 교란은 이런 누적에서 사라지지 않는다. 오히려 추정이 더 정확해져 상관관계가 존재한다는 통계적 확신이 커진다. 따라서 시간을 늘려 민감도를 개선한다는 약속에는 계통오차의 한계에 대한 질문도 따라야 한다. 독립 기준 발진기와 채널 교환, 전기 유도 잡음 검증, 광학 경로를 차단한 측정, 가정한 잡음 발생원에 대한 의도적 작용이 유용하다. 그러나 보편적인 대조는 없다. 빛 차단은 검출기 작동 조건을 바꾸고 전자회로 교환 후에도 공통 기계 결합은 남을 수 있다. 설득력은 구체적인 대안 설명에 맞춰 고른 일관된 검증 집합에서 나온다.

과학적 결과는 주파수, 길이 및 구성의 함수로서 출력의 맵을 필요로 합니다. 완료된 TT 예제는 물리적 필드에서 이러한 맵을 얻는 방법과 조립 전에 블라인드 설치 모드를 감지하는 방법을 보여줍니다. 상관 관계는 광범위한 통계 모델을 검색하지만 계산된 응답, 측정된 노이즈 및 설명 간의 미리 선택된 차이와 같은 시퀀스를 사용합니다. 다음 장에서는이 접근 방식을 엔지니어링 서류 및 접근 가능한 RC 네트워크에 대한 전체 워크샵으로 번역합니다.

제13장 세 장비와 신호에서 결론까지의 경로

관측량이 계획을 정한다

기하학적 가설은 전압과 각도, 주파수 비 같은 출력 신호의 언어로 옮겨야 한다. 각 변환에는 정확도의 대가가 있다. 전기망의 초기 상태 준비 오차가 다른 전파처럼 보일 수 있다. 질량 발생원의 작은 변위는 계산한 힘을 바꾼다. 공통 발생기는 독립적이라고 여긴 시계 판독값들을 연결할 수 있다. 따라서 장비 설계는 어떤 자료를 내놓으며 결론의 어떤 부분이 별도로 측정한 매개변수에 의존하는지 정하는 데서 시작한다.

이 장은 세 연구 수준을 다룬다. 전기망에서는 구성을 의도적으로 바꿀 수 있는 계에서 연결성 복원을 검증한다. 역학 센서는 물질적 물체들의 상호작용 법칙을 검증한다. 시계와 중력계 연결망은 공통 대역의 퍼텐셜 채널과 기울기 채널을 비교한다. 모형을 정하고 판독값을 계산하며 교정을 얻고 경쟁 설명을 검증하는 절차가 공통이다. 다음 수준으로 옮기려면 그에 맞는 자체 자료가 필요하다.

프로젝트	직접 데이터	검증 가능한 결과
RC 네트워크	알려진 준비 후 노드 전압	인공 시스템에서의 추가 및 일반 연결 간의 구별
기계식 센서	각도 또는 변위와 조화 응답의 위상	알려진 형상으로 선택된 힘 법칙의 제한
시계 및 중력계	공통 대역의 주파수 비율과 가속도	주어진 공통 필드와 두 채널의 호환성

아래의 전기 레벨은 실행 가능한 워크샵으로 가져 왔습니다: 원본 녹음 및 처리 프로그램이 첨부되어 있습니다. 이 모든 기록은 합성입니다. 다른 두 방향의 경우 예상 예산과 전송 조건이 실제 설치에 제공됩니다. 이것은 우리가 아직 측정되지 않은 하드웨어 특성에서 이미 수행 된 수치 실험을 분리 할 수 있습니다.

연결성의 전기적 분광계

전기 모형의 각 노드는 공통선에 대한 커패시터로 이루어진다. 노드 사이에는 저항기가 있다. 결합 전도도와 노드 전기용량이 정하는 속도로 전압이 평형화된다. 외부 발생원을 끄면 회로는 역문제 검증에 편리한 선형 전파를 구현한다. 연결망 접근에는 선행 연구가 있다. 노칼라와 필로, 비안코니는 양자 진동자 연결망의 저주파 모드로 스펙트럼 차원을 정하는 방법을 연구했다. RC 모형은 고전 동역학으로 고유한 측정 과제를 푼다. [38]

$$C_i \frac{dV_i}{dt} = \sum_j g_{ij}\left(V_j - V_i\right) - g_{i0} V_i + I_i(t), \qquad \mathbf{C}\dot{\mathbf{V}} = -\mathbf{K}\mathbf{V} + \mathbf{I} \tag{13.1}$$

전도도 g의 단위는 지멘스, 전기용량 C의 단위는 패럿, 비 g/C의 단위는 초의 역수이다. 전기용량이 모두 C_0이고 누설이 없으면 연산자 $L=K/C_0$는 대칭이다. 노드 j에만 전압을 준비하고 노드 i를 관측하면 행렬 지수함수의 원소를 얻는다. 준비 전체를 수행하면 전파 행렬이 드러나며 일부 포트만으로는 관측 가능한 블록만 얻는다.

$$\mathbf{V}(t) = e^{-t\mathbf{L}}\mathbf{V}\left(0\right), \qquad \mathbf{G}(s) = (s\mathbf{I} + \mathbf{L})^{-1} = \int_0^\infty e^{-st}\, e^{-t\mathbf{L}}\, dt \tag{13.2}$$

가장 간단한 완전한 예제는 체인에 연결된 사 개의 노드로 구성됩니다. 각각에는 커패시터 100 nF가 있으며, 이웃 사이에는 저항 100 kOhm이 있습니다. 일개의 연결의 명목상 시간은 10 ms, 연결 강렬입니다 100 s^{-1}입니다. 제어 실험의 경우, 추가 저항 500 kOhm이 회로의 끝, 즉 20 s^{-1}의 강도와의 연결 사이에 설치됩니다. 이 가치는 디자인 배치를 결정합니다; 완성되는 성분 및 미터의 정확도는 그(것)들에서 따르지 않습니다.

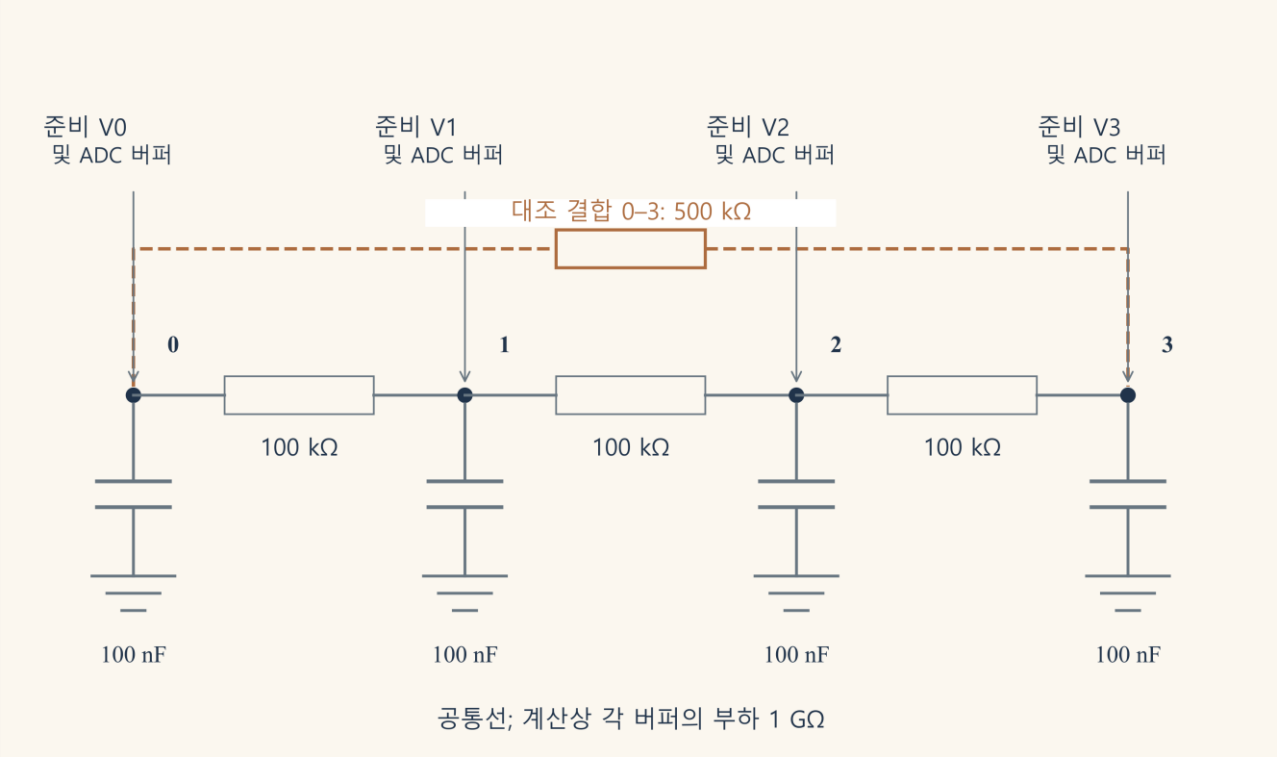


그림 54. 네 노드 RC 모형. 일반 연결은 100 kΩ이며 각 노드는 공통선에 대해 100 nF다. 주황색은 500 kΩ를 통한 추가 연결 0-3을 나타낸다. 화살표는 상태 준비 및 고임피던스 판독 채널이다. 노드 점이 없는 교차는 전기적 연결을 이루지 않는다. 수치 예시에서 각 입력의 부하는 1 GΩ다.

그림 54은 작은 레이아웃을 선택한 이유를 보여줍니다: 모든 노드가 알려져 있고, 사개의 독립적인 상태를 준비할 수 있으며, 전체 응답을 측정할 수 있습니다. 8 장의 대규모 네트워크에는 그러한 액세스가 없습니다. 작은 실험은 먼저 측정의 정규화 및 통계를 확인; 이 후, 포트의 수를 줄이고 어떤 차이가 더 이상 사용할 수 없습니다 관찰 할 수있다.

전류 방법과의 관계도 명확하다. 초기 상태가 영이면 전류에서 전압으로의 전달행렬은 $H_{VI}(s) = (sC + K)^{-1}$이다. 전기용량이 같으면 $G(s) = C_0 H_{VI}(s)$이다. 첫 행렬의 단위는 옴, 둘째는 초이다. 따라서 G의 수치 잡음을 전압계 정확도 요구라고 직접 선언할 수 없다. 여기와 전기용량, 기록 시간, 적분 추정 방법을 고려해야 한다.

표지를 숨긴 전체 과정 실험

"전압에서 연결성 재건에 이르기까지"워크샵은 1 V 주변의 사 가지 초기 준비를 사용합니다. 준비는 약간 혼합되어 있습니다: 작은 전압도 이웃 노드에 존재합니다. 그들의

실제 매트릭스는 사전에 교정에 포함되어 있습니다. 판독값은 입력 임피던스 1 GΩ에 해당하는 알려진 동일한 누설이 있습니다. 0,2 mV이 표준편차인 독립적인 가우스 잡음이 각 샘플에 추가됩니다. 이 노이즈는 특정 아날로그-디지털 변환기(ADC)의 약속된 성능이 아닌 채택된 디지털 예제를 설명합니다.

각각의 준비에 대해, 0,25 s의 지속기간을 갖는 기록은 50 µs의 단계와 함께 획득되었다. 처리는 초기 상태, 로드 및 공통 유한 간격의 혼합을 고려하여 s=20, 60 및 200 s⁻¹에서 정규화된 응답을 복원합니다. 세 개의 적분은 동일한 레코드에서 계산되기 때문에 오류는 상관 관계가 있습니다. 예를 들어, s의 처음 두 값에 대한 상관 관계는 0,866입니다. 전체 공분산은 삼 개의 독립적 인 추정치가 아닌 적합성으로 전달됩니다.

분석 전에 사슬의 양 끝 사이 대비 하나를 골랐다. 스칼라 판독 z=aᵀG(20)a를 주며 a=(1,0,0,−1)/√2이다. ±2% 안의 어떤 통상 전도도 조합에서도 가능한 값들의 엄밀한 포락선을 안다. 이 모형에서는 11,10052부터 11,43981 ms까지이다. 여기에 잡음과 유한 꼬리, 수치적분의 계산된 여유를 더한다. 가능한 표류 무늬 전부를 탐색할 필요가 없는 규칙이다.

기록	s=20에서의 대비값, ms	규칙 결과	분석 후 공개한 표지
A	7,75782	제약된 국소 모형이 기각됨	표류와 결합 0-3
B	11,26718	허용 국소 모형과 양립	기준 사슬
C	11,23150	허용 국소 모형과 양립	일반 연결의 표류



그림 55. 세 기록의 합성 검증. 띠는 ±2% 안의 모든 통상 전도도에서 가능한 대비를 포함한다. 오차막대에는 표준오차 다섯 배와 꼬리 및 수치 적분 한계가 들어 있다. 이 척도에서는 작다. 문자 아래의 표지는 분석 뒤 공개했다. 분석 프로그램은 참 매개변수가 든 파일을 읽지 않는다.

그림 55에서는 추가 커플링이 충분히 강력하여 그 효과가 허용 가능한 교정 간격을 넘어갑니다. 확장 모델을 피팅하면 쌍 0-3과 강도 19,9974 s⁻¹가 도입된 20 s⁻¹으로 결정됩니다. χ² 대 48 스칼라 관측값의 비율은 0,871와 같습니다. 다른 두 경우에는 데이터를 설명하기 위해 추가 가장자리가 필요하지 않습니다. 이것은 아무리 약한 경우에도 연결의 부재를 증명하는 것과 동일하지 않습니다.

여기의 구별 가능성은 큰 망의 어려운 예보다 훨씬 낫다. 네 노드 모두 관측 가능하고 초기 상태를 알며 추가 전도도는 통상 값의 20%다. 실습은 선택한 조건에서 전체 측정 사슬의 작동을 보여 준다. 보편적인 복원 정밀도를 측정하거나 8장의 보정 반례를 무효화하지 않는다. 다음에는 노드 접근을 의도적으로 줄이거나 결합을 약하게 하며 같은 규칙의 적용 한계를 추적해야 한다.

부품과 측정기도 연산자에 들어간다

조립한 회로에서는 전기용량이 같은지 검증해야 한다. C_i가 다르면 행렬 $C^{-1}K$는 전압 좌표에서 보통 비대칭이다. $u=C^{1/2}V$로 바꾸면 대칭 연산자가 나타난다. 탐침의 내적과 규격화도 이 변환에 맞아야 한다. 닮음변환에서 전체 대각합은 보존된다. 규격화한 대각

전압 응답은 여전히 지수함수의 대각합을 주지만 연산자와 정상 모드의 사영연산자는 실제 전기용량으로 계산해야 한다. 같은 전기용량 모형으로 계속 맞추면 소자 차이를 잘못해서 결합의 차이로 돌리게 된다.

$$\mathbf{L}_{\text{sym}} = \mathbf{C}^{-1/2}\mathbf{K}\mathbf{C}^{-1/2}, \qquad \mathbf{u} = \mathbf{C}^{1/2}\mathbf{V} \tag{13.3}$$

입력 임피던스와 커패시터 자체 누설은 공통 와이어에 커플링을 추가합니다. 동일 누설의 경우 L은 L+γI가 됩니다. 그런 다음 반환 신호가 승수 exp(−γt)을 수신하고 스펙트럼 차원의 추정치가 2γt만큼 증가합니다. 설계 모델에서 γ=0,01 s^{-1}은 사전에 알려져 있으며 처리 중에 제거됩니다. 불균등한 알 수 없는 누출은 이러한 스칼라 보정으로 교정할 수 없습니다. 측정 연산자의 행렬을 입력해야 합니다.

$$\tilde{P}(t) = e^{-\gamma t}P(t), \qquad \tilde{d}_s(t) = d_s(t) + 2\gamma t \tag{13.4}$$

초기 상태의 준비에도 보정이 필요하다. 낮은 저항의 전압원들이 정해진 네 전압을 유지하다가 동시에 분리된다. 스위치의 저항, 서로 다른 분리 시점, 전하 주입은 초기 벡터를 바꾼다. 실습에서는 이상적인 단위 벡터 대신 측정한 초기 상태들의 행렬 W를 사용한다. 이 행렬이 가역이고 조건이 좋으면, 기록한 전압에 W^{-1}을 곱해 전파를 복원한다. 여기서 조건수는 1,0049이므로 이 연산은 잡음을 거의 증폭하지 않는다. 준비한 상태들이 거의 같다면 역행렬을 구하는 일은 신뢰하기 어려워진다.

그림 56에서 물리적 네트워크는 완전한 준비 및 높은 임피던스 디지털 등록 경로에 포함됩니다.

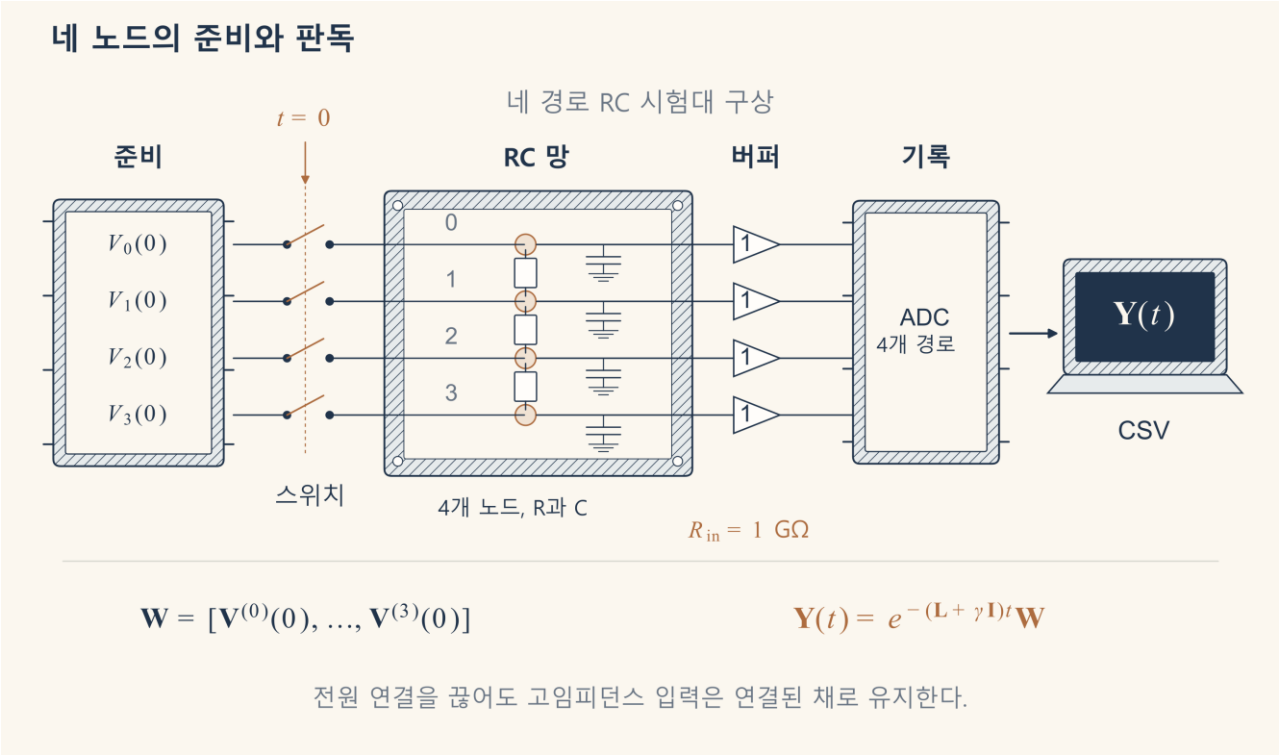


그림 56. 전원 넷으로 전체 초기 벡터를 유지한 뒤 스위치 넷을 한 사건에서 연다. 별도의 고입력저항 버퍼와 ADC를 통해 관측을 계속한다. R_in = 1 GΩ는 계산 예의 입력 부하이며 누설이 없다는 뜻은 아니다. 행렬 W는 실제 준비한 상태, Y(t)는 검출한 전압을 담는다. 기판은 현대적 시험대 구상으로 나타냈다. 정확한 위상 구조와 축전기는 회로도에서 따로 공개한다. 낮은 입력저항을 노드에 직접 연결하면 연산자가 바뀐다.

저항기의 열잡음은 소산과 연결된다. 고전적 영역에서 개별 저항의 단측 전압 밀도는 4kBTR이다. 연결망에서는 자체 전류 잡음이 공통 연산자를 지나 노드 사이 상관관계를 만든다. NIST의 잡음 온도측정은 주파수 특성의 일치와 혼선, 판독 잡음의 분리가 얼마나 중요한지 보여 준다. [46] [47]

시제품 예산에서는 W와 정전용량, 누설, 이득, 시간 척도의 불확실성을 각각 고려해야 한다. 무작위 부분은 공분산으로 전파할 수 있다. 계통적 불확실성은 허용 모형군에 넣거나 구간으로 평가해야 한다. 첨부 자료에서 이 보정량들은 정확히 주어지며 ±2%는 통상 전도도만 뜻한다. 실제 회로에 같은 포락선을 쓰려면 나머지 오차를 독립적으로 제약하고 여유분에 더해야 한다.

역학 실험 명세와 예시 돌림힘 예산

제어한 질량 발생원은 변하는 돌림힘을 만들고 비틀림 진동자 같은 감응 소자는 이를 각도로 바꾼다. 작은 진동에서는 관성모멘트 I와 강성 κ, 점성 감쇠 계수 b를 쓴다. 역학적 감수율의 진폭과 위상이 광학 판독값에서 돌림힘으로의 환산을 정한다. 알려진 작용으로 작업 대역에서 검증한다.

그림 57은 비틀림 센서의 배치와 돌림힘을 측정 신호로 바꾸는 순서를 연결한다.

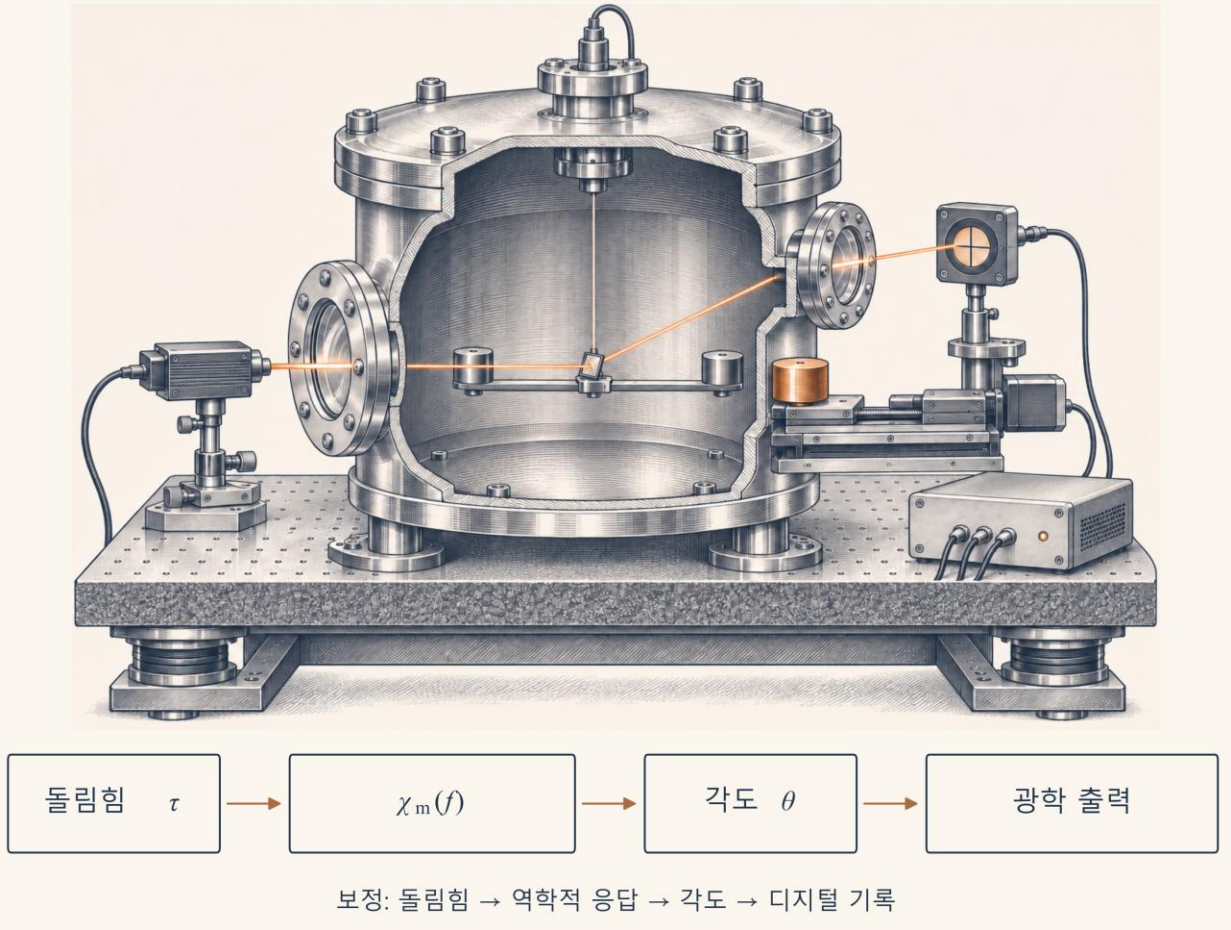


그림 57. 현대적인 비틀림 센서의 구상. 감응 막대가 진공 상자 안의 가는 실에 매달려 있다. 제어 가능한 질량이 돌림힘을 만들고 레이저 판독이 각도를 기록한다. 아래 사슬은 돌림힘과 역학적 감수율, 각도, 기록기 출력을 구별한다. 가능한 배치를 보여 주며 실제 제작 장비의 크기와 차폐, 민감도를 주장하지 않는다. 본문의 예시 저주파 예산을 10장의 두 원판 실험에 옮겨 적용하지 않는다.

$$I\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + \kappa\theta = \tau(t), \qquad \chi_{\theta\tau}(\omega) = \frac{1}{\kappa - I\omega^2 + ib\omega} \tag{13.5}$$

아래에서는 실존 장비의 제원이 아니라 계산용 저주파 기준을 선택한다. $I=10^{-6}$ kg·m², 고유주파수 $f_0=0{,}01$ Hz, 품질계수 $Q=1000$, 온도 300 K로 가정하자. 원천은 $f=0{,}005$ Hz로 변조하며 광학 판독 잡음은 10^{-8} rad/√Hz로 둔다. 점성 감쇠에서는 $\kappa=I(2\pi f_0)^2$와 $b=I2\pi f_0/Q$가 성립한다. 이 가정들이 단순 모형의 계산을 완결한다.

$$S_\tau^{\mathrm{th}} = 4k_B T b, \qquad S_\tau^{\mathrm{ro}}(f) = \frac{S_\theta^{\mathrm{ro}}(f)}{\left|\chi_{\theta\tau}\left(2\pi f\right)\right|^2} \tag{13.6}$$

물리량	계산된 값
비틀림 강성 κ	$3{,}948 \times 10^{-9}$ N·m/rad
계수 b	$6{,}283 \times 10^{-11}$ N·m·s/rad
0,005 Hz에서 감수율의 절댓값	$3{,}377 \times 10^{8}$ rad/(N·m)
열 돌림힘 ASD	$1{,}020 \times 10^{-15}$ N·m/√Hz
돌림힘 단위로 환산한 판독 ASD	$2{,}961 \times 10^{-17}$ N·m/√Hz
알려진 위상의 10^5 s에 대한 진폭 오류	$3{,}228 \times 10^{-18}$ N·m

마지막 행은 여러 주기와 정상 백색 돌림힘 잡음에서 진폭 $2T^{-1}\int \tau(t)\cos(2\pi f t)\,dt$를 추정해 얻었다. 채택한 단측 밀도에서 분산은 대략 $S_\tau(f)/T$이다. 두 직교 성분이 모두 미지이면 절댓값의 분포와 검출 규칙이 바뀐다. 지렛팔이 1 cm이면 이 돌림힘 오차는 약 $3{,}23 \times 10^{-16}$ N의 힘 조화 성분 오차에 해당한다.

이 계산은 단순한 역학 모형 장치와 특정 탐색의 요구 사이 거리를 평가하는 데 도움이 된다. 제10장의 예시 힘 실험에는 고유한 기하 구조와 변조 주파수, 요구 오차가 정해져 있다. 저주파 비틀림 기준이 이 성능을 자동으로 갖지는 않는다. 옮겨 적용하려면 감수율과 힘–돌림힘 관계, 전체 오차를 새로 계산해야 한다. 발생원 주파수가 더 높으면 각도 응답이 급격히 약해질 수 있다.

점성 댐핑은 여기서 명시적으로 정의된 모델로 선택됩니다. 내부 구조 마찰의 경우 열 노이즈의 주파수 법칙이 다릅니다. 관련 구별은 Saulson에 의해 자세히 논의됩니다. 따라서, 한 주파수에서 측정된 품질 계수는 아직 전체 스펙트럼을 결정하지 않습니다. [48]

실제 예산의 주된 부분은 계통적일 수 있다. 간격 오차 δd는 예상 돌림힘을 (∂τ/∂d)δd만큼 바꾼다. 단거리 보정에서는 찾는 효과를 모사할 수 있는 변화이다. 차폐판 운동과 표면 퍼텐셜, 진동, 발생원의 밀도와 크기를 따로 검증한다. 표 계산에는 포함하지 않았다. 첫 하드웨어 검증에서는 여러 기하 구조에서 알려진 작용과 주입한 작은 변화를 재현해야 한다. 이후 측정한 스펙트럼과 허용 오차를 제10장의 물체 적분에 사용한다.

공통 중력 측정 경로를 가진 시계망

11장에서는 두 시계와 기선 가운데의 중력계라는 기하 구조를 골랐다. 공동 스펙트럼은 퍼텐셜 차이를 같은 장의 방향 미분에 연결한다. 공간 법칙을 검증하려면 여러 기선이나 기하 구조의 변화가 필요하다. 모든 거리가 상관 길이보다 훨씬 작으면 조합 A/ℓ이 우세해 개별 매개변수를 잘 정하지 못한다. 공간 척도는 장비 배치의 편의만이 아니라 예측이 바뀌는 정도에 따라 고른다.

11 장의 숫자 예제는 기본 1000 m, 상관 길이 1000 m, 상관 시간 10 s 및 무차원 필드 진폭 $A=10^{-20}$를 사용합니다. 기기 노이즈의 경우 클럭 채널의 조건부 출력 ASD $10^{-18}/\sqrt{\text{Hz}}$ 및 가속 채널의 10^{-7} $\text{m/s}^2/\sqrt{\text{Hz}}$가 설정됩니다. 공통 노이즈 구성 요소 및 공간 응답의 부호를 변경하여 테스트도 포함됩니다. 이 숫자는 합성 실험을 정의하며, 개별 실험실은 자체 스펙트럼 및 감도 기능을 제공해야합니다.

레코드를 결합하기 전에 전체 시간 스케일, 지연, 주파수 필터 및 중력계의 민감한 축의 방향이 기록됩니다. 클럭 비교와 가속은 하나의 주파수 대역으로 변환됩니다. 로그에는 원자 시료의 위치, 지지체의 이동, 온도, 자기장, 압력 및 주변의 중요한 질량의 이동이 포함됩니다. 채널 매칭은 독립적으로 측정된 응답을 기반으로 수행되며, 자유롭게 조정 가능한 위상 보정은 상관 관계의 하드웨어 원인을 숨길 수 있습니다.

채널의 수는 그 자체로 독립을 보장하지 않습니다. 단일 전송선, 공통 광학 발진기 또는 공통 클럭 시스템은 서로 다른 주파수 비교를 연결할 수 있습니다. 따라서 네트워크

사양에는 로컬 스펙트럼과 상호 간섭 요소가 모두 포함되어 있습니다. 하드웨어 연결을 유지하지만 기호를 변경하거나 공간 필드 응답을 억제하는 별도의 제어가 유용합니다. 그것은이 역할 기하학적 순열, 11 장에서 논의, 재생됩니다.

$$\delta y \simeq \frac{g\,\delta h}{c^{2}}, \qquad \delta h = 1\,\text{mm} \;\Rightarrow\; \delta y \simeq 1.09 \times 10^{-19} \tag{13.7}$$

g≈9,81 m/s²에서 추정식 (13.7)은 높이 측정이 왜 주파수 실험의 일부인지 보여 준다. 지지대의 열팽창이나 표본의 밀리미터 변위도 선택한 척도에서 뚜렷한 주파수 효과를 만든다. 약한 장 공식의 귀결이며 새 센서의 특성이 아니다. 움직이는 질량을 이용한 교정에도 예비 계산이 필요하다. 중력계에는 가속도가 이미 보여도 ΔΦ/c²가 시계 채널에는 너무 작을 수 있다.

공학적 결론은 관측량에 한정해야 한다. 퍼텐셜 채널과 기울기 채널의 일치는 채택한 공통 장 모형을 검증한다. 곡률을 추론하려면 제11장에서 설명한 운동학적 대조와 조석 대조가 추가로 필요하다. 이런 측정은 특이한 잔차를 찾기 전에 장치 구성에 포함한다.

측정 준비가 되었다는 뜻

각 프로젝트에는 알려진 시스템의 모델의 실행 가능한 버전이 있어야 합니다. 여기에는 검사 대상뿐만 아니라 준비, 판독, 대역폭, 형상 및 보정도 포함됩니다. 가설적 효과를 추가한 후에는 다른 매개 변수에서 허용 가능한 변경 사항과 구별할 수 있는 특징이 있는지 확인합니다. 이러한 기능 세트는 장치의 유용한 범위를 결정합니다.

RC 워크샵은 CSV의 볼트에서 정규화 된 응답 및 선택한 지역 클래스에 대한 정보에 입각 한 결정에 이르기까지 작은 합성 시스템에서이 체인을 완성합니다. 실험실 모델로의 이전은 현재 교정 파일에 정확하게 지정된 매개 변수의 측정으로 시작됩니다. 기계 및 시계 서류는 동일한 논리를 사용하지만 다른 기술과 소음 예산에 대한 독립적 인 확인이 필요합니다.

수용은 도입된 효과의 검출과 그 부재 또는 구별 불가능성에서의 작업을 모두 포함한다. 저장된 원본 기록을 통해 다른 간섭 모델로 분석을 반복하고 출력을 변경한 단계를 확인할

수 있습니다. 다음 장에서는 이 절차를 공식화합니다: 테스트 사례를 선택하고, 설명을 비교하고, 데이터가 단일 답변을 지정하지 않은 경우 결과를 보고하는 방법.

제14장 발견과 설득력 있는 오류를 구별하는 방법

주장은 결과보다 앞서야 한다

검증할 주장은 대상과 모형 부류, 자료, 판단 규칙을 고정한다. 결과를 본 뒤 새 가정을 만들고 다음 실험을 설계할 수 있다. 순서를 유지해야 한다. 질문을 제안한 연구와 검증에 사용한 기록은 역할이 다르다. 제시한 예에서 혼합 쌍에서 대조 포트로의 전환도 바로 이 순서이다.

제안하는 계획의 주 검증 대상은 기하 구조와 동역학의 구별 가능성이다. 조작적 차원은 연결성과 전달 방식, 주파수 분산, 누설, 잘못된 보정 때문에 변할 수 있다. 따라서 영가설 모형을 우스울 만큼 단순하게 해서는 안 된다. 불균일한 매개변수의 통상 기하 구조, 추가 차원 없는 새 장, 장비의 공통 과정 같은 실질적 대안을 함께 정한다. 특이한 가설을 처음부터 불충분한 기술과만 비교하면 이겨도 세계에 관해 알려 주는 것이 적다. 과학적 과제는 일부러 약하게 만든 상대가 아니라 가장 강한 합리적 설명을 이기는 것이다.

값 비싼 단계를 시작하기 전에 여러 가지 개입에 대한 예측 테이블을 만드는 것이 유용합니다. 예를 들어, 거리 변경, 재료 변경, 센서 회전 및 전자 장치 재배열은 모델에 다르게 영향을 미칩니다. 두 가지 가설이 모든 가능한 개입에 대해 동일한 예측을하는 경우 동일한 측정의 정밀도를 높이면 분쟁이 해결되지 않을 수 있습니다. 새로운 모니터링 채널이 필요합니다. 이러한 결론은 장치의 구성 이전에 얻어질 수 있으며, 따라서 근본적으로 제기된 질문에 답하지 않는 데이터의 장기적인 축적을 피할 수 있다. 구별 가능성의 예비 계산은 미래의 발견에 필요한 조건을 결정하기 때문에 독립적 인 연구 결과가됩니다.

구성의 일부인 맹검 검증

맹검 분석은 처리 과정을 예상 답에 무심코 맞출 가능성을 제한한다. 자료에는 분석자가 모르는 이동량이나 숨겨진 표지 순열, 미리 넣은 신호가 있을 수 있다. 선별과 보정, 불확실성 평가 규칙은 공개 전에 고정한다. 실제 고장을 찾는 데 방해되지 않도록 맹검 방식을 골라야 한다. 예를 들어 경로 사이 진단 관계를 유지하며 절대 척도를 숨길 수 있다. 쩡과 공동연구자들은 중력 적색편이의 실험실 검증에 이미 맹검 절차를 사용했다. 여기서는 그 원리를 조작적 차원의 검증으로 옮기자고 제안한다. 아직 수행하지 않은 시험을 완료한 실험으로 제시하지 않는다. [30]

전기 프로토 타입의 경우 여러 숨겨진 네트워크를 준비하는 것이 편리합니다. 운영자는 하나의 프로토콜을 사용하여 측정하고 분석가는 연결 다이어그램없이 시계열을 수신하며 레이블을 담당하는 사람은 계산이 끝날 때까지 진정한 구조를 유지합니다. 일부 세트에서는 일반적인 저항 불균일성과 누출이 도입되어 비정상적인 연결을 시뮬레이션 할 수 있습니다. 다른 사람들은 실제 추가 경로를 추가합니다. 올바른 복구 비율, 잘못된 발견 비율 및 불확실성을 인식하는 능력을 동시에 평가해야합니다. 한 구조의 이름을 항상 자신있게 지정하는 알고리즘은 편리한 세트에서 성공적으로 보일 수 있지만 특별히 선택된 퇴화 된 예제에서는 실패 할 수 있습니다.

하드웨어 주입과 디지털 추가는 다른 과제를 푼다. 디지털 신호는 주입 지점 이후의 수학적 처리를 검증한다. 교정 거울의 운동은 광학계와 판독을 검증하지만 빛 경로의 가정한 계량을 반드시 재현하지는 않는다. 질량 변경은 역학 및 중력 모형을 검증하지만 진동도 만들 수 있다. 따라서 주입마다 측정 사슬의 어느 구간을 검증했는지 밝힌다. 여러 독립 주입 방법과 주입 없는 대조 기록이 유용하다. 이 계획을 성공적으로 통과하면 특정 신호 부류에 장비가 적합함을 확인하지만 신호의 본질은 열린 질문으로 남는다.

제안된 블라인드 시험에서 구조, 레코드 및 키에 대한 액세스의 순서는 그림 58에 나와 있습니다.

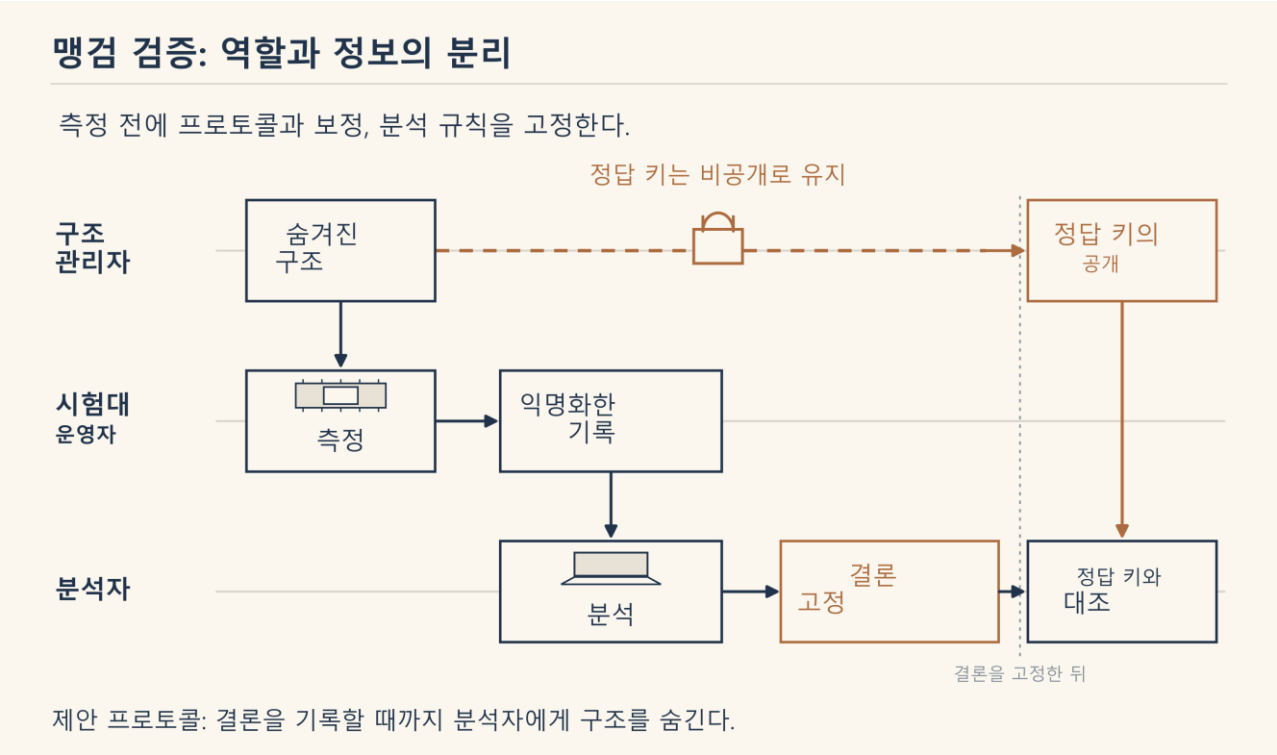


그림 58. 맹검 실험에서 제안하는 역할 분리. 관리자는 참 구조와 표지 키를 보존하고, 운영자는 미리 고정한 프로토콜로 측정하며, 분석자는 익명 기록을 받는다. 키 공개 전에 결론을 고정한 뒤에만 알려진 구조와 대조한다. 수행한 실험이 아니라 정보 접근 순서를 나타낸 도식이다. 접근 가능한 고장 진단과, 넣은 각 신호가 어느 구간을 검증하는지에 대한 명시적 설명을 함께 갖추어야 한다.

확률적 추론과 교란 매개변수

통계 모형은 예상 평균값뿐 아니라 오차 사이의 상관관계도 기술해야 한다. 실수 자료 벡터에 대한 가우스 근사에서는 역공분산행렬을 포함하는 이차형식을 쓴다. 공분산 자체가 가설의 매개변수에 의존하면 그 행렬식이 들어가는 항도 보존해야 한다. 이를 빼면 공표한 잡음만 늘리는 모형에 유리해질 수 있다. 아래 식은 물리 매개변수 θ와 보정 매개변수 η에서의 조건부 가능도를 정한다. 비가우스성이 크거나 평균화 횟수가 적거나 계수기의 통계가 다르면 분포를 바꾸어야 한다. 가우스 형태가 익숙하다는 것이 적용 근거는 아니다.

$$-2\ln\mathcal{L} = (\mathbf{d}-\boldsymbol{\mu})^{T}\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{d}-\boldsymbol{\mu}) + \ln\det\mathbf{C} + N\ln\left(2\pi\right), \qquad \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}(\theta,\eta), \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}(\theta,\eta) \tag{14.1}$$

교정 매개변수의 오차가 가정한 효과와 비슷한 크기라면 편리한 정확한 수치로 단순 대입할 수 없다. 독립 측정으로 제약한 뒤 프로파일링하거나 명시한 불확실성 분포로 적분한다. 서로 다른 통계 접근은 다른 질문에 답하므로 결과도 그에 맞게 불러야 한다. 신뢰영역은 이론이 참일 확률이 아니며 베이즈 증거비는 지정한 모형군과 매개변수 분포에 의존한다. 인상적인 지표 하나보다 잔차와 다른 잡음 모형에 대한 견고성, 따로 남긴 자료의 예측을 공개하면 유용하다. 선택한 통계 표현 방식을 넘어 결론을 검증할 수 있게 한다.

구별 할 수없는 이유는 이미 선형 근사치에서 볼 수 있습니다. 예상 신호의 작은 변화는 기하학적 및 교정 매개 변수의 기여로 구성됩니다. 지오메트리에 할당된 변경 방향이 교정 오류의 방향 조합과 일치하는 경우, 데이터는 외부 정보 없이 이러한 원인을 분리할 수 없습니다. 이 공식의 민감도 행렬은 해당 파라미터에 대한 신호의 도함수를 포함합니다. 그들의 가까운 선형 의존은 계산 알고리즘의 약점을 의미하지는 않지만 실험에서 정보가 부족합니다. 옵티마이저에서 소수점 이하 자릿수를 늘린다고 해서 이 문제가 해결되지는 않습니다. 다른 구성, 독립적 인 교정 또는 새로운 관측가능량이 필요합니다.

$$\delta\mathbf{\mu} = \mathbf{J}_{\text{geom}}\delta\mathbf{\theta} + \mathbf{J}_{\text{cal}}\delta\mathbf{\eta} \tag{14.2}$$

많은 상관 길이와 주파수 구간, 숨은 결합 후보를 탐색하면 우연히 흥미로운 조합을 찾을 확률이 높아진다. 따라서 최선 결과 선택까지 포함한 전체 탐색 절차에 대해 검출 문턱값을 보정한다. 같은 탐색과 중단 규칙으로 영가설 모형을 여러 번 모의실험하는 것이 적절한 방법이다. 다만 보정은 영가설 모의실험이 실제 잡음의 중요한 성질을 재현하는 정도까지만 유효하다. 놓친 공통 교란이 형식적으로 드문 사건을 흔하게 만들 수 있다. 그래서 상관 탐색은 통계적 평균과 공통 신호의 물리 원천 검증을 함께 해야 하며 따로 다루어서는 안 된다.

제약된 망의 동시 구간

제8장의 프로토콜에서 각 스칼라 관찰은 $z_j = a_j^{\mathrm{T}}\, G_{\text{набл}}\, a_j$의 형태다. 방향별 행렬 원소를 독립적으로 취득하고 분산이 σ^2로 같으며 a_j의 노름이 일이면 z_j의 분산도 σ^2다. 대비값

자체는 서로 의존한다. 두 벡터가 같은 원소를 사용할 수 있기 때문이다. 일반 공분산에서는 cⱼ가 기록 데이터의 선형 결합 계수 벡터를 나타낸다.

$$\sigma_j^{\,2} = c_j^{\mathsf{T}} C c_j, \qquad c_j = \operatorname{vec}\left(a_j a_j^{\mathsf{T}}\right) \tag{14.3}$$

검증 계열 전에 대비 M개를 골랐다고 하자. 알려진 분산의 가우스 주변오차에서 각 대비에 미포함 확률이 β/M 이하인 양측 구간을 부여한다. 그러면 미포함 사건의 합집합 확률은 대비의 상관관계와 무관하게 β 이하이다. β = 0,01에서는 다음 인자를 사용한다.

$$k = \Phi^{-1}\!\left(1 - \frac{\beta}{2M}\right), \qquad I_j = \left[z_j - k\sigma_j,\; z_j + k\sigma_j\right] \tag{14.4}$$

출발한 두 탐침에서는 M = 216, k = 4,07358이다. 대비 36개씩의 대조 기록 둘을 더하면 M = 288이며 최종 집합 전체에 대해 인자를 다시 계산한다. 참 가중치가 명시한 상자 안에 있고 주변 잡음 모형이 맞으면, 응답은 적어도 확률 1 − β로 모든 구간에 들어간다. 그 사건에서 외부 행렬 포락선은 참 매개변수를 보존한다.

2016 쌍을 열거하는 것은 이 디자인에 있는 다른 요인 2016를 요구하지 않습니다. 먼저, 하나의 동시 영역은 모든 미리 선택된 관측값에 대해 구성되며, 그 다음 매개변수 공간으로 반전됩니다. 주어진 클래스의 진정한 쌍이 무엇이든, 그것은 일반적인 범위 이벤트에서 차단되지 않습니다. 이것은 χ²의 최대 개선을 발견하고 경험적으로 임계 값을 보정하는 것보다 오류를 제어하는 다른 방법입니다.

수준 1퍼센트는 이 포락선 규칙의 전제 아래 참 매개변수를 잘못 배제할 확률에 해당한다. 남은 쌍이 참일 확률이 아니며 누락한 물리 원인까지 포괄하지 않는다. 적은 기록으로 분산을 추정하거나 비가우스 꼬리가 있거나 흥미로운 채널 선택 후 분산이 바뀌면 공식을 바꾸거나 보완해야 한다. 공통 시간 기록에서는 먼저 변환 자료의 올바른 공분산을 계산한다.

양립 가능성의 증거와 배제의 증명

이 두 가지 작업은 서로 다른 계산 비용을 가지고 있습니다. 모델의 호환성을 보여주기 위해, 직접 응답이 선택한 오류 영역에 있는 유효한 매개 변수 집합을 제시하면 충분합니다.

이를 제외하려면 이러한 집합이 없는지 확인해야 합니다. 로컬 옵티마이저는 첫 번째 작업을 도울 수 있지만 큰 나머지에서 중지해도 두 번째 작업이 증명되지는 않습니다.

이 책의 정확한 응답 제약 탐색에는 해석적 야코비안과 가중치 한계 ±2퍼센트를 사용한다. 두 탐침의 양립 증거 탐색에서는 공통 상대 표류도 고려한다. 포락선이 허용하는 별개 표류보다 좁은 부분 부류이지만 찾은 점은 넓은 부류에도 속한다. 좁은 부분 부류에서 실패했다고 넓은 부류가 배제되지는 않는다. 모든 잔차 값은 매개변수를 다시 직접 대입해 계산한다.

$$\chi^{2}(\theta) = (d - \mu(\theta))^{\mathsf{T}} C^{-1} (d - \mu(\theta)) \le q_{0.99,N} \tag{14.5}$$

이 진단 검증에서 $q_{0.99,n}$은 알려진 독립 규격화 오차 N개의 χ^2 분위점이다. 찾은 매개변수 수만큼 N을 줄이지 않는다. 추정 후 잔차의 표준 점근 통계량이 아니라 자료 구안에 점이 존재하는지 검증하기 때문이다. 교정 변수 144개에서 작은 최소값이 나온다고 이렇게 유연한 모형이 더 낫다는 증거는 아니다. 선택한 영역의 자료로 기각할 수 없음을 보여 준다.

전체 잔차의 구와 스칼라 구간들의 모형군은 서로 다른 진단 구성이다. 프로그램의 엄밀한 배제는 포락선으로만 수행한다. 양립 증거를 찾지 못하면 결과는 미정 상태가 된다. 따라서 별도의 99퍼센트 구를 전체 절차의 새 통합 수준으로 제시하지 않는다. 향후 여러 규칙으로 동시에 모형을 기각하려면 전체 오류를 따로 제어해야 한다.

관찰된 상황	허용되는 결론
변 없는 제약 교정점을 찾음	통상 교정과 양립; 추가 결합은 확립되지 않음
포락선으로 교정을 배제하고 공통 쌍의 양립 증거를 찾음	정한 부류 안에서 공통 쌍과 양립; 별개 구조 및 장비 원인을 검증함
모든 공통 쌍을 배제하고 별개 구조 모형의 양립 증거를 찾음	공통 결합 하나 모형의 해당 형태가 기각됨
포락선은 쌍을 허용하지만 양립 증거를 찾지 못함	계산 또는 모형의 불확실성; 배제를 주장하지 않음
독립 하드웨어 대조에서도 공통 신호가 남음	해당 검출 경로 구간을 조사할 근거가 있음

이 책의 수치 실험이 가르치는 것

첫 번째 시리즈는 알려진 저소음 네트워크에서 단일 링크 재구성의 성능과 참조 오류에 대한 취약성을 확립했습니다. 8 장의 제한된 반례는 더 위험한 상황을 보여 주었다: 좋은 나머지조차도 작은 맞춤형 드리프트에서 새로운 연결을 분리하지 않는다. 설명 클래스의 교정을 포함하여 우리는 이러한 데이터에 대한 일반적인 원인을 제시 할 수있었습니다.

이어 두 탐침은 가능한 쌍들의 집합을 줄였다. 그러나 별개 구조의 대조에서는 제약된 맞춤까지 통과하는 거짓 일치가 생겼다. 이를 살핀 뒤 추가 포트를 선택하고 새 계열 전에 고정했다. 그 포트들이 주어진 반례에서 모든 공통 쌍을 배제하게 했다. 중간 기준의 실패까지 포함한 구체적인 연구 사슬을 여기서 완결했다.

주어진 96 새로운 구현은 선언된 범위와 노이즈 하에서 선택된 프로토콜을 검사한다. 그들은 임의의 자연 변칙의 확률을 추정하지 않습니다. 특히, 쌍 5-58 및 몇 가지 특별히 정의된 대안에 대한 결과가 전체 쌍 세트로 자동으로 전달되지는 않습니다. 척도에서는 별도의 지오메트리 앙상블, 추가 물리적 오류 및 독립적인 하드웨어 기록이 필요합니다.

물리적 증거의 단계

명확성을 유지하려면 여러 수준의 결과를 구별하는 것이 유용합니다. 먼저 모델의 수학적 일관성과 응답 계산의 정확성을 확인합니다. 이 방법은 알려진 특성을 가진 인공 시스템에서 테스트됩니다. 다음 단계는 물리적 실험에서 재현 가능한 편차입니다. 이 후, 특정 공통 원인이 설정되고 그 다음에만 기하학적 해석이 논의된다. 마지막으로, 양자 기원은 허용된 가정 내에서 적절한 고전적 임의 모델로 설명될 수 없는 특징을 필요로 한다. 이 레벨은 동일한 시간이 걸릴 필요는 없지만, 그 사이를 뛰어 넘으면 가능한 데이터보다 결론이 강해지며 공정한 테스트의 가능성을 파괴합니다.

레벨	확인한 것	아직 주장할 수 없는 것
계산	모델과 응답은 지정된 가정과 일치합니다.	자연이 이 모형을 구현한다는 것
제어된 유사체	이 방법은 인공 네트워크의 속성을 인식합니다.	자유 공간의 차원이 바뀌었다는 것

레벨	확인한 것	아직 주장할 수 없는 것
재현 가능한 잔차	원본 데이터 모델이 부족합니다.	원인이 반드시 기하학적이라는 것
공통 물리 메커니즘	하나의 입증된 원인에 의해 설명되는 여러 가지 관찰	메커니즘의 해석이 유일하다는 것
기하학적 가설	고유한 예측들이 독립 검증을 견딤	양자적 본질이 자동으로 증명되었다는 것
양자 해석	주어진 양자 및 고전적 설명을 구별하는 기능이 검증되었습니다.	생각할 수 있는 모든 대안을 배제했다는 것

독립 재현은 가능한 오류 경로의 적어도 일부를 바꾸어야 한다. 같은 장비에서 반복하면 견고성을 확인하지만 계통적 특성은 남는다. 다른 집단이 같은 회로를 복제해 반복하면 일부 위험은 줄지만 다른 위험은 남는다. 두 장치가 정량적으로 연결된 양을 검증한다면 판독의 물리 원리가 다른 실험이 특히 설득력 있다. 결과가 맞지 않는다고 조건의 모든 차이에 효과가 새로 의존한다고 곧바로 설명해서는 안 된다. 먼저 같은 영역을 비교하는지와 매개변수를 올바르게 옮겼는지 확인해야 한다. 이론에 새 조건을 넣을 수는 있지만 새로운 검증 가능한 예측을 만들어야 한다.

제로 등록은 또한 실험이 테스트 할 수있는 매개 변수 범위를 미리 표시하면 강력한 결과가 될 수 있습니다. 출판물에는 서로 다른 노이즈 가정 하에서의 제한, 응답의 공개 계산 및 제외된 데이터 간격에 대한 설명이 포함되어야 합니다. 장치가 식별 된 체계로 인해 필요한 수준에 도달하지 못하면 이는 자연의 한계가 아닌 엔지니어링 제한이라고 불려야합니다. 그러한 보고서는 개선의 가능성을 보존합니다: 다음 그룹은 정확히 무엇을 변경해야하는지 이해합니다. 감도가 달성되고 모델 신호가 없으면 이론은 실제 제한을받습니다. 이러한 차이는 연구 프로그램을 이질적인 진술의 연속이 아닌 누적으로 만드는 것입니다.

수행한 계산에서 다음 실험으로

이제 계산 단계에는 완결된 제한적 결과가 있다. 모형 부류를 정하고 보수적인 포락선을 유도하며 양립 가능한 매개변수를 찾고 어려운 음성 사례를 구성하고 구별하는 조건을

검증했다. 다음 실질적 단계는 바로 이 조건들을 전기 실습에 옮기는 것이다. 가중치 한계와 전기용량, 판독 부하, 시간 창, 공분산을 측정한 뒤 수치 예의 어떤 전제들이 실제 기록에서도 성립하는지 정해야 한다.

전기 프로토 타입을 확인한 후 특정 물리적 가설에 대해보다 복잡한 설치를 선택할 수 있습니다. 이러한 전환은 선택된 기기의 지오메트리에서 계산된 신호, 측정된 배경과의 비교 및 기본 설명을 구별하는 개입을 필요로 합니다. 네트워크 프로토콜의 성공은 제한된 클래스로 작업하기 위한 입증된 방법을 제공하지만, 진공과 시계, 질량 또는 빛의 상호 작용을 자동으로 지정하지는 않습니다. 이러한 연결은 개별 조건 모델에 대한 물리 챕터에서 파생됩니다.

세 번째 결과는 일관된 예측 패밀리에 대한 독립적 인 테스트입니다. 콤팩트 형상의 경우, 이들은 완전히 특정된 물질 커플링 모델에서 연관된 범위 및 스펙트럼 척도일 수 있다. 약한 무작위 잠재력 - 시계와 중력계의 공동 공간 및 시간 구조. 관측 전에 계산된 빛의 경로, 방향 및 주파수에 대한 의존성. 어떤 단계에서도 프로그램은 자신의 원래 아이디어를 반박 할 수 있습니다. 동시에 입증 된 방법, 제한 사항 및 도구 지식은 남아 있습니다. 그것은 정확하게 질적 도약을위한 기회를 만드는 작품의이 디자인입니다: 비정상적인 가설은 올바른 것으로 판명 할 수있는 기회를 가지고 있으며, 실험은 공간이 다르게 구성되어 있음을 보여줄 수있는 권리를 유지합니다.

제15장 확립한 것과 검증을 이어 가는 방법

반복할 수 있는 결과

이 책은 사용 가능한 관측에 따라 공간의 구조를 재구성의 질문으로 시작했다. 이 질문은 완료된 예제에서 여러 가지 답변을 받았습니다. 하나의 평균 측정은 때때로 차별적인 정보를 완전히 잃습니다. 풍부한 데이터를 사용하면 구조를 복원할 수 있지만 표준 오류가 결과의 의미를 변경할 수 있습니다. 추가 프로브는 손실 된 정보에 액세스하는 경우에만 도움이됩니다.

첫 정확한 예는 2장의 세 노드 망 둘이다. 스펙트럼이 같으므로 전체 열핵 대각합도 같다. 미리 정한 한 노드의 국소 여기만으로 망을 구별한다. 수치 최적화와 독립적인 결과다. 작은 행렬 둘을 대각화하고 행렬 지수함수를 계산해 검증한다.

더 큰 실험은 더 실제적인 모호함을 드러냈다. ±2% 내의 144 일반 가중치의 상관된 드리프트는 약한 추가 연결을 시뮬레이션합니다. 변경되지 않은 표준과 관련된 단일 링크 모델은 쌍 5-58을 선택하고 85,69 주변의 χ^2를 개선하며 나머지를 유리하게 만듭니다. 허용 드리프트를 포함 한 후, 설명은 $\chi^2/192 \approx 0{,}6105$ 추가 연결 하지 않고 발견 되었다. 이것은 데이터가 교정과 호환된다는 증거이며, 새로운 연결에 대한 긍정적 인 결론의 기초가 사라집니다.

여기서 제한 ±2%은 독립적인 의미를 갖는다. 검사할 원본 모델의 클래스를 지정합니다. 실제 계측기의 경우, 이러한 간격은 교정 측정을 기반으로 해야 합니다. 간격을 좁히면 제거가 쉬워 지지만 구성 요소의 정확성이 실제로 더 잘 알려진 경우에만 과학적으로 유효합니다.

7 장의 매트릭스 쉘은 로컬 피팅과 다른 종류의 결과를 생성합니다. 측정 대비가 동시 제한을 초과하면 허용된 통계적 가정 하에서 전체 제한 교정 클래스는 제외됩니다. 쉘 내부에 들어가는 것은 모델의 가능성을 보존하지만 일반적인 세트의 가중치의 존재를 증명하지는 않습니다. 호환성을 위해, 정확한 직접 계산의 수용 가능한 포인트가 추가로

제시됩니다. 로컬 옵티마이저의 실패는 계산 사실로 남아 있으며 제외 범위를 대체하지 않습니다.

두 번째 탐침이 더한 것

새 두 탐침 예는 서로 다른 알려진 기본 연산자를 사용하고 연결망의 마주 보는 면에 접근한다. 개별 자료 집합에는 허용 쌍 52개와 48개가 남지만 공동 필요조건에는 쌍 5-58 하나가 남는다. 공통 경우의 제약 맞춤은 입력값 0,3 s^{-1}에 대해 $g \approx 0{,}3053\ s^{-1}$과 $\chi^2/384 \approx 0{,}7669$를 준다. 음이 아닌 결합 하나, 알려진 노드 대응, 탐침 사이 정해진 신호 세기 관계를 갖는 부류의 결과이다.

첫 채널을 배율 변환한 복제는 새로운 구조 정보를 훨씬 적게 준다. 잡음 대조 실험에는 쌍 51개가 남는다. 잡음이 없으면 원래 채널과 배율 변환 복제 모두 같은 쌍 44개를 유지한다. 독립 반복은 정확도에 유용하지만 시간과 진폭 단위를 바꾼다고 없는 공간 정보가 생기지는 않는다.

가장 어려운 대조는 두 탐침의 참 쌍이 5-58과 6-57로 다를 때 나타났다. 원래 포트의 공동 분석에는 잘못된 혼합 쌍 5-57이 남는다. 공통 모형의 정확한 맞춤조차 잡음 안에 들어간다. 따라서 유한 자료 집합에 쌍 하나가 남았다는 사실만으로 공통 구조의 물리적 가정이 확인되지는 않는다.

이 구성적 예시를 연구한 뒤 추가 포트 배치를 선택하고 새 잡음 계열 전에 고정했다. 두 탐침 모두에 $s = 0{,}3\ s^{-1}$에서 노드 0, 5, 6, 15, 48, 57, 58, 63을 포함한다. 이 대조는 참 공통 사례를 유지하면서 혼합 예시의 공통 단일 연결 부류를 배제한다. 배치가 어떻게 나왔는지는 중요하다. 이는 어려운 예시를 보기 전에 고른 설계를 맹검한 것이 아니라, 설계한 프로토콜을 새 데이터에서 검증한 것이다.

새로운 시리즈 클래스	실현의 수	추가 제어 후 결과
추가 결합 없는 제약 표류	24	24개 경우에서 교정 모형이 배제되지 않음
하나의 진정한 공통 연결	24	24개 사례에서 참 쌍이 보존됨

새로운 시리즈 클래스	실현의 수	추가 제어 후 결과
두 탐침의 서로 다른 참 쌍	24	24개 경우에서 공통 결합 하나 부류가 배제됨
지정한 공통 전자 기생 채널	24	24개 경우에서 공통 결합 하나 부류가 배제됨

이러한 96 실현은 사개의 주어진 디자인과 새로운 노이즈 발생기 값을 참조합니다. 그들은 임의의 네트워크, 알 수없는 유형의 간섭 또는 기타 교정 불확실성에 대한 오류율을 결정하지 않습니다. 그들의 목적은 잘못된 합의를 거부하는 것을 포함하여 특정 일련의 결정의 재현성을 테스트하는 것입니다.

시간 기록에서 구조로

RC 워크샵은 측정 신호에서 모델에 이르는 별도의 경로를 완성합니다. 사개의 노드와 삼개의 숨겨진 케이스는 십이개의 시계열 파일을 생성합니다. 처리는 Laplace 변환 추정치의 초기 상태, 전압 정규화, 입력 부하, 유한 창 및 공동 공분산을 고려합니다. 분석은 관측 파일과 함께 작동합니다; 제너레이터 키는 솔루션을 테스트하기 위해 별도로 사용됩니다.

선택된 콘트라스트와 로컬 컨덕턴스 범위 ±2%의 경우, 캘리브레이션 엔벨로프는 대략 11,1005-11,4398 ms입니다. 참조 케이스와 드리프트 케이스가 이 영역에 속합니다. 추가된 연결 0-3은 7,7578 ms에 대해 제공하고 로컬 클래스는 제외됩니다. 그 강도는 진정한 20 s⁻¹로 19,9974 s⁻¹으로 복원되었습니다. 여기서 차이는 전체 처리가 간단한 회로에서 검증될 수 있을 정도로 의도적으로 크다.

이 워크샵은 합성 스탠드로 남아 있습니다. 완성 된 결과는 방정식, 단위, 파일 및 알고리즘의 일관성입니다. 다음 물리 실험은 채택된 부하, 소음 및 교정 모델이 조립된 회로를 얼마나 잘 설명하는지 확인하는 것입니다. 차이가 있는 경우 먼저 측정 모델을 확장하고 테스트 사례를 반복해야 합니다.

물리 모형이 측정 가능한 귀결을 얻었다

콤팩트 방향의 연구는 이제 모드 스펙트럼을 선택한 스칼라 탐침의 정적 및 동적 응답과 연결한다. 정적 예에서는 발생원과 검출기의 유한 크기를 고려한 뒤 간격 변조의 힘 조화 성분을 계산했다. 동적 계산은 전파 문턱을 보여 준다. 어떤 특성이 실제로 콤팩트성에서 나오며 어떤 특성에 추가 공진기나 장비 결합 법칙이 필요한지 검증할 수 있다.

시계 예에서는 중력계와의 혼합 채널을 포함한 공동 신호 스펙트럼의 모든 블록을 유도했다. 판독 채널을 유지하면서 시계 센서의 물리적 위치를 교환해 입력 신호와 지정한 짝대칭 전자 교란을 분리했다. 선택한 교란의 성질에 근거한 대조이다. 같은 대칭을 가진 공간적 환경 원인에는 자체 측정이 필요하다.

린들러 예는 기하학적 해석을 제한한다. 곡률 텐서가 영이어도 시계 흐름의 기울기와 가속 장비의 판독값이 존재할 수 있다. 따라서 일관된 시계 및 가속도 신호는 우선 공통 관측 모형을 검증한다. 곡률을 추론하려면 기준계 운동을 고려하고 조석 정보가 필요하다.

간섭계 연구는 선택한 횡방향 무대각합 평면파 부문과 예시 자유 거울 영역에서 정확한 응답함수까지 전개했다. 저주파 근사를 유한한 광행 시간과 비교했다. 특정 주파수의 민감도 저하는 장 스펙트럼을 측정 위상 스펙트럼과 직접 같게 부를 수 없는 이유를 보여 준다. 수치 예산은 선택한 배치의 요구를 정하며 실제 제작 장치에서 측정한 잡음을 대신하지 않는다.

세 가지 경우 모두에서, 장치의 이름보다 더 많이 얻어진다: 모델 파라미터로부터 판독값에 대한 계산된 경로가 있다. 매개 변수의 물리적 허용 가능성을 확인하고, 독립적인 보정 및 자연의 신호 검색은 다음 실험 작업을 형성합니다.

직접 얻은 결과의 범위

이 서술은 참고문헌에 제시한 알려진 행렬 항등식과 선형 응답 이론, 스펙트럼 방법, 물리 모형을 사용한다. 연결망의 공동 복원과 상관관계의 기하학적 해석에도 선행 문헌이 있다. 여러 탐침을 결합했다는 사실만으로 과학적 우선권이 확립되지는 않는다.

수행한 계획의 구체적 내용은 제한된 실험을 일관되게 설정하는 데 있다. 교정 부류를 명시하고 자료로 모호함을 제시하며 배제 포락선과 맞춤을 구별하고 거짓 두 탐침 일치를 별도 작용으로 검증하고 측정 절차를 시간 기록까지 전개했다. 이 요소들은 같은 입력 자료에서 재현하고 다른 알고리즘과 비교할 수 있다.

독립적 인 연구로서 출판은보다 집중적 인 질문을 요구할 것입니다. 예를 들어, 특정 포트 선택이 고정 수의 측정에 대한 최악의 교정 모호성을 얼마나 줄입니까? 또는 미리 정의된 두 연결 클래스를 분리하기 위해 어떤 추가적인 대비가 보장됩니까? 이러한 질문은 정리, 반례 또는 재현 가능한 수치 비교로 대답 할 수 있습니다. 그들의 공식은 시험되고 있는 참신의 주제를 지정한다.

다음 물리 실험

첫 실용적 단계는 작은 RC 연결망을 조립하고 부록 E의 절차를 재현하는 것이다. 대조 변경을 공개하기 전에 원래 전기용량과 전도도, 부하, 잡음을 측정하고 오차 모형과 판단 규칙을 고정해야 한다. 이어 기준과 허용 표류, 추가 결합을 검증한다. 계산 정확도는 반복 기록의 실제 산포와 비교해야 한다.

더 큰 네트워크로의 전환은 작은 체인에서 전체 체인을 확인한 후에 정당화됩니다. 포트 수, 위치 및 운전 모드는 경쟁 모델을 구별하는 능력에 따라 선택됩니다. 노이즈 감소는 원하는 차이가 측정되는 한 유용합니다. 두 클래스가 동일한 사용 가능한 데이터를 제공하는 경우 실험 자체를 변경해야 합니다.

콤팩트, 클럭 및 간섭계 분기의 경우 다음 단계는 해당 예산에 의해 결정됩니다. 계산에 지정된 전송 기능과 간섭을 측정 할 필요가 있습니다. 그러면 알려진 기준 신호를 도입하고 진폭, 공간 패턴 및 시간 의존성을 복구하기 위한 테스트를 수행하는 것이 유용합니다. 이러한 입력의 성공은 획득 경로 및 분석을 검증하여 가능한 자연 신호의 출처를 분리합니다.

공간 물리학의 열린 질문

완성된 예제 외에도 알 수 없는 참조 토폴로지, 무제한의 숨겨진 노드, 몇 가지 약한 링크, 프로브와 일반적인 개체 간의 미지의 연결 법칙 및 불완전한 교정이 남아 있습니다. 이러한 조건에서, 대안의 클래스를 재정의 할 필요가있을 것이다. 주어진 수식은 문제를 설정하는 데 도움이되지만 모든 장치에 대한 자동 솔루션을 제공하지는 않습니다.

더 깊은 문제는 유효 연산자에서 근본 기하 구조로의 전환이다. 동역학과 여러 장의 일관성, 인과성, 알려진 물리 메커니즘과의 비교를 견디는 관측 귀결이 필요하다. 전기 유사체에서 발견한 결합은 유사체의 성질을 확립한다. 공간 구조에 관한 주장에는 그에 맞는 물리 실험이 필요하다.

진전은 자료의 저항을 받을 만큼 질문이 정확해지는 곳에서 시작한다. 한 측정 배치는 두 연결망의 차이를 잃고 다른 배치는 이를 되찾는다. 한 모형은 표류를 새 결합 탓으로 잘못 돌리고 확장한 대조는 그 오류를 발견한다. 가정에서 구별하는 실험으로의 이 전환이 공간의 후속 연구의 실용적 토대이다.

부록 A 수학적 관례

기호와 단위

서로 다른 물리학 분야에서 같은 기호가 다른 뜻을 갖기도 한다. 이 책에서 네트워크 연산자는 L, 간섭계 팔의 물리적 길이는 ℓ 또는 명시적으로 적은 길이로 나타낸다. 매개변수 s는 라플라스 변환에 속한다. 주파수 f는 헤르츠로 측정하며 각주파수 ω는 2πf와 같다. 연속체 열핵의 확산 매개변수 σ는 길이 제곱의 차원을 가질 수 있지만, 전기 유사계의 시간 t는 초로 측정한다. 정규화 계수 없이 둘을 동일시해서는 안 된다.

기호	의미	사용된 모델의 단위
L	규격화한 확산 연결망의 라플라시안	s^{-1}
g	결합 세기	s^{-1}
G(s)	정규화된 응답 행렬	s
s	라플라스 변환 매개변수	s^{-1}
K	전기 전도도 행렬	지멘스
C	전기 모델에서 노드 정전 용량 또는 정전 용량 매트릭스	패럿
R	콤팩트한 방향 반경	m
q_n	모드의 역공간 척도	m^{-1}
q	시계 모형의 퍼텐셜 요동 $\delta\Phi/c^2$	1
A	시계 모형의 장 q의 제곱평균제곱근 진폭	1
ℓ과 τ_c	시계 모형의 상관 길이와 상관 시간	m 및 s
S(f)	전력 스펙트럼 밀도	Hz 당 신호 단위의 제곱

기호	의미	사용된 모델의 단위
τ = bᵀG₀b	7 장에 있는 연결 변화 스칼라; 쌍 및 s에 달려 있습니다	s
통계 테스트에서의 C	측정 오류의 공분산 행렬	측정된 신호 단위의 제곱
A₀ = L₀ + sI	제7장의 연결망 방정식 행렬	s⁻¹
σ 등록 잡음	행렬 응답 오류의 표준편차	s
δₑ와 ε	가중치의 상대 변화와 그 절댓값의 한계	1
ηₐ	공통 매개변수 g와 탐침 a의 결합을 정하는 알려진 인자	1
aᵀG(s)a	규격화한 a의 측정 대비	s
통계 모형군의 α	주어진 잡음 모형에서 공동 한계 중 하나 이상을 벗어날 허용 확률	1
유카와 기여의 α 및 모드 타워의 β	상호 작용의 상대적인 진폭; 통계 α와 별도로 결정됩니다.	1
K(t) = exp(−Lt)	규격화한 연결망의 펄스 응답; 전기 행렬 K와 구별됨	1
HVI(s)	전류에서 전압으로의 전달	옴
Hφ(f)	선택한 필드 진폭에서 위상으로 전송	장 단위량당 rad

그래프 스칼라 τ = bᵀG₀b의 단위는 시간이다. 시계의 q = δΦ/c²는 무차원이다. K의 서로 다른 의미도 해당 위치에 명시한다. 전기 전도도 행렬의 단위는 지멘스이고 규격화한 연결망의 펄스 응답 K(t)는 무차원이다. 장을 옮길 때에는 글자가 같다는 사실보다 양의 정의가 중요하다.

정사각행렬은 측정량 벡터에 작용한다. 전압망에서는 모든 노드의 전압이 벡터에 들어 있다. 응답행렬은 매개변수 s를 고정했을 때 여기 벡터와 응답 벡터를 연결한다.

대각성분은 작용을 가한 같은 노드의 응답이며 비대각성분은 다른 노드의 응답이다. 전치는 위첨자 T로, 복소행렬의 에르미트 켤레는 문맥에 따라 별표와 전치를 함께 쓰거나 기호 †로 나타낸다. 실수 대칭 망 모형에서는 이 구별이 단순해진다.

행렬의 프로베니우스 노름은 각 원소 절댓값 제곱의 합에 제곱근을 취한 값이다. 상대 오차는 결합률과 응답 변화, 전체 응답 중 대상을 명시해야 한다. 주요 64노드 실험에서는 기준에 대한 변화 ΔG를 분석한다. RC 실습에서는 전체 G의 정확도를 따로 보여 주며 결합의 판단은 구별하는 대비와 모형 비교로 한다. 전체 응답의 작은 오차가 약한 추가 성분의 큰 상대 오차를 감출 수 있다.

$$\| M \|_F = \left(\sum_{i,j} |M_{ij}|^2 \right)^{1/2}, \qquad \varepsilon_M = \frac{\| M_{\text{pred}} - M_{\text{true}} \|_F}{\| M_{\text{true}} \|_F} \tag{A.1}$$

확률과 스펙트럼에 대하여

이웃 결합의 가중치가 음이 아닌 연결망의 양의 라플라시안은 확률을 보존하는 확산을 만든다. 유한 연결망에서 규격화한 열핵 대각합은 시간이 영으로 갈 때 일로 가고 긴 시간에서는 노드 수의 역수로 간다. 따라서 로그미분으로 계산한 스펙트럼 차원은 구간 양 끝에서 영으로 간다. 가능한 차원 평탄부는 그 사이에서 찾고 연결망을 키우거나 분해능을 바꾸어도 유지되는지 검증해야 한다.

양자 유니터리 전파와 통상 확산은 다른 시간 발전 연산자를 쓴다. 유도 없이 양자 상태의 생존 확률을 열핵 대각합 대신 넣을 수 없다. 마찬가지로 파워 스펙트럼 밀도와 그 제곱근은 단위가 다르다. 무차원 변형률에서는 첫째가 Hz⁻¹, 둘째가 Hz⁻¹ᐟ²이다. 장비 민감도를 비교하려면 단측 또는 양측 스펙트럼 규약과 누적 시간, 주파수 대역도 같아야 한다.

$$P(t) = \frac{1}{N} \operatorname{Tr} e^{-tL}, \qquad P(0) = 1, \qquad \lim_{t \to \infty} P(t) = \frac{1}{N} \tag{A.2}$$

행렬 순서와 양립 가능 영역

A ⩽ B는 어떤 실수 벡터 v에 대해서도 $v^{T}(B - A)v \geq 0$이 성립한다는 뜻이다. 대칭행렬에 대한 뢰브너 순서다. 양의 정부호이면 역행렬을 취할 때 순서 방향이 바뀐다. 네트워크 실험에서는 양의 s가 라플라시안의 영 모드가 있어도 가역성을 보장한다.

$$0 \prec A \preccurlyeq B \quad \Rightarrow \quad B^{-1} \preccurlyeq A^{-1} \qquad \text{(A.3)}$$

개별적으로 허용 가능한 대조 집합은 가능한 데이터의 외부 영역을 정의합니다. 이 영역의 모든 포인트가 하나의 공유 컨덕턴스 벡터에 의해 생성되는 것은 아닙니다. 따라서, 나머지 후보는 쉘에 의해 배제되지 않는 상태를 수신한다. 정확한 포워드 모델을 통해 계산된 구체적인 실현 가능한 매개 변수 집합은 호환성에 대한 추가적인 수치적 증거를 제공합니다.

표의 χ^{2}/N 값은 레코드 수당 잔차의 정규화된 제곱의 합계를 의미합니다. 여기서 N은 파라미터를 선택하고 구조를 선택한 후 자유도의 수로 대체되지 않는다. 이 값은 나머지의 척도를 비교하는 데 편리하지만 그 자체로는 발견의 준비 확률을 구성하지 않습니다.

부록 B 계산 실험의 반복

자료 묶음의 구성

계산 실험을위한 초기 데이터 및 프로그램은 첨부 키트에 제공됩니다. 프로그램은 상대 경로를 사용하므로 디렉토리 구조는 보존되어야 합니다. 수치형 그래프는 동일한 공식과 데이터를 사용하여 재현되며, 장치의 일러스트레이션은 개념으로 표시됩니다.

프로그램	무엇이 재현되는가.	주요 결과
revision2/code/foundations.py	노드 셋, 등스펙트럼 쌍과 구	results/foundations.json
revision2/code/math_revision.py	제약 교정, 두 탐침, 어려운 대조와 새 실현 96개	results/math_revision.json
revision2/code/physics_revision.py	콤팩트 응답, 시계 혼합 스펙트럼과 간섭계	results/physics_revision.json
revision2/code/rc_practicum.py	소형 RC 스탠드의 시계열 기록 생성 및 처리	data/rc 및 results/rc_analysis.json

세 번째 열의 결과 이름은 revision2 디렉토리에서 계산됩니다. 프로그램은 수학 모델에서 데이터를 만듭니다; CSV 파일을 갖는 것은 실험실 항목으로 합성 항목을 설정하지 않습니다. 소프트웨어 환경에 대한 실행 명령 및 요구 사항은 계산 지침에 나와 있습니다.

프로그램들은 계산 실험을 반복하고 해당 파일에 결과를 보존한다. 별도 프로그램 book/study_v02.py는 실현 460개 계열을 재현하며 실행 시간이 더 오래 걸린다.

재현 정확도와 탐색 검증

난수 생성기의 초기 상태, 잡음 매개변수와 데이터 취득 순서는 프로그램에 기록되어 있다. 환경이 다르면 선형대수와 최적화 결과의 마지막 자릿수가 달라질 수 있다. 따라서

검증에서는 비교를 위해 원래 결과를 보존하면서 선택한 쌍, 물리 단위, 제약 경계와 명시된 수치 정밀도를 대조해야 한다.

별도의 탐색 검증은 저장된 시드와 생성 순서로 원래 자료 세 묶음을 재현한다. [0; 3] 구간의 제약 스칼라 최소화와 구간 양 끝을 사용하여 2016개 쌍 모두를 검사한다. 선택된 쌍은 빠른 탐색의 결과와 일치하며, 결합 세기 추정치의 차이는 10^{-7} s^{-1}보다 작다. 기록 두 개에서는 이전 수치 차이가 제시된 자릿수까지 일치했고 첫 번째에서는 마지막 자릿수가 달라졌다. 두 결과를 수치 계산 조건과 함께 보존한다.

이 검증은 명시된 자료에 관한 것이다. 가능한 모든 잡음 실현에 대해 탐색의 전역 최적성을 증명하지는 않는다. 새로운 배제 결론에는 행렬 경계를 사용하고, 국소 맞춤은 별도로 허용 가능한 수치 예를 제시한다.

시간 기록 파일의 재분석

generate 모드는 기록과 별도의 정답 키를 생성한다. analyse 모드는 키를 읽지 않고 기존 파일과 공통 교정 정보를 처리한다. 전체 모드 all은 합성 CSV를 새로 생성하고 분석한 뒤 정답 표지를 공개하고 그림을 만든다. 따라서 직접 얻은 기록에는 analyse와 별도로 지정한 자료 디렉터리를 써야 한다. all 모드는 시범 계산의 재현용이다. 자체 기록의 형식과 장비 공분산은 부록 E에 따라 정해야 한다.

물리 실험에서는 시드 하나만으로 재현성을 보장할 수 없다. 연결 회로도, 펌웨어 버전, 여기 모드, 원래 교정값, 타임스탬프와 수정하지 않은 기록이 필요하다. 부록 E는 첫 소형 실험 장치에 충분한 자료 묶음을 설명한다. 합성 자료 묶음의 파일은 처리와 형식의 본보기다.

부록 C 검증할 주장의 지도

결과와 적용 조건

이 표는 주요 결과를 그 지위 및 결론을 바꿀 수 있는 자료와 연결한다. 재독할 때 참고하도록 마련했다. 자세한 전제, 규격화와 실험 구성은 해당 장에 있다.

주장	지위와 전제	확인 또는 제한
스펙트럼 인덱스는 고유하게 구조를 결정하지 않습니다.	2 장의 정확한 삼 노드 예	동일한 스펙트럼과 다른 K_{11}가 직접 계산됩니다.
드리프트는 약한 새 연결을 시뮬레이션 할 수 있습니다.	±2%에서 생성 된 예제와 주어진 노이즈	모든 가중치와 허용 가능한 Hcal 맞춤을 제시함
전역 맞춤 없이 교정 모형군을 배제할 수 있다	주어진 경계와 오차 분포에 대한 행렬 포락선 및 동시 구간	교정 간격 또는 공분산을 변경하려면 재계산이 필요합니다.
두 번째 탐침은 후보 쌍의 집합을 줄일 수 있다	알려진 연산자 둘, 노드 식별 및 주어진 진폭 관계	배율만 바꾼 복제와 실제 쌍이 서로 다른 경우를 별도로 검증함
거짓 일치는 추가 대조로 드러난다	개발 후 고정한 절차. 조건부 모형군 넷에 각각 실현 24개	다른 쌍과 교란에는 새로운 검증이 필요하며 보편적인 빈도는 추정하지 않음
RC 네트워크 응답은 시계열 파일에서 추출됩니다.	주어진 부하와 공분산을 사용하는 합성 시험 장치	물리 장치에서는 판독과 드리프트 모형을 검증해야 함
콤팩트 모형은 정적 및 동적 기여의 계단 구조를 예측한다	선택된 스칼라 연산자 및 소스와의 관계	통상적인 매개자와 실험 한계를 같은 매개변수로 비교함
혼합 시계 신호의 기하를 계산할 수 있다	주어진 공간 커널, 대역과 필터	장 및 환경 교란과 구별되지 않는 경우에는 추가 채널이 필요할 수 있음
시계 진행률의 기울기로 곡률이 정해지지는 않는다	린들러의 정확한 예	시계 진행률의 기울기가 영이 아니어도 곡률 텐서는 영임
간섭계에는 응답이 떨어지는 주파수가 있다	선택한 평면 TT파와 자유 거울 조건	광학계나 역학 조건이 다르면 다른 전달함수가 필요함

신호의 기하학적 해석은 특정 물리적 모델과 사용 가능한 대안의 테스트가 필요합니다.

부록 D 주요 개념 용어집

다시 읽을 때의 개념

내재 기하학. 연구하는 공간 자체의 수단으로 거리와 각도, 곡률을 기술하는 것이다. 그 기하 구조가 들어 있다고 여기는 외부 공간을 가정할 필요는 없다.

측지선. 계량과 해당 운동방정식으로 정해지는, 기하 구조에서 국소적으로 특별한 선이다. 구면에서는 대원호가 측지선이다. 그 위의 임의 두 점 사이에서 전역적으로 가장 짧은 경로여야 하는 것은 아니다.

곡률. 유한 영역에서 기하 구조가 국소적으로 평탄한 구조에서 벗어나는 성질이다. 표면의 굽음을 외부에서 보지 않고도 방향의 평행이동과 측지선의 거동, 거리 측정으로 연구할 수 있다.

위상. 적절한 종류의 연속 변형에서 유지되는 연결성과 공간의 전역 구조의 성질이다. 거리나 각도의 구체적 값과는 다르다.

콤팩트한 방향. 콤팩트 다양체로 기술되는 공간 방향이다. 여기서 다루는 가장 단순한 모형에서는 유한한 반지름의 원으로 닫힌다. 반지름이 작으면 추가 모드에 낮은 에너지 관측으로 접근하지 못할 수 있다.

합성 차원. 내부 상태나 제어 매개변수의 조직된 집합으로, 상호작용이 추가 방향의 수학적 구조를 재현한다. 장비에 구현했다고 주변 공간의 좌표 수 자체가 늘지는 않는다.

스펙트럼 차원. 열핵 대각합이나 엄밀히 정의한 다른 스펙트럼 대상의 척도 지수다. 값은 기하 구조와 전파 연산자, 선택한 척도 범위에 의존한다.

망의 라플라시안. 노드 사이 결합률로 구성한 행렬이다. 양의 가중치를 가진 대칭 망에서는 확산 교환을 기술하며 음이 아닌 스펙트럼을 갖고 균일한 모드를 보존한다.

레졸벤트. $(L+sI)^{-1}$ 형태의 역행렬 또는 연산자다. 동역학 연산자의 구조를 측정 가능한 변환 응답에 연결한다.

랭크. 행렬의 상공간에서 선형 독립인 방향의 수다. 이 모형에서는 제한된 독립적 추가 수가 응답 변화 랭크의 상한을 정한다. 역방향 추론은 일반적으로 성립하지 않는다. 관측 랭크가 작다고 숨은 섭동 수가 정해지지는 않으며 물리적 차원의 수와 같지도 않다.

크론 축약. 슈어 보완으로 선형 망의 내부 노드를 제거하는 것이다. 외부에서 본 축약 망에는 원래 계의 직접 연결과 대응하지 않는 결합이 있을 수 있다.

등스펙트럼성. 두 연산자나 기하학적 대상의 스펙트럼이 같은 성질이다. 모양이 달라도 등스펙트럼일 수 있으므로 공명 집합이 언제나 기하 구조를 유일하게 정하지는 않는다.

식별 가능성. 접근 가능한 자료에서 명시한 모형군 안의 성질이나 매개변수를 유일하게 정할 수 있는 성질이다. 수치 알고리즘의 정확도만이 아니라 측정 설정과 전제에 의존한다.

교정. 검출한 양과 물리적 작용의 관계를 그 관계의 불확실성까지 포함해 정하는 것이다. 알려지지 않은 교정 오차가 연구 대상의 변화를 모사할 수 있다.

영가설 모형. 추가 효과가 필요한지 검증할 기준 기술이다. 모든 운동이 이상적으로 없다는 것만이 아니라 관련된 알려진 신호와 잡음을 포함해야 한다.

스펙트럼 밀도. 선택한 변환 관례에서 신호의 파워나 공분산을 주파수별로 나타낸 분포다. 단위와 주파수 대역을 고려하지 않고 진폭과 비교해서는 안 된다.

지연 응답. 인과 순서를 고려했을 때 작용 뒤 관측량이 변하는 것이다. 준비한 상태에서 두 양이 상관된 것과는 다르다.

수동성. 정한 입력과 출력 아래 받은 에너지나 저장해 둔 에너지보다 더 많은 에너지를 내놓지 않는 계의 성질이다. 유사체 장비에서 자기발진을 거짓 신호 원인에서 배제하는 데 도움이 된다.

반증 가능성. 미리 정한 조건에서 주장과 양립하지 않는 관측 결과가 존재하는 성질이다. 자유 매개변수를 더해 어떤 결과든 설명할 수 있으면 검증 가능성이 약해진다.

적용 범위. 사용하는 기술이 정당화되는 척도와 상태, 조건의 집합이다. 그 범위 안에서 성공한 모형이라고 자연 전체를 기술할 권한이 자동으로 생기지는 않는다.

측정 대비. 모형들의 구체적인 차이를 검증하기 위해 미리 정한 판독값 조합이다. 행렬 실험에서 $a^{\mathrm{T}}\mathrm{Ga}$는 규격화한 같은 공간 분포로 여기하고 판독하는 것에 해당한다.

뢰브너 순서. 모든 이차형식의 부호로 대칭행렬을 비교하는 순서다. 허용 가중치를 하나하나 탐색하지 않고 연산자군 전체와 그 역행렬에 한계를 줄 수 있다.

외부 양립 가능 영역. 채택한 오차 아래 주어진 부류의 모든 자료를 포함하는 필요조건 집합이다. 그 영역에 들어가도 모든 좌표를 동시에 재현하는 한 모형의 존재가 보장되지는 않는다.

수치적 양립 증거. 허용 범위 안의 구체적 매개변수로, 정확한 순방향 계산이 정한 규칙에 따라 자료와 맞는 경우다. 국소 최적화 알고리즘이 이런 결과를 찾지 못했다고 해가 없다는 증명이 되지는 않는다.

결맞음. 두 신호의 교차스펙트럼과 각각의 자기스펙트럼으로 구성한 규격화한 양이다. 선택한 주파수 대역에서의 일치를 나타낸다. 값이 높다고 물리 원인이 정해지지는 않으며 신호 진폭 평가를 대신하지도 않는다.

공동 공분산. 여러 추정 사이 의존성을 고려한 오차행렬이다. 한 시간 기록에서 서로 다른 변환을 계산할 때 특히 중요하다.

따로 남긴 측정. 검증할 매개변수를 정하는 데 쓰지 않은 자료다. 중요성은 잡음의 독립성만이 아니라 경쟁 예측의 차이에 얼마나 민감한지에 달려 있다.

맹검 대조. 결과를 고정할 때까지 검증할 변화를 결정 절차에 숨기는 실험 방식이다. 합성 생성기와 분석의 분리는 처리 논리를 검증한다. 하드웨어 맹검 실험에는 변화의 독립적인 배정도 필요하다.

부록 E 전압에서 결합 복원까지의 실습

과제와 측정 파일

이 실습의 과제는 노드 넷인 전기회로의 시간 기록으로 허용 드리프트를 지닌 통상 결합만으로 충분한지 검증하는 것이다. 문자 표지가 붙은 전압 자료 세 묶음이 주어진다. 분석에는 미리 기록한 같은 규칙을 사용한다. 분석이 끝나면 별도 파일이 각 기록을 생성한 구성을 공개한다. 이는 자료와 정답 표지를 소프트웨어로 분리한 것이다. 모든 신호는 생성된 것이며 이 실험에는 물리 장치를 사용하지 않았다.

통상 변 0-1, 1-2, 2-3의 전도도는 w_e/R_0로 나타낸다. $R_0=100$ kΩ이며 $0{,}98 \le w_e \le 1{,}02$다. 같은 정전용량 $C_0=100$ nF에서 공칭 결합률 $\kappa = 1/(R_0 C_0) = 100\ s^{-1}$를 얻는다. 추가 결합은 변 0-2, 0-3, 1-3 중 하나이며 결합률은 0부터 60 s^{-1}까지 허용한다. 대조 구성에는 결합률 20 s^{-1}인 0-3 결합을 넣었다.

파일 또는 디렉터리	내용
revision2/data/rc/calibration.json	공칭값, 초기 전압 행렬, 부하, 시간 간격, 관측 창, 잡음과 판정 규칙
sample_A_source_0.csv 및 같은 형식의 파일	초기 상태 준비 하나에 대한 시간과 전압 넷
revision2/data/rc/truth_key.json	실제 매개변수와 시드. 분석은 이 파일을 읽지 않음
revision2/results/rc_analysis.json	G 추정치, 전체 공분산, 맞춤과 정답 표지 없는 판정
revision2/results/rc_validation.json	정답 표지 공개 후 실제 응답과 비교

CSV는 총 12개로, 준비 넷씩인 자료 세 묶음이다. 각 파일의 머리글은 time_s,v0_V,v1_V,v2_V,v3_V로 같다. 0부터 0,25 s까지 0,00005 s 간격으로 취득한 표본 5001행이 들어 있다. source 번호는 준비한 상태를, v 번호는 관측 노드를 뜻한다. 이 구분은 응답 행렬의 행과 열을 혼동하지 않게 한다.

교정에서 행렬 W의 단위는 볼트다. j번째 열은 준비 j의 실제 초기 벡터다. 대각 원소는 1 V에 가깝고 이웃 원소는 0,0015 V이며 나머지는 영이다. 처리가 이상적인 단일 충전이라는 가정에 의존하지 않도록 작은 혼합을 의도적으로 과제에 포함했다.

준비와 물리적 회로

하드웨어 구현에는 그림 54처럼 공통선에 대한 축전기 넷과 교체 가능한 저항 셋을 쓴다. 노드마다 별도의 전압 경로가 있다. 동시 판독이 바람직하다. 다중화기를 쓰면 지연을 각 경로의 시간 격자에 포함하고 적분 전에 고려해야 한다. 입력저항과 기생 정전용량은 케이블을 연결한 상태에서 측정한다.

기록 전에 낮은 임피던스의 원천들이 네 노드에 지정한 전압을 유지한다. 이어서 공통 시작 사건으로 모든 원천을 분리하고 높은 임피던스의 측정기들은 관찰을 계속한다. 초기 전압은 같은 스위칭 조건에서 교정을 반복하여 정해야 한다. 이상적인 상태 e_j는 필요 없다. 충분히 구별되는 W의 네 열이면 된다. 이 열들의 재현성과 그 오차에 대한 독립적인 평가가 중요하다.

연결망을 자유롭게 둔 채 노드 하나만 전압원에 직접 연결하면 필요한 초기 상태가 만들어지지 않는다. 전압이 이웃으로 전달될 시간이 있기 때문이다. 따라서 모든 노드의 전압을 동시에 유지하거나 실제로 얻어진 전체 벡터를 측정한다. 스위치는 연결망의 주요 동역학보다 빠르게 열려야 하며, 과도 스파이크는 기록하거나 W에 포함해야 한다. 기록을 늦게 시작하면 새 시간 원점과 이에 해당하는 W를 일관되게 정한다.

실험 사이의 복원은 모든 노드를 공통선으로 능동 초기화하여 수행한다. 자연스럽게 기다리는 것만으로는 부족하다. 이상적인 비접지 연결망은 총전하를 보존하며 1 GΩ 부하는 약 100 s의 누설 시간을 준다. 다음 초기 상태를 준비하기 전에 잔류 전압을 점검한다. 각 계열이 끝나면 원래 구성으로 돌아가 연결 변화와 느린 드리프트를 구별한다.

스위칭 순서와 높은 임피던스 관측의 연속성은 그림 59에 제시했다.

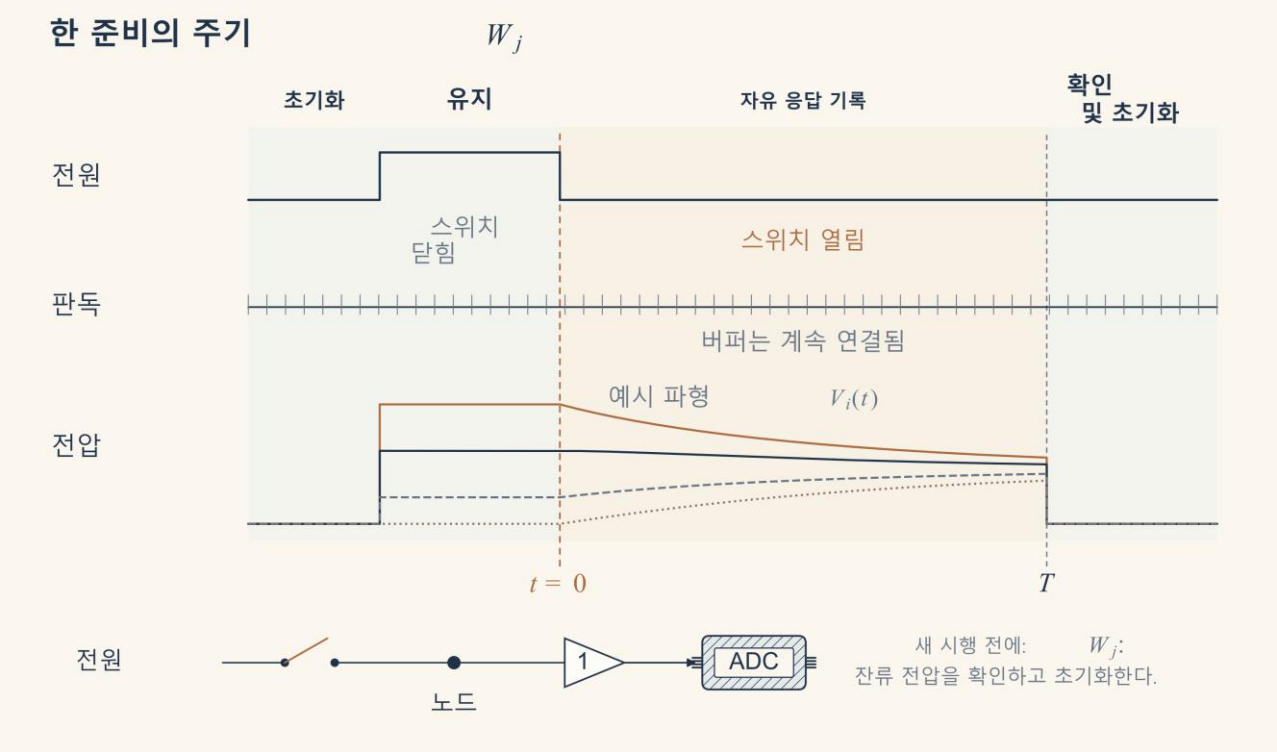


그림 59. 주기는 능동 초기화, 초기 전압 넷의 동시 유지, t = 0에서의 전원 동시 분리, 자유 동역학 기록을 포함한다. 버퍼와 ADC는 계속 연결된다. 이어 잔류 전압을 확인하고 다음 준비 전에 모든 노드를 초기화한다. V_i(t) 파형은 공칭 회로의 예시 초기 벡터로 계산한 개념적 형태이며 첨부 CSV를 대체하지 않는다. 준비와 초기화의 지속 시간은 수치로 정하지 않았다. 자연스럽게 기다리는 것으로 공통 전하의 능동 제거를 대신할 수 없다.

매개 변수	이 계산에서	물리 실험으로 옮길 때 필요한 사항
R_0와 C_0	100 kΩ 및 100 nF	측정값과 그 불확도
입력 부하	각 노드에서 1 GΩ	저항, 오프셋과 입력 정전용량의 검증
초기 상태 준비 행렬 W	정확히 주어짐, cond(W)=1,0049	전환 후 재평가
시간 간격과 관측 창	50 µs 및 0,25 s	시간 척도와 지연의 교정
표본의 무작위 오차	0,2 mV, 독립적인 가우스 잡음	스펙트럼 및 채널 간 공분산 측정

실제 정전용량이 상당히 다르면 연산자 $C^{-1}K$와 (13.3)의 대칭형을 사용해야 한다. 프로그램에서 C_0 값만 바꾸는 것으로는 부족하다. 이 실습에서는 정전용량이 같다는 것이

검증할 전제다. 계산 파일은 이를 정확히 설정하지만, 하드웨어 절차는 필요한 오차 범위 안에서 이를 확인하거나 모형을 확장해야 한다.

전압행렬에서 규격화한 응답으로

기록한 전압 행렬을 Y(t)로 나타내자. 각 열은 초기 상태 준비 넷에 해당한다. 알려진 동일 부하 γ에서 무작위 오차가 없으면 Y(t)=exp[−(L+γI)t]W다. 오른쪽에서 W^{-1}를 곱하면 초기 상태 준비의 혼합이 제거되고, 인자 exp(γt)는 무부하 연결망의 동역학을 복원한다. 수치 예에서 γ=1/(RinC₀)=0,01 s^{-1}다.

$$\hat{\mathbf{E}}(t) = e^{\gamma t}\mathbf{Y}(t)\mathbf{W}^{-1}, \qquad \mathbb{E}\hat{\mathbf{E}}(t) = e^{-t\mathbf{L}} \tag{E.1}$$

규격화한 응답 E는 무차원이다. 이를 가중치 exp(−st)로 적분한 양의 단위는 시간이다. 여기서 매개변수 s는 양의 실수로, 적분 가중치의 감쇠를 정하며 헤르츠로 나타낸 정현파 여기 주파수가 아니다. 초기 조건이 영인 전류 측정에서는 같은 관계가 다음 형태를 갖는다.

$$\mathbf{H}_{VI}(s) = (s\mathbf{C} + \mathbf{K})^{-1}, \qquad \mathbf{G}(s) = C_0\mathbf{H}_{VI}(s), \qquad [H_{VI}] = \Omega,\ [G] = \mathrm{s} \tag{E.2}$$

이 공식의 K는 선택한 무부하 망에 해당한다. 같은 입력 부하 γ에서 전류 응답을 측정했다면 HVI,meas(s)=G(s+γ)/C₀다. 원래 G를 복원하려면 인수를 옮겨 G(s)=C₀HVI,meas(s−γ)로 해야 한다. 여기서는 s>γ를 쓴다. 초기 상태 방법에서는 같은 이동을 가중치 exp[−(s−γ)t]로 구현한다.

학습용 망 연산자에서 통상 변의 결합률을 일로 쓰고 실제 시제품의 결합률은 κ라면 Lphys=κLunit이다. s와 응답행렬 전체도 함께 척도를 바꾼다. 예를 들어 κ=100 s^{-1}일 때 sunit=0,2는 20 s^{-1}에 대응한다. 물리적 G는 원래 망의 시간 단위로 계산한 값보다 백 배 작다.

$$\mathbf{L}_{\mathrm{phys}} = \kappa\mathbf{L}_{\mathrm{unit}}, \qquad s_{\mathrm{phys}} = \kappa s_{\mathrm{unit}}, \qquad \mathbf{G}_{\mathrm{phys}}(\kappa s) = \kappa^{-1}\mathbf{G}_{\mathrm{unit}}(s) \tag{E.3}$$

기준에 대한 규격화도 엄밀히 다뤄야 한다. 여기서는 절대 전압에서 G를 추정하고 교정 모형으로 공칭 행렬 G₀를 계산한다. 따라서 ΔG=G−G₀의 무작위 오차 공분산은 G의 것과

같다. 별도의 잡음 있는 기록으로 G_0를 얻으면 그 공분산이 더해지고, 교정 매개변수가 공통이면 교차항이 생긴다. 단순한 뺄셈으로 기준의 불확실성을 없앨 수는 없다.

전체 처리 순서와 그로부터 분리된 대조 정답 키 공개 분기는 그림 60에 제시했다.

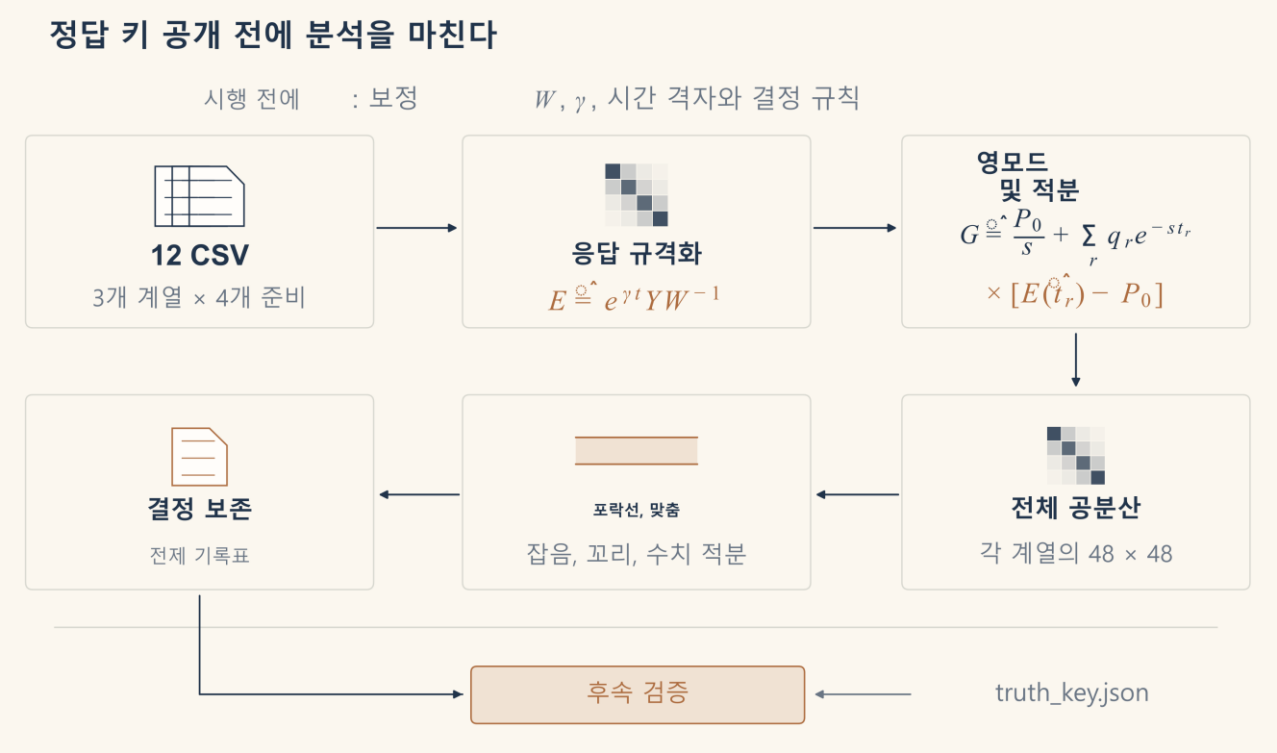


그림 60. 열두 CSV를 분석하기 전에 보정과 결정 규칙을 정한다. 전압에서 규격화한 응답을 복원하고 수치 적분 전에 알려진 영모드를 뺀 뒤 P_0/s로 해석적으로 되돌린다. 전체 공분산은 같은 기록에서 나온 행렬 성분들과 세 s값을 연결한다. 이어 보정 포락선을 검증하고 꼬리와 수치 적분을 고려하며 진단 맞춤을 수행하고 결정을 보존한다. truth_key.json 파일은 후속 검증에만 들어가며 분석으로 되돌아가는 경로는 없다.

유한한 창으로 충분한 이유

유한한 T까지의 적분은 레졸벤트와 다르다. 알려진 선형 연산자에서는 그 편향을 정확히 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{G}_T(s) = \int_0^T e^{-st}\, e^{-t\mathbf{L}}\, dt = \mathbf{G}(s)\left[\mathbf{I} - e^{-(s\mathbf{I}+\mathbf{L})T}\right] \qquad \text{(E.4)}$$

접지하지 않은 연결 그래프에는 모든 노드의 전압이 같은 알려진 영모드가 있다. 사영연산자 $P_0 = \mathbf{1}\mathbf{1}^{\mathsf{T}}/4$는 감쇠하지 않는다. 따라서 짧은 창 끝에서 전체 전압을 단순히

잘라서는 안 된다. 이 실험에서는 적분 전에 공통 성분을 빼고 P₀/s로 해석적으로 되돌린다. 감쇠하는 불균일 모드만 적분 대상으로 남는다.

$$\hat{\mathbf{G}}(s) = \frac{\mathbf{P}_0}{s} + \sum_{r=0}^{M} q_r \, e^{-s t_r} \left[\hat{\mathbf{E}}(t_r) - \mathbf{P}_0 \right] \tag{E.5}$$

가중치 q_r는 복합 심슨 공식의 가중치다. 양 끝에서는 h/3, 내부 홀수 노드에서는 4h/3, 짝수 노드에서는 2h/3이다. 구간 수는 5000이다. 공칭 회로의 첫 영이 아닌 고유값은 58,5786 s⁻¹이고 최댓값은 341,4214 s⁻¹다. 통상 가중치의 하한이 0,98이면 불균일 모드는 57,4071 s⁻¹보다 느리지 않게 감쇠한다.

노름이 일이고 성분 합이 영인 선택한 대비에서, 통상 결합 가설 아래 꼬리의 절댓값은 exp[−(s+0,98λ₂)T]/(s+0,98λ₂)로 제한된다. s=20 s⁻¹이면 5,10 × 10⁻¹¹ s를 넘지 않는다. 심슨 공식 오차의 보수적 경계는 1,60 × 10⁻¹⁰ s다. 두 값 모두 대비의 무작위 표준오차 2,36 × 10⁻⁷ s보다 훨씬 작다.

$$\varepsilon_{\text{tail}} \le \frac{e^{-\left(s + 0.98\lambda_2\right)T}}{s + 0.98\lambda_2}, \qquad \varepsilon_{\text{quad}} \le \frac{T h^4}{180} \left(s + 1.02\lambda_{\max} \right)^4 \tag{E.6}$$

수치 적분 한계는 통상 전도도가 제약된 영가설에 해당한다. 스칼라 피적분함수가 감쇠 지수함수들의 양의 혼합이기 때문이다. 가설을 검증할 때 꼬리와 수치 적분 오차를 허용오차에 더한다. 실제로 넣은 특정 결합에 대해서는 프로그램이 잡음 없는 기록 처리와 정확한 역행렬도 비교한다. 그 결정론적 오차의 노름은 약 6,9 × 10⁻¹² s다.

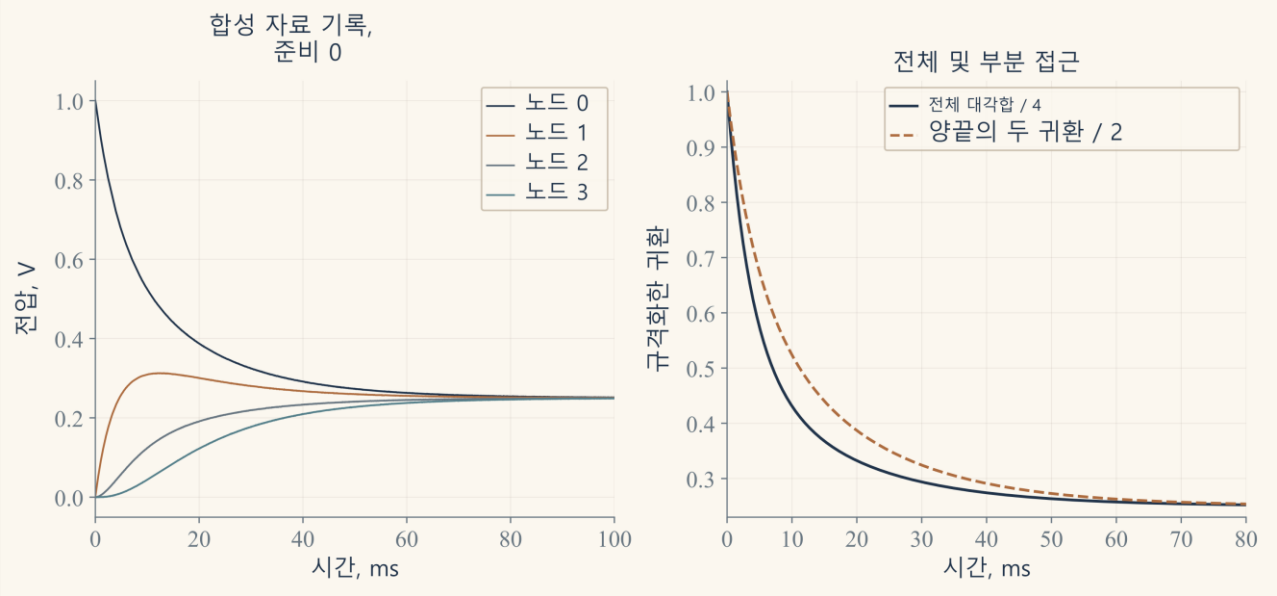


그림 61. 왼쪽은 기준 회로에서 준비 0 뒤 네 노드의 합성 전압이다. 오른쪽은 부하 없는 원래 연산자의 규격화한 전체 열핵 대각합과 양끝 귀환 둘의 평균이다. 같은 망을 써도 부분 관측은 다른 함수를 준다.

그림 61의 왼쪽 패널에서 전압은 약 사분의 일 볼트인 공통 성분에 가까워진다. G의 복원에서는 그 해석적 기여를 유지한다. 오른쪽 패널은 접근 가능한 두 귀환을 왜 전체 열대각합이라 부를 수 없는지 보여 준다. 기준 회로에서 두 함수의 최대 절대 차이는 약 0,102다. 이는 잡음이 아니라 불완전한 접근 때문에 생긴다.

하나의 시간 기록에서 공분산 구하기

원시 전압 오차 각각이 시간과 경로, 준비에 대해 독립이고 분산 σV^2를 갖는다고 하자. W의 역행렬을 취하면 복원한 서로 다른 열들의 오차가 연결되며 적분 뒤에는 서로 다른 s도 연결된다. 두 의존성을 모두 보존하려면 $M=W^{-1}$, $a_r(s)=q_r\exp[-(s-\gamma)t_r]$로 쓰면 편리하다. 그러면 개별 원소의 공분산은 다음 형태다.

$$\mathrm{Cov}\left[\hat{G}_{ij}(s),\hat{G}_{kl}\left(s'\right)\right]=\delta_{ik}\sigma_V^2(\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\mathbf{M})_{jl}\sum_r a_r\,(s)a_r\left(s'\right) \qquad \text{(E.7)}$$

관측 벡터에는 원소 48개가 있다. 세 s값마다 방향을 구별한 행렬 성분 16개다. 프로그램은 ‘s, 관측 노드, 준비’ 순서로 크기 48×48의 공분산을 구성한다. 주어진 가중치 집합과 가역적인 W에서 양의 정부호다. χ^2 계산에는 촐레스키 분해를 써서 잔차를 일관된 단위의 잡음과 비교한다.

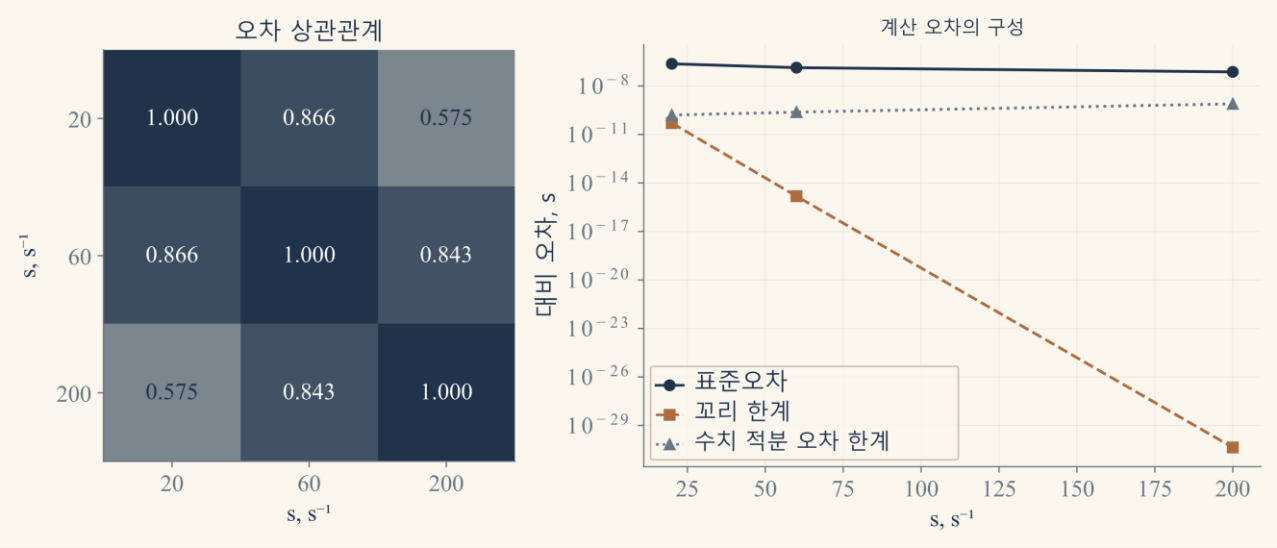


그림 62. 왼쪽은 한 기록에서 s=20,60,200 s^{-1}에 대해 구한 라플라스 적분 무작위 오차들의 상관관계다. 오른쪽은 선택한 대비의 표준오차와 꼬리 및 수치 적분의 보수적 한계다. 뒤의 한계들은 통상 전도도가 ±2% 안에 있다는 가정 아래 계산했다.

그림 62의 상관관계는 s값들이 멀리 떨어져 있어도 높다. 비대각 원소를 없애면 같은 기록을 실제보다 더 독립적인 것으로 잘못 취급하게 된다. 한 파형 기록의 적분들을 '학습용'과 '검증용'으로 나누는 것만으로 독립 잡음이 만들어지지는 않는다. 그런 검증에는 별도 기록이나 전체 공분산을 고려한 조건부 분포가 필요하다.

실제 유색 교란에서는 원래 표본의 측정된 공분산을 같은 선형 연산자로 전파하는 방식으로 식 (E.7)을 대체한다. W, γ나 이득 계수도 오차를 지닌 채 추정된다면 별도 항을 더하거나 허용 모형의 매개변수가 된다. 첨부 프로그램은 한 시계열의 상관관계를 계산하고 사용하는 과정을 별도로 검증하도록 이들을 정확히 고정한다.

미리 정한 교정 포락선

영가설 Hcal은 통상 가중치 셋이 0,98-1,02 범위에서 이루는 모든 조합을 허용한다. 각 드리프트의 독립성은 요구하지 않는다. 각 변이 양의 준정부호 행렬을 더하므로 가중치의 경계에서 연산자의 순서가 따른다. 양의 정부호 행렬의 역행렬을 취하면 부등호 방향이 바뀐다.

$$0.98\mathbf{L}_0 \preccurlyeq \mathbf{L} \preccurlyeq 1.02\mathbf{L}_0 \quad \Rightarrow \quad \left(s\mathbf{I} + 1.02\mathbf{L}_0\right)^{-1} \preccurlyeq \mathbf{G}(s) \preccurlyeq \left(s\mathbf{I} + 0.98\mathbf{L}_0\right)^{-1} \tag{E.8}$$

미리 고른 a=(1,0,0,−1)/√2에서 행렬 부등식은 z=aᵀGa의 구간을 준다. s=20 s⁻¹에서 경계는 0,01110051757과 0,01143981347 s다. 세 변 모두의 일관된 표류를 포함해 허용되는 통상 전도도 부류 전체를 덮는다. 이것이 수치 최적화 알고리즘 하나의 실패와 이 검증이 다른 점이다.

z의 오차는 같은 전체 공분산으로 계산한다. 이 자료에서는 σz=2,3572 × 10⁻⁷ s다. 구간 양쪽에 각각 5σz와 결정론적 경계 둘 (E.6)을 더하며, 총 여유는 1,1788 × 10⁻⁶ s다. 미리 선택한 가우스 대비 하나에서 표준편차 다섯 배의 여유는 알려진 꼬리 확률 의미를 갖는다. 여기서는 교육용 실험의 정해진 규칙으로 쓰이며 수많은 기하 구조를 폭넓게 탐색했을 때의 유의수준을 주장하는 것이 아니다.

확장한 구간을 벗어나면 주어진 전제 아래 Hcal을 기각한다. 이것이 가능한 모든 물리 원인 중 추가 변만이 유일한 원인임을 증명하지는 않는다. 알려지지 않은 정전용량, 비선형성, 잘못된 시간 척도나 누락한 부하는 다른 대안에 속한다. 따라서 판정에는 포함한 매개변수 명세가 따른다. 구간 안에 들어간다는 것은 이 포락선이 모형군을 기각하지 않았다는 뜻일 뿐이다. 모든 관측의 양립성을 보이려면 허용 가능한 공통 가중치 벡터 하나도 찾아야 한다. 기록 B와 C에서는 이를 찾았지만, 새 결합이 절대 없다는 결론은 나오지 않는다.

맞춤과 대조 구성의 공개

추가로 전체 48개 값에 대해 Hcal 비선형 맞춤을 하고, 후보 0-2, 0-3, 1-3에 대해 Hcal+edge 맞춤을 세 번 한다. 두 모형군에서 통상 가중치의 경계는 같다. 추가 변의 결합률은 음이 아니다. 목적함수는 전체 공분산으로 백색화한 잔차의 노름 제곱이다. 성공한 맞춤은 찾은 매개변수의 양립성을 보여 준다. 국소 결합 모형군의 전역적 배제는 풀이기의 상태가 아니라 포락선에 근거한다.

$$\chi^{2}(\theta) = (\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta))^{\mathsf{T}} \mathbf{C}_{G}^{-1} (\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta)) \tag{E.9}$$

찾은 매개변수 벡터가 차원 48의 공동 99퍼센트 잡음 타원체에 들어가는지 검사한다. 여기서는 확장 모형의 개선 검정이 아니라 허용 평균 벡터의 영역을 구성하므로 측정 수에서 맞춘 매개변수 수를 빼지 않는다. 반지름은 자유도 48인 χ²의 해당 분위수의

제곱근에 백색화한 적분 편향의 보수적 경계를 더한 값이다. 국소 결합 모형군에서는 약 8,64, 허용한 추가 변이 있는 경우에는 8,72다. 그런 점이 있으면 계산으로 얻은 양립 증거가 된다. 풀이기가 찾지 못했다는 사실 자체는 그 점이 없음을 증명하지 않는다.

기록 A에서는 국소 결합 모형이 $\chi^2/48 \approx 5{,}87 \times 10^{6}$에 이르고, 결합 0-3이 있는 모형은 0,871을 준다. 확장 맞춤의 통상 가중치는 약 1,010048; 0,990024; 1,005033이다. 추가 결합률의 추정치는 19,9974 s^{-1}다. 정답 표지를 공개하면 실제로 넣은 가중치는 1,01; 0,99; 1,005이고 결합률은 20 s^{-1}임을 알 수 있다. 이 예는 의도적으로 쉽게 구별되도록 골랐다.

기록 B는 명목 가중치 1;1;1에서 얻었다. 국소 적합은 $\chi^2/48 = 1{,}028$을 준다. 기록 C에서는 새 모서리 없이 가중치 1,015;0,985;1,01을 넣었다. 값은 $\chi^2/48 = 1{,}149$다. 두 경우 모두 작은 양의 추가 모서리가 때로 잔차를 조금 줄이지만, 규칙은 그것이 필요하다고 선언하지 않는다. 이는 작은 χ^2만을 근거로 언제나 확장 모형을 고르는 절차가 왜 잘못인지 보여 준다.

공개 후 확인	A	B	C
프로베니우스 노름으로 구한 전체 G의 상대오차	0,00186%	0,00222%	0,00197%
G 원소의 최대 절대오차	$4{,}61 \times 10^{-7}$ s	$4{,}35 \times 10^{-7}$ s	$4{,}41 \times 10^{-7}$ s
추가 변이 있는 최적 모형의 $\chi^2/48$	0,871	1,027	1,149
Hcal의 전역 포락선	위반됨	충족됨	충족됨

이는 검증용 실현 셋이며 알고리즘 전체의 오류 빈도를 통계적으로 추정한 것이 아니다. 해당 계산을 재현하도록 시드와 모든 원래 매개변수를 보존했다. 작동 범위를 평가하려면 결합 진폭, 정전용량 불확실성, 부하와 잡음을 바꾸는 계열을 미리 정해야 한다. 그 범위의 경계는 선택한 시제품과 측정 절차의 성질이 된다.

전체 대각합과 관측 가능한 포트

전체 N노드 연산자의 열핵 대각합은 N개 대각 귀환의 평균과 같다. 이를 직접 측정하려면 모든 노드의 상태를 준비하고 관측하거나 별도로 정당화한 대각합 추정법을

써야 한다. 노드 넷인 이 실습에서는 전체에 접근할 수 있으므로 그림 61 오른쪽의 두 함수를 유일하게 계산할 수 있다.

$$P(t) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{3} E_{ii}(t), \qquad P_{\{0,3\}}(t) = \frac{1}{2}\left[E_{00}(t) + E_{33}(t)\right] \qquad \text{(E.10)}$$

양 끝 포트에만 접근할 수 있으면 두 번째 함수를 측정한다. 이 함수는 회로 끝에서 뚜렷한 모드에 더 큰 가중치를 주므로 시간 의존성이 다르다. 그 로그 기울기는 선택한 관측 귀환의 지수로 기술할 수 있지만, 추가 근거 없이 전체 연산자의 스펙트럼 차원과 같다고 할 수는 없다.

노드 넷의 전체 대각합조차 넓은 거듭제곱 법칙 구간을 보장하지 않는다. 매우 짧은 시간에서는 이산성이 나타나고 긴 시간에서는 영모드가 남아 P→1/4가 된다. 소형 실험의 주된 과제는 알려진 동역학을 복원하고 측정 변환을 검증하는 것이다. 포트 여덟을 가진 노드 64개로 확장해도 관측 블록의 행렬 절차는 유지되지만 전체 열핵 대각합을 자동으로 얻지는 못한다.

교정 순서와 독립적 반복

먼저 RC회로 하나에서 시정수, 극성, 전압 척도와 시간 오차를 점검한다. 이어 추가 변 없이 노드 넷을 연결한다. 입력의 영향을 포함한 실제 정전용량, 전도도와 누설 전류를 측정한다. 초기 상태 준비를 여러 번 반복하여 평균 W와 그 변동성을 구한다. 교정 오차가 찾으려는 효과와 비슷하면 대조 구성을 처리하기 전에 허용 모형에 포함한다.

다음 단계에서는 회로를 고정하고 여기를 영으로 하여 자체 오프셋, 잡음 대역과 채널들의 공통 교란을 평가한다. 이어 정상적인 초기 상태 준비로 기준 기록을 얻는다. 극성과 진폭을 바꾸어 선형성을 검증할 수 있다. 각 작용에 대해서는 예측한 규격화 응답 자체를 비교한다. 결과를 본 뒤 계수를 임의로 다시 조정하면 검증의 독립성이 사라진다.

대조 결합은 분석자와 별도로 표지를 보존하는 운영자가 설치한다. 계열 뒤에 원래 연결을 다시 측정하면 유용하다. 기준이 바뀌었다면 순서 자체가 표류를 보여 주고 크기를

제한하게 한다. 새 시계열 검증은 새로운 준비와 기록을 사용한다. 이전 시계열의 추가 적분은 여전히 상관된 자료다.

하드웨어 인수 검증에서는 수행한 세 구성에 정전용량 하나의 작은 변화와 입력 부하 증가를 더한다. 두 추가 대조는 이 실행 가능한 예의 좁은 Hcal 바깥으로 의도적으로 나간다. 올바른 절차의 반응은 모든 이상을 새 변으로 자동 해석하는 것이 아니라 불일치를 발견하고 하드웨어 모형을 확장하는 것이다.

재현과 재분석

동반 자료 묶음으로 전체 계산을 재현할 수 있다. 합성 기록을 생성하고, 키에 접근하지 않고 분석한 뒤 별도로 정답 표지를 공개하고 그림을 만든다. 명령과 계산 환경 요건은 계산 안내서에 제시했다.

자체 기록을 분석할 때는 교정 정보와 관측 전압을 사용하며 실제 정답 표지 키는 계산에 들어가지 않는다. 파일은 명시한 형식과 전제를 따라야 한다. 유색 잡음이나 서로 다른 정전용량에는 해당 공분산 또는 동역학 모형의 수정이 필요하다.

이 결과는 구체적인 과제를 마무리한다. 전압 표본에서 초 단위의 응답을 복원하고 공동 오차를 계산했으며, 제한된 국소 결합 모형군을 검증하고 강한 대조 신호와 양립하는 설명을 찾았다. 다음 단계는 합성 교정을 측정한 매개변수로 대체하는 것이다. 바로 그때 물리 장치의 정확도에 관한 약속을 검증할 수 있게 된다.

참고문헌

[1] Albert Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. 1916. DOI 10.1002/andp.19163540702.
https://doi.org/10.1002/andp.19163540702

[2] Hermann Weyl. Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). 1912. DOI 10.1007/BF01456804.
https://link.springer.com/article/10.1007/BF01456804

[3] Jan Ambjørn, Jerzy Jurkiewicz, Renate Loll. The Spectral Dimension of the Universe is Scale Dependent. 2005. DOI 10.1103/PhysRevLett.95.171301.
https://arxiv.org/abs/hep-th/0505113

[4] Luca Bombelli, Joohan Lee, David Meyer, Rafael D. Sorkin. Space-time as a causal set. 1987. DOI 10.1103/PhysRevLett.59.521.
https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.59.521

[5] J. Abajian, Steven Carlip. Dimensional reduction in manifoldlike causal sets. 2018. DOI 10.1103/PhysRevD.97.066007.
https://arxiv.org/abs/1710.00938

[6] Petr Hořava. Spectral Dimension of the Universe in Quantum Gravity at a Lifshitz Point. 2009. DOI 10.1103/PhysRevLett.102.161301.
https://arxiv.org/abs/0902.3657

[7] Oliver Lauscher, Martin Reuter. Fractal Spacetime Structure in Asymptotically Safe Gravity. 2005. DOI 10.1088/1126-6708/2005/10/050.
https://arxiv.org/abs/hep-th/0508202

[8] Oskar Klein. Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie. 1926. DOI 10.1007/BF01397481.
https://link.springer.com/article/10.1007/BF01397481

[9] Michael Lohse, Christian Schweizer, Hannah M. Price, Oded Zilberberg, Immanuel Bloch. Exploring 4D quantum Hall physics with a 2D topological charge pump. 2018. DOI 10.1038/nature25000.
https://arxiv.org/abs/1705.08371

[10] Juan M. Maldacena. The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity. 1998. DOI 10.1023/A:1026654312961.
https://arxiv.org/abs/hep-th/9711200

[11] Shinsei Ryu, Tadashi Takayanagi. Holographic Derivation of Entanglement Entropy from AdS/CFT. 2006. DOI 10.1103/PhysRevLett.96.181602.
https://arxiv.org/abs/hep-th/0603001

[12] Mark Van Raamsdonk. Building up spacetime with quantum entanglement. 2010. DOI 10.1007/s10714-010-1034-0.
https://arxiv.org/abs/1005.3035

[13] Ryogo Kubo. Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems. 1957. DOI 10.1143/JPSJ.12.570.
https://www.jstage.jst.go.jp/article/jpsj1946/12/6/12_6_570/_article/-char/en

[14] Elliott H. Lieb, Derek W. Robinson. The finite group velocity of quantum spin systems. 1972. DOI 10.1007/BF01645779.
https://www-thphys.physics.ox.ac.uk/talks/CMTjournalclub/sources/LR.pdf

[15] Ji-Seong Chae. Covariant holographic entanglement entropy inversion to reconstruct bulk geometry. 2026. DOI 10.1007/JHEP09(2026)251.
https://link.springer.com/article/10.1007/JHEP09(2026)251

[16] Carolyn Gordon, David L. Webb, Scott Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. 1992. DOI 10.48550/arXiv.math/9207215.
https://arxiv.org/abs/math/9207215

[17] Florian Dörfler, Francesco Bullo. Kron Reduction of Graphs With Applications to Electrical Networks. 2013. DOI 10.1109/TCSI.2012.2215780.
https://arxiv.org/abs/1102.2950

[18] John Sylvester, Gunther Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. 1987. DOI 10.2307/1971291.
https://annals.math.princeton.edu/1987/125-1/p04

[19] Jack Sherman, Winifred J. Morrison. Adjustment of an Inverse Matrix Corresponding to a Change in One Element of a Given Matrix. 1950. DOI 10.1214/aoms/1177729893.
https://www.jstor.org/stable/2236561

[20] Sina Y. Caliskan, Paulo Tabuada. Kron Reduction of Generalized Electrical Networks. 2012. DOI 10.48550/arXiv.1207.0563.
https://arxiv.org/abs/1207.0563

[21] Jari Kaipio, Erkki Somersalo. Statistical inverse problems: Discretization, model reduction and inverse crimes. 2007. DOI 10.1016/j.cam.2005.09.027.
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042705007296

[22] Jan C. Willems. Dissipative dynamical systems part I: General theory. 1972. DOI 10.1007/BF00276493.
https://link.springer.com/article/10.1007/BF00276493

[23] Allan Adams, Nima Arkani-Hamed, Sergei Dubovsky, Alberto Nicolis, Riccardo Rattazzi. Causality, Analyticity and an IR Obstruction to UV Completion. 2006. DOI 10.1088/1126-6708/2006/10/014.
https://arxiv.org/abs/hep-th/0602178

[24] Patrick M. Lenggenhager 및 동료들. Simulating hyperbolic space on a circuit board. 2022. DOI 10.1038/s41467-022-32042-4.
https://arxiv.org/abs/2109.01148

[25] Gianluca Calcagni, Astrid Eichhorn, Frank Saueressig. Probing the quantum nature of spacetime by diffusion. 2013. DOI 10.1103/PhysRevD.87.124028.
https://arxiv.org/abs/1304.7247

[26] Nima Arkani-Hamed; Savas Dimopoulos; Gia Dvali. The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter. 1998. DOI 10.1016/S0370-2693(98)00466-3.
https://arxiv.org/abs/hep-ph/9803315

[27] J. G. Lee; E. G. Adelberger; T. S. Cook; S. M. Fleischer; B. R. Heckel. New Test of the Gravitational $1/r^2$ Law at Separations down to 52 μm. 2020. DOI 10.1103/PhysRevLett.124.101101.
https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.124.101101

[28] Wen-Hai Tan; An-Bin Du; Wen-Can Dong; Shan-Qing Yang; Cheng-Gang Shao; Sheng-Guo Guan; Qing-Lan Wang; Bi-Fu Zhan; Peng-Shun Luo; Liang-Cheng Tu; Jun Luo. Improvement for Testing the Gravitational Inverse-Square Law at the Submillimeter Range. 2020. DOI 10.1103/PhysRevLett.124.051301.
https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.124.051301

[29] Tobias Bothwell; Colin J. Kennedy; Alexander Aeppli; Dhruv Kedar; John M. Robinson; Eric Oelker; Alexander Staron; Jun Ye. Resolving the gravitational redshift across a millimetre-scale atomic sample. 2022. DOI 10.1038/s41586-021-04349-7.
https://www.nature.com/articles/s41586-021-04349-7

[30] Xin Zheng; Jonathan Dolde; Matthew C. Cambria; Hong Ming Lim; Shimon Kolkowitz. A lab-based test of the gravitational redshift with a miniature clock network. 2023. DOI 10.1038/s41467-023-40629-8.
https://www.nature.com/articles/s41467-023-40629-8

[31] Aaron Chou; Henry Glass; H. Richard Gustafson; Craig Hogan; Brittany L. Kamai; Ohkyung Kwon; Robert Lanza; Lee McCuller; Stephan S. Meyer; Jonathan Richardson; Chris Stoughton; Ray Tomlin; Rainer Weiss. The Holometer: An Instrument to Probe Planckian Quantum Geometry. 2017. DOI 10.1088/1361-6382/aa5e5c.
https://arxiv.org/abs/1611.08265

[32] Jonathan W. Richardson; Ohkyung Kwon; H. Richard Gustafson; Craig Hogan; Brittany L. Kamai; Lee P. McCuller; Stephan S. Meyer; Chris Stoughton; Raymond E. Tomlin; Rainer Weiss. Interferometric Constraints on Spacelike Coherent Rotational Fluctuations. 2021. DOI 10.1103/PhysRevLett.126.241301.
https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.126.241301

[33] B. Sharmila; Sander M. Vermeulen; Animesh Datta. Signatures of correlation of spacetime fluctuations in laser interferometers. 2026. DOI 10.1038/s41467-025-67313-3.
https://www.nature.com/articles/s41467-025-67313-3

[34] Abhinav Patra; Lorenzo Aiello; Aldo Ejlli; William L. Griffiths; Alasdair L. James; Nikitha Kuntimaddi; Ohkyung Kwon; Eyal Schwartz; Henning Vahlbruch; Sander M. Vermeulen; Keiko Kokeyama; Katherine L. Dooley; Hartmut Grote. Broadband Limits on Stochastic Length Fluctuations from a Pair of Table-Top Interferometers. 2025. DOI 10.1103/61j9-cjkk.
https://arxiv.org/abs/2410.09175

[35] Fabio Bergamin; Nikitha Kuntimaddi; Abhinav Patra; Stephanie Montoya; Moritz Mehmet; Katherine Dooley; Hartmut Grote; Henning Vahlbruch. A broadband squeezed light source for table-top interferometry. 2025. DOI 10.1088/1367-2630/ae2987.
https://arxiv.org/abs/2508.08857

[36] Sander M. Vermeulen; Torrey Cullen; Daniel Grass; Ian A. O. MacMillan; Alexander J. Ramirez; Jeffrey Wack; Boris Korzh; Vincent S. H. Lee; Kathryn M. Zurek; Chris Stoughton; Lee McCuller. Photon-Counting Interferometry to Detect Geontropic Space-Time Fluctuations with GQuEST. 2025. DOI 10.1103/PhysRevX.15.011034.
https://journals.aps.org/prx/abstract/10.1103/PhysRevX.15.011034

[37] Bruce Allen; Joseph D. Romano. Detecting a stochastic background of gravitational radiation: Signal processing strategies and sensitivities. 1999. DOI 10.1103/PhysRevD.59.102001.
https://arxiv.org/abs/gr-qc/9710117

[38] Johannes Nokkala; Jyrki Piilo; Ginestra Bianconi. Probing the spectral dimension of quantum network geometries. 2020. DOI 10.48550/arXiv.2005.09665.
https://arxiv.org/abs/2005.09665

[39] Yanli Yuan; De Wen Soh; Xiao Yang; Kun Guo; Tony Q. S. Quek. Joint Network Topology Inference via Structured Fusion Regularization. 2021. DOI 10.48550/arXiv.2103.03471.
https://arxiv.org/abs/2103.03471

[40] Madeline Navarro; Samuel Rey; Andrei Buciulea; Antonio G. Marques; Santiago Segarra. Joint Network Topology Inference in the Presence of Hidden Nodes. 2024. DOI 10.1109/TSP.2024.3392348.
https://arxiv.org/abs/2306.17364

[41] D. Puetzfeld, Y. N. Obukhov, C. Lämmerzahl. Gravitational clock compass in General Relativity. 2018. DOI 10.1103/PhysRevD.98.024032.
https://arxiv.org/abs/1805.10673

[42] D. Philipp, E. Hackmann, C. Lämmerzahl, J. Müller. The Relativistic Geoid: Gravity Potential and Relativistic Effects. 2020. DOI 10.1103/PhysRevD.101.064032.
https://arxiv.org/abs/1912.10159

[43] R. Martín, E. Verdaguer. Stochastic semiclassical gravity. 1999. DOI 10.1103/PhysRevD.60.084008.
https://arxiv.org/abs/gr-qc/9904021

[44] M. Rakhmanov, J. D. Romano, J. T. Whelan. High-frequency corrections to the detector response and their effect on searches for gravitational waves. 2008. DOI 10.1088/0264-9381/25/18/184017.
https://arxiv.org/abs/0808.3805

[45] A. Kehagias, K. Sfetsos. Deviations from the 1/r² Newton law due to extra dimensions. 2000. DOI 10.1016/S0370-2693(99)01421-5.
https://arxiv.org/abs/hep-ph/9905417

[46] Harry Nyquist. Thermal Agitation of Electric Charge in Conductors. 1928. DOI 10.1103/PhysRev.32.110.
https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.32.110

[47] Nathan E. Flowers-Jacobs; Alessio Pollarolo; Kevin J. Coakley; Adam C. Weis; Anna E. Fox; Horst Rogalla; Weston L. Tew; Samuel P. Benz. The NIST Johnson Noise Thermometry System for the Determination of the Boltzmann Constant. 2017. DOI 10.6028/jres.122.046.
https://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/122/jres.122.046.pdf

[48] Peter R. Saulson. Thermal noise in mechanical experiments. 1990. DOI 10.1103/PhysRevD.42.2437.
https://journals.aps.org/prd/abstract/10.1103/PhysRevD.42.2437

그림 찾아보기

1. 측정망 안의 관측자 9
2. 좌표, 독립적인 방향 및 길이 12
3. 곡률의 내부 검증 두 가지 14
4. 국소 기하와 전역적 닫힘 16
5. 시간, 빛원뿔 및 허용 궤적 17
6. 접근 가능한 영역의 성장 19
7. 구면의 측지 원판과 척도 지수 20
8. 귀환과 전파 거리 22
9. 노드 셋에서 응답 행렬로 25
10. 등스펙트럼 연결망과 이를 구별하는 국소 응답 27
11. 유한 장치의 세 가지 조건 29
12. 이산 기하를 정하는 두 가지 방법 34
13. 좌표는 유지되고 스펙트럼 지수는 바뀐다 36
14. 원으로 닫힌 방향 39
15. 주기성과 모드군 41
16. 콤팩트 방향의 열핵 대각합 43
17. 현대 공진기의 합성 축 45
18. 공통 원인과 제어한 작용 49
19. 경계 영역과 부피 내부의 표면 51
20. 한 계를 재구성하는 두 프로토콜 55
21. 닫힌 연결망과 접근 가능한 포트 57
22. 숨은 노드의 정적 제거 60
23. 자료 공간: 모형 둘과 교정 방향 63
24. 공통 변 사전과 실제 공통 결합 68
25. 결합 하나, 분포 하나와 포트 관측 70

26. 개별 대비의 구간으로 결합 세기를 제한하는 방법 75
27. 원래 격자와 추가한 변 5–58 79
28. 전체 응답 변화의 특이값 80
29. 포트 응답의 공간 패턴 82
30. 첫 계열의 복원 안정성 84
31. 약한 결합과 이를 모사하는 제약된 드리프트 88
32. 원래 구성과 새 구성의 민감도 90
33. 각 관측 자료 묶음에서 남는 후보 수 92
34. 개별 대비의 제약 포락선 92
35. 거짓 공통 쌍과 대조 포트 94
36. 전자장치 누설을 보존하는 기준 기록 96
37. 고정 프로토콜의 합성 검증 96회 결과 98
38. 확산 근사와 인과적 전면 100
39. 숨은 축전기와 응답의 기억 103
40. 힘의 지수와 콤팩트 모드의 도달 거리 계단 111
41. 발생원의 운동에서 검출기 판독까지 112
42. 유한한 두 원판의 기하 116
43. 유한 원판의 추가 힘과 조건부 민감도 118
44. 동적 문턱과 구별을 위한 간격 119
45. 가속 및 조석 곡률: 하나의 프로토콜, 두 배경 125
46. 시계 공분산의 척도와 시간 대역 128
47. 두 개의 시계와 중앙 중력계의 기하학; 결맞음 132
48. 전자장치를 유지한 채 시계 위치 바꾸기 135
49. 합성 자료에서 시계 위치 교환 결과 137
50. 간섭계의 완결된 빛 경로 142
51. 영이 아닌 장에서도 출력이 영일 수 있는 이유 144
52. 간섭계의 주파수 응답과 등가 잡음 146

53. 간섭계 판독 전략 세 가지 150
54. 노드 넷인 RC 시제품의 정확한 전기회로도 154
55. RC 기록 셋과 교정 포락선의 맹검 비교 156
56. RC 실험의 현대 하드웨어 측정 경로 158
57. 최신 비틀림 센서 및 돌림힘 측정 경로 159
58. 맹검 프로토콜: 장치, 기록과 키를 누가 보는가 166
59. 준비, 기록과 초기화 주기 192
60. CSV에서 가설 검증까지: 전체 처리 과정 194
61. 시간 기록과 전체/부분 귀환 196
62. 적분들의 공분산과 오차 성분 197

저자와 프로젝트

이메일: info@brenev.com

저자 웹사이트: brenev.com

미라 웹사이트: mira.technology

다른 프로젝트: haraizen.tech

텔레그램: https://t.me/Eudgenee